国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

科学与工程计算中的径向基函数方法

陈文　傅卓佳　魏星　著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

科学与工程计算中的径向基函数方法

陈 文 傅卓佳 魏 星 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了科学与工程计算中径向基函数方法的基本理论和相关应用，包含近年来国内外和作者的最新研究成果。全书分为九章。第一章介绍径向基函数的物理背景及其研究现状和科学与工程应用。第二至五章重点阐述各类径向基函数及核径向基函数；径向基函数在散乱数据处理中的应用；常见的几类区域型径向基函数方法，并通过数值算例检验这些算法；求解齐次微分方程的几类边界型径向基函数方法。第六至八章主要介绍边界型径向基函数离散方法处理非齐次微分方程的几种技术：给出径向基函数方法在各向异性、非定常、非线性等偏微分方程问题中的应用；大规模径向基函数方法快速求解技术。第九章阐述目前径向基函数方法在科学与工程计算中存在的不足及国内外学者目前研究的热点。

本书可作为高等学校数学、力学、物理、图像处理等工程类专业本科高年级学生、研究生的选修课教材或教学参考书，也可供有关工程技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

科学与工程计算中的径向基函数方法/陈文，傅卓佳，魏星著．—北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-037849-1

Ⅰ．①科… Ⅱ．①陈…②傅…③魏… Ⅲ．①函数-应用-科学计算-研究②函数-应用-工程计算-研究 Ⅳ．①N32②TB115

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第129079号

责任编辑：童安齐 / 责任校对：马英菊

责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行　　各地新华书店经销

*

2014年11月第　一　版　　开本：787×1092 1/16

2014年11月第一次印刷　　印张：13 1/2

字数：308 000

定价：60.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）

销售部电话 010-62142126　编辑部电话 010-62148322（VM）

前　言

随着计算机和数值计算方法的快速发展，数值模拟已成为与理论分析和实验研究鼎足而立的科学研究和工程产品开发的第三种基本方法和手段。在大多数情形下，由于理论分析复杂甚至理论模型难以建立，或是由于实验耗资巨大甚至无法实施，数值仿真成为主要甚至唯一的研究手段。由此，最近几十年来基于数值模拟的科学与工程逐渐兴起并发展成为一个庞大的跨学科研究领域。

虽然计算机硬件近年来有了迅速的发展，但科学家和工程师对数值算法的发展抱有更高的期望。这是因为算法的改进和提高对计算和仿真的规模、精度和可靠性有更深刻的影响。基函数选取和构造是所有数值模拟技术的核心问题，直接影响到计算仿真的效果。人们根据问题的特点构造了多项式基函数、正交多项式基函数以及分段样条基函数等多种不同的基函数，并成功应用于各类科学与工程计算。本书主要研究对象径向基函数是以欧几里得距离为变量的一类插值基函数。径向基函数与其他基函数的最大区别在于：经典的基函数是关于数据点坐标的函数，随问题维数的增加函数表达式变得非常复杂；径向基函数则是关于数据点间距离的函数，函数表达式与问题维数无关，始终是一维函数，而且隐含有物理学中场论的思想，一些径向基函数数值技术是半解析的离散方法。鉴于其无网格和存储与计算简单的优点，径向基函数插值方法近年来开始被广泛用于多维散乱数据处理和偏微分方程数值求解。

作为一类重要的物理、力学和图像处理的数值建模方法，径向基函数已成为国际上的一个研究热点，但是径向基函数方法在散乱数据处理与微分方程求解方面的书籍却屈指可数，目前国内外还未有侧重于径向基函数方法科学工程计算应用的书籍出版。国际上已出版的相关书籍大都侧重于径向基函数方法数学理论的介绍，如 H. Wendland 教授的 *Scattered Data Approximation*，该书偏重于散乱数据处理理论的介绍，径向基函数只是全书的一部分内容；M. D. Buhmann 教授的 *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*，该书偏重于径向基函数理论的数学推导和分析。国

内吴宗敏教授的《散乱数据拟合的模型、方法和理论》是应用数学与计算数学中有关曲面及多元函数插值、逼近、拟合的入门书籍，偏重于数学理论阐述。书中介绍了多元散乱数据拟合的一般方法，径向基函数只是其中一种方法，仅简单介绍了径向基函数方法在微分方程数值解方面的应用。由此可见，虽然径向基函数方法已经受到广泛的关注，但还未有系统介绍径向基函数方法在散乱数据处理与微分方程求解方面应用的专著和教材出版。

本书将是第一本系统全面介绍径向基函数方法在散乱数据处理与微分方程求解方面应用的中文专著和研究生教材。本书的范围涉及力学、数学、图像处理与工程应用，偏重于介绍径向基函数在多维散乱数据处理方面的应用，并首次较全面地阐述了求解微分方程的各类径向基函数方法，介绍径向基函数方法的最新进展以及本研究团队近年来在该领域的研究成果。本书将省去径向基函数方法数学理论的详细阐述，只给出相关数学证明的出处，着重强调径向基函数方法的工程应用和程序实现，并将提供部分基于 Matlab 软件编写的源程序（em. hhu. edu. cn/ccms/fuzj/RBFbook）。

本书可作为研究生教学用书，为力学、机械、物理及信息信号处理等领域提供新的、有效的建模手段，在国内推广径向基函数方法，希望有更多的工程力学、计算数学、工程计算软件和信息信号处理的研究人员共同关注、研讨这个热门的研究领域，使其得到更加深入、广泛地发展，以迅速提高我国在此领域的研究和应用水平。需要说明的是，现在关于径向基函数方法及其应用的文献很多，并且数量增长非常快，本书不可能一一列举，感兴趣的读者可以将本书所列的参考文献作为线索，查询自己所需的资料，我们也十分欢迎读者给予我们反馈意见。

本书由陈文、傅卓佳和魏星主持撰写。全书的撰写大纲由陈文提出。全书的撰写工作由陈文负责统筹安排，其中陈文负责第一章和第九章的撰写工作；陈文、傅卓佳负责第二、四、五、六、七章的撰写工作；陈文、魏星负责第三、八章的撰写工作。傅卓佳、魏星负责全书的修改与排版工作。C. S. Chen 教授、李明副教授和王莉华博士等在写作过程中给予了指导和帮助，并且认真审阅了全书，提出了不少宝贵意见，作者在此表示由衷的感谢。同时感谢课题组王福章博士、姜欣荣博士，以及博士生谷岩、林继、孙林林等的研究工作对本书的贡献。

本书的部分研究工作得到国家杰出青年科学基金项目（No. 11125208）、国家自然科学基金项目（No. 11372097，11302069）、科技部国家重点基础研究发展计划（“973”）项目（No. 2010CB832702），高等学校学科创新引智计划 111 引智基地项目（B12032）、中国博士后科学基金项目(2014M561565)、国家科学技术学术著作出版基金项目和江苏省特聘教授计划项目的支持，特此致谢。

由于作者水平和时间所限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

作　者
2014 年 5 月
于南京

目　　录

第一章　概　　论

1.1　径向基函数的发展历史

目前，科学与工程计算主要涉及函数插值逼近、微分方程数值求解、最优化分析、概率统计预测等研究领域。基函数选取是这些研究领域共有的一个核心问题，直接影响到相应数值算法计算结果的优劣。一直以来，人们都希望能找到一类简单有效的基函数用于科学与工程计算，先后根据不同问题的需要构造了多项式基函数、正交多项式基函数以及分段样条基函数等不同基函数。

本书中所要研究的径向基函数是一类以欧式距离作为变量的基函数集合。关于径向基函数的起源，一般有两种说法：一种认为径向基函数起源于 1951 年，Krige 把矿藏的沉积看成是一个各向同性的 Gauss 分布函数，提出所谓的 Kriging 方法并应用于矿藏分析[1]。此类说法的依据是 Kriging 方法中选用的 Gauss 分布函数，即是 Gaussian 型径向基函数。另一种是认为径向基函数起源于 1971 年，Hardy 提出了一类著名的径向基函数——Multi-Quadratic（MQ）函数，并将其应用于地貌形状与飞机外形设计的曲面拟合问题[2]。但是无论是 Krige 还是 Hardy 的研究工作在当时都并未引起科学与工程计算领域研究学者的足够重视，因此这方面的研究工作也相对零散，如 Duchon 在 1975 年根据薄板表面弯曲能量最小化原理推导得到了另一类径向基函数——Thin-Plate Spline（TPS）函数[3]。

真正改变径向基函数命运的是 Franke 于 1982 年发表在 *Mathematics of Computation* 杂志的 *Scattered Data Interpolation*：*Tests of Some Method* 一文[4]。Franke 在典型的散乱数据插值算例上系统地比较了 29 种不同的插值算法，并最终指出 MQ 和 TPS 这两类径向基函数插值方法的拟合效果最佳。自此，径向基函数在数据处理与插值领域得到了广泛的应用。

另一项开创性工作是 Kansa 于 1990 年发表在 *Computers & Mathematics with Applications* 杂志上的两篇系列文章[5,6]。Kansa 将配点法和径向基函数插值相结合用于计算流体力学问题。一般认为，Kansa 的这项研究工作首次将径向基函数应用到微分方程数值求解领域。随后，鉴于其无网格，收敛迅速和计算简单的优点，各种不同形式的径向基函数方法相继被提出，并用于求解科学与工程计算中遇到的各类微分方程。

事实上早在 1981 年，Nardini 和 Brebbia[7]尽管没有采用径向基函数这一术语，但是他们在边界单元法求解非齐次计算力学问题时，已经将径向基函数插值的思想运用于计算特解的双向互易法中。随后 Brebbia 的研究团队还对此作了大量的研究。他们这方面的研究工作直到 1993 年左右才被 Golberg 和 Chen[8]注意到，并逐渐发扬光大。

Golberg 和 Chen[9] 的另一项重大贡献是他们注意到一些微分方程的基本解也是以距离为变量的函数，并将这些基本解函数纳入径向基函数范畴。这项工作极大地丰富了径向基函数的种类，大大加快径向基函数方法在微分方程求解领域的发展。

尽管径向基函数方法具有无网格和简单易用的优点，但其离散产生的病态稠密矩阵计算成为制约其大规模科学与工程应用的主要障碍。为了克服这一限制，各种不同的处理技术相继被引入或提出。这些处理技术大致可以分为三类：算法局部化处理，如局部紧支撑径向基函数和局部化径向基函数方法等；矩阵稀疏化处理，如矩阵预调节技术和稠密矩阵快速计算技术；精度扩展处理，如扩展精度算法和多重精度算法。其中，Beatson 研究团队[10] 将快速多极技术与径向基函数插值相结合成功用于高维散乱数据处理，并基于 Matlab 平台开发相应的专业软件包——FastRBF[11]。

鉴于它的上述优点，径向基函数得到了快速的发展，国内外学者提出了许多基于径向基函数的科学计算方法，如散乱数据重建算法[12,13]、偏微分方程的无网格算法、反问题数值算法、神经网络算法[14-16] 和支持向量机学习算法[17,18] 等。这些算法也被广泛地应用于计算力学[19]、流体动力学[20]、计算机图形学、图像处理[21] 和金融分析[22,23] 等工程应用领域。此外，学者们还针对径向基函数算法的精度、稳定性以及简单易用性等方面进行了研究及改进，读者可以查阅相关的综述性文献[24-26] 和书籍[27,28]。

本书将主要从径向基函数构造、散乱数据的径向基函数插值、微分方程求解的径向基函数方法和大规模计算的径向基函数方法等四个部分系统地介绍径向基函数在散乱数据处理和微分方程求解这两个科学与工程计算领域的研究进展，并重点介绍本课题组近年来在该领域的研究成果。

1.2　科学与工程计算中的径向基函数方法

1.2.1　散乱数据处理与插值

数据插值拟合是科学与工程计算的基础。传统的数据插值拟合技术通常选用多项式函数作为基函数进行插值计算，如等距节点插值，拉格朗日插值，三次样条内插公式和带导数的 Hermite 插值等。但是这些传统方法一般只适用于规则网格插值点的情况，对于科学与工程计算领域常见的散乱数据插值拟合问题处理起来比较麻烦。为此，学者们致力于发展适用于散乱数据插值处理的计算方法，并提出了许多相应的计算方法。1982 年，Franke 通过典型的散乱数据插值算例系统地比较了 29 种不同的插值算法，这项工作发表在 *Mathematics of Computation* 杂志的 *Scattered Data Interpolation: Tests of Some Method*[4] 上，文中指出 MQ 和 TPS 这两类径向基函数插值方法的拟合效果最佳。自此，径向基函数在数据处理与插值领域得到了广泛的应用。

本书第三章将集中介绍此部分的内容。在第三章中将首先介绍径向基函数插值的基本思想；随后在此基础上将径向基函数插值分别与最小二乘法、单位分解法和残差迭代法等技术相结合得到相应的径向基函数插值方法；接着引入曲面拟合的思想，给

出基于径向基函数插值的曲面重构方法；最后，引入 Hermite 插值思想及构造径向基函数的 Hermite 插值方法。

1.2.2 偏微分方程数值解

数值模拟物理力学问题的本质就是偏微分方程的数值求解。传统求解偏微分方程的数值方法，如有限差分法、有限元法、有限体积法和边界元法等都是基于网格划分的。经过几十年的发展，这些网格类算法已被广泛应用于模拟自然界中的各种物理力学现象。但是这些方法需要网格划分，因此在解决一些复杂问题时常会遇到网格划分的难题，如在冲压成型、高速撞击、流固耦合等涉及特大变形的问题中，由于网格可能发生严重变形，计算中需要重构网格。网格重构不仅计算费用昂贵，而且会损害计算精度。为了克服网格类算法的这种缺陷，无网格方法（Meshless Method/Meshfree Method）被提出。这类算法只需要节点信息而不必划分单元，具有求解精度高、收敛快、后处理方便等优点，已成为近年来国际计算力学界的热点研究之一[29,30]。目前的无网格方法主要有光滑质点流体动力学方法（Smoothed Particle Hydrodynamics）[31]、无单元伽辽金法（Element-Free Galerkin Method）[32]、再生核粒子法（Reproducing Kernel Particle Method）[33]、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法（Meshless Local Petrov-Galerkin）[34]、单位分解法（Partition of Unity Method）[35]和径向基函数方法（Radial basis function method）[20,36]等。这些方法根据离散待求问题的方式不同，大体可分为两类。一类是弱格式无网格法，从微分方程的弱形式变分原理出发，导出求解问题的离散形式，这类方法的特点是求解精度较高、稳定性好，但计算量较大，且需要数值积分。另一类是强格式无网格法，也就是配点型无网格法，它直接在离散点上满足微分方程或边界条件，建立求解问题的代数方程。这类方法形式简单，不需要数值积分，计算效率高于弱格式方法，但是稳定性较弱格式算法相对要差些。本书（第四～七章）将主要讨论一些强格式径向基函数无网格法在偏微分方程数值求解中的问题。

1.2.2.1 区域型径向基函数方法

鉴于径向基函数形式简单、与空间维数无关、各向同性等优点，早在 1981 年，Nardini 和 Brebbia[7]就引入了径向基函数的思想辅助边界单元法求解非齐次计算力学问题，并对此做了大量研究。但是他们当时并没有采用径向基函数这一术语，同时计算过程中径向基函数插值只作为一种辅助手段帮助边界元法求解偏微分方程。随后，Kansa 于 1990 年首次将径向基函数作为主要技术手段应用到微分方程数值求解领域，他这方面的研究成果体现在 *Computers & Mathematics with Applications* 杂志上的两篇系列文章[5,6]中。文章中将配点法和径向基函数插值相结合用于求解流体力学中的偏微分方程。随后，学者们[37-40]将 Hermite 插值的思想引入到 Kansa 方法中，提出了几类不同形式的 Hermite 型径向基函数方法，这些 Hermite 型方法降低了径向基函数连续性的要求。但是 Kansa 法和 Hermite 型径向基函数方法的计算结果越靠近区域边界越不理想，为此，学者们提出了几类改进边界附近区域误差的技术[41]，即插值点特殊

分布技术、PDECB 方法、修正 Kansa 法和加权配点法[42]等。此外，学者们还将 Kansa 法和对称 Hermite 型方法分别与伪谱方法相结合，构造相应的伪谱形式的径向基函数方法，从而克服了传统伪谱方法在高维偏微分方程应用中遇到的困难。近年来，Chen 等[43]还基于基本解方法结合双向互易法技术的思想推导得到了一类区域型径向基函数方法——近似特解方法。不同于 Kansa 方法，近似特解方法保证了插值矩阵的可逆性。

另一方面需要注意的是，区域型径向基函数方法选用全局支撑的径向基函数作为基函数计算时，构造得到的离散插值矩阵通常为病态满阵，随着插值点数的增加矩阵条件数迅速增加，这容易造成计算的不稳定且难以直接应用于计算大规模科学与工程问题。此外，计算结果的精度对全局支撑径向基函数形状参数的取值非常敏感，而确定最优的形状参数并不是一件容易的事情。为了避免全局支撑径向基函数生成病态满阵以及最优形状参数选取的麻烦，学者们[44,45]构造了几种径向基函数方法的局部化计算格式，并相应地提出了几类局部化径向基函数方法，如局部化 Kansa 法、局部化 Hermite 型方法、局部化近似特解方法和局部化径向基函数微分求积法等。这些局部化计算格式的基本思想都类似于局部紧支撑径向基函数的构造形式，即人为选取各插值点所对应的影响区域的大小，只考虑影响区域内插值点对该插值点的影响，截断影响区域外的插值点对该插值点的影响。这些局部化计算格式在损失一定计算精度的情况下得到稀疏离散矩阵，从而使得算法能够应用于计算大规模工程科学问题，同时也减缓了形状参数取值对于计算精度的影响。

此外，在弱格式区域径向基函数方法研究方面，Liu 等[46,47]基于点插值法的基本思想，引入径向基函数插值构造计算形函数，进而提出了径向点插值方法。该方法也是一类应用比较广泛的区域型径向基函数方法，而径向基函数结合传统算法所衍生的新算法也相继出现[48-52]。

1.2.2.2 边界型径向基函数方法

为了克服边界元法的边界网格划分麻烦，近年来，一些边界型径向基函数方法相继被提出。该类方法结合了边界元法仅需边界离散和径向基函数方法无需网格生成的优点。本书将主要介绍一类属于强格式边界型无网格方法的径向基函数方法——强格式边界型径向基函数方法，它主要有基本解法（Method of Fundamental Solution）、边界节点法（Boundary Knot Method）、边界配点法（Boundary Collocation Method）、正则化无网格法（Regularized Meshless Method）、修正基本解法（Modified Method of Fundamental Solution）、奇异边界法（Singular Boundary Method）和边界分布源法（Boundary Distributed Source Method）等。

由 Kupradze 和 Aleksidze[53]提出的基本解方法（Method of Fundamental Solution，简称 MFS）是一类备受关注的配点型边界无网格算法，在一些文献中也被称为正则化边界单元法（Regular Boundary Element Method）、重合点法（Superposition Method）[54]、去奇异法（Desingularized Method）[55]、电荷模拟法（Charge Simulation Method）[56]和辅助源点法（Method of Auxiliary Sources）。与边界元法一样，该方法也选用满足问题控制方程的基本解作为插值基函数。与边界元法不同的是，基本解方法

将源点布置在物理求解域外的虚假边界上以克服基本解的源点奇异性问题，从而避免了边界元法及弱格式边界型无网格方法中数学复杂且计算量大的奇异积分。此外，该方法数学原理简单，编程容易，且比边界元法的数值结果收敛速度快，有所谓的谱精度（Spectral accuracy），目前已被成功应用于热传导分析[57,58]、声学模拟[59,60]、反应扩散问题[61]、轴对称弹性力学[62]、Stokes 流[63,64]和自由振动分析[65,66]等众多科学与工程领域。关于基本解方法的数学理论及虚拟边界布置等方面的研究可以参考 Fairweather、Karageorghis、Smyrlis、Martin、Golberg 和 Chen 等学者的工作[67-72]。然而尽管进行了几十年的研究，基本解方法仍存在插值离散矩阵为病态满系数矩阵的问题，且虚假边界的设置有相当大的随意性[73]，在计算多连通域问题和复杂几何域问题时，易造成计算不稳定。

为了避免虚假边界和基本解的源点奇异性，陈文提出了仅需在物理边界上配点离散的边界节点法（Boundary Knot Method，BKM）[74]，即使用满足控制方程的径向基函数非奇异通解（General Solution）替代奇异基本解（Fundamental Solution），在避免选取基本解法中虚假边界的同时保留该法其他优点。数值试验表明，边界节点法计算二维和三维有限几何复杂域的对流扩散[75]和薄膜振动[76]等物理问题的精度较高，且能有效地减少计算复杂度。但是边界节点法的插值离散矩阵较基本解法更为病态，且满足问题的径向基函数非奇异一般解不易找到，如 Laplace 方程和无限域问题的 Helmholtz 方程（需要同时满足 Helmholtz 方程和无穷远处 Sommerfeld 辐射边界条件）。

另一方面，杨德良等采用加减消去技术去除基本解的源点奇异性[77-79]，进而提出了正则化无网格方法（Regularized Meshless Method，RMM）。该方法也仅需在物理边界上配点离散，且克服了基本解方法和边界节点法的插值离散矩阵病态的问题，已被成功应用于声波特征值问题[80]、无限域声学[81]、反平面剪切问题[82]、反平面压电材料[83]等。只是标准的正则化无网格方法需要均匀布置边界点，这一要求严重限制了此方法的应用。为此，宋仁成和陈文[84]提出一种改进的正则化无网格方法，通过积分计算边界线段长度作为权值修正不均匀布点问题。

类似于正则化无网格方法，Sarler 也提出了一种修正的基本解法（Modified Method of Fundamental Solution）[85]，并用于计算位势流问题。最近，陈文引入源点强度因子（Source Intensity Factor）的概念来避免基本解的源点奇异性，即在配点和源点重合时引入源点强度因子来代替基本解作为插值基函数，从而提出了一类新型的配点型边界无网格方法——奇异边界法（Singular Boundary Method，SBM）[86]，并应用于二维位势问题。此外，美国辛辛那提大学刘铁军教授也提出一类新的配点型边界无网格方法——边界分布源方法（Boundary Distributed Source Method）[87]。它采用覆盖边界源点的一块区域作为分布源来代替奇异源点，从而消去基本解的奇异性，该方法已被成功用于二维位势问题。

需要指出的是，上述的边界配点型无网格方法都只适用于齐次方程问题（不含内部源项）。在计算非齐次方程问题（含内部源项）时，这些算法通常需要结合其他附加技术，如蒙特卡洛法[88]、径向积分法[89]、双重互易法（Dual Reciprocity Method，DRM）[90]、多重互易法（Multiple Reciprocity Method，MRM）[91]以及一些其他的算

法[92,93]等。其中，双重互易法和多重互易法被认为是应用最为广泛的两种处理非齐次项（内部源项）的技术[94]。基于双重互易法的边界型无网格算法已被成功用于位势问题，含内部热源的热传导问题和 Winkler 板的弯曲分析等众多科学和工程计算问题[95-99]。但是双重互易法需要在计算域内布置辅助点并选取合适的插值基函数进行插值逼近，以提高计算精度和稳定性，因而该方法不再是纯粹的边界离散方法。此外，这些内部辅助点的布置和插值基函数的选取都具有较大的随意性，需要使用者有一定的问题背景经验和算法知识，这就增加了计算成本和使用难度。双重互易法中插值基函数主要有径向基函数和伪谱基函数（Pseudo-Spectral Method）[100]等。多重互易法选用高阶 Laplace 微分算子消去非齐次源项，因此只需要边界离散即可数值模拟非齐次方程问题，然而高阶 Laplace 微分算子难以处理振荡剧烈的函数，这极大地限制了方法处理非齐次源项的适用范围。陈文推导得到了满足高阶 Helmholtz 型方程的高阶径向基函数通解，并基于多重互易技术提出了对含激励源项的波传播问题仅需边界离散的边界粒子法（Boundary Particle Method，BPM）[101,102]。该方法克服了奇异积分和网格生成，避免了基本解方法的虚假边界，是一种真正的边界型无网格方法。

参考文献

[1] Krige D G. A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand [D]. Johannesburg University of the Witwatersrand，1951.

[2] Hardy R L. Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces [J]. Journal of Geophysical Research，1971，76：1905-1915.

[3] Duchon J. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces [A]. In：Schempp W，Zeller K，editors. Constructive Theory of Functions of Several Variables [M]. Heidelberg：Springer-Verlag ，1997：85-100.

[4] Franke R. Scattered data interpolation：tests of some method [J]. Mathematics of Computation，1982，38 (157)：181-200.

[5] Kansa E J. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic，hyperbolic and elliptic partial differential equations [J]. Computers & Mathematics with Applications，1990，19 (8-9)：147-161.

[6] Kansa E J. Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates [J]. Computers & Mathematics with Applications，1990，19 (8-9)：127-145.

[7] Nardini D，Brebbia C A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements [J]. Applied Mathematical Modelling，1983，7 (3)：157-162.

[8] Golberg M A，Chen C S，Bowman H，et al. Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method [J]. Computational Mechanics，1998，21 (2)：141-148.

[9] Golberg M A，Chen C S，The method of fundamental solutions for potential，Helmholtz and diffusion problems [A]. In：Golberg M A，editor. Boundary Integral Methods-Numerical and Mathematical Aspects [M]. Boston：Computational Mechanics Publications，1998：103-176.

[10] Beatson R K，Newsam G N. Fast evaluation of radial basis functions：I [J]. Computers & Mathematics with Applications，1992，24 (12)：7-19.

[11] FastRBF™ software for scattered data interpolation. http：//www. farfieldtechnology. com/

[12] Iske A. Scattered data modelling using radial basis functions [A]. In: Iske A, Quak E, Floater M S, editors, Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling [M]. Heidelberg: Springer-Verlag , 2002: 205-242.
[13] 张建国，戴菲. 基于径向基函数的离散数据重建方法 [J]. 机械设计与制造，2012，(7)：208-210.
[14] Chen S, Cowan C F N, Grant P M. Orthogonal least-squares learning algorithm for radial basis function networks [J]. Ieee Transactions on Neural Networks, 1991, 2 (2): 302-309.
[15] Shen W, Guo X, Wu C, et al. Forecasting stock indices using radial basis function neural networks optimized by artificial fish swarm algorithm [J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24 (3): 378-385.
[16] 伊燕平，卢文喜，张耘，等. 基于径向基函数神经网络的地下水数值模拟模型的替代模型研究 [J]. 水土保持研究，2012，19 (4)：265-269.
[17] Cortes C, Vapnik V. Support-vector networks [J]. Machine Learning, 1995, 20 (3): 273-297.
[18] Burges C J C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition [J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2 (2): 121-167.
[19] 王莉华，仲政. 基于径向基函数配点法的梁板弯曲问题分析 [J]. 固体力学学报，2012，33 (4)：349-357.
[20] 张云新. 无网格径向基函数方法与不可压缩流体计算 [D]. 上海：复旦大学，2006.
[21] Zitova B, Flusser J. Image registration methods: a survey [J]. Image and Vision Computing, 2003, 21 (11): 977-1000.
[22] Tsai C C, Young D L, Chiang J H, et al. The method of fundamental solutions for solving options pricing models [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 181 (1): 390-401.
[23] Guo X, Wang H, Yang F. Thermal power financial environment risk forecast model by combined stock multi-indicators basis on RBF neural network [J]. AASRI Procedia, 2012, 1: 519-524.
[24] Buhmann M D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
[25] 吴宗敏. 径向基函数，散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解 [J]. 工程数学学报，2002，19 (2)：1-12.
[26] 吴宗敏. 关于径向基函数插值的收敛性 [J]. 数学年刊：A 辑，1993，1 (4)：480-486.
[27] Fasshauer G E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB [M]. Singapore: World Scientific Publishers, 2007.
[28] Chen C S, Hon Y C, Schaback R S. Radial Basis Functions with Scientific Computation [M]. Department of Mathematics, University of Southern Mississippi, USA, 2008.
[29] Liu G R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element [M]. USA: CRC Press LLC, 2003.
[30] 张雄，刘岩. 无网格法 [M]. 北京：清华大学出版社，2004.
[31] Gingold R A, Maraghan J J. Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181 (2): 375-389.
[32] Belytschko T, et al. Fracture and crack growth by element free Galerkin methods [J]. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 1994, 2 (3A): 519-534.
[33] Wing Kam L, Sukky J, Shaofan L, et al. Reproducing kernel particle methods for structural dynamics [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, 38 (10): 1655-1679.
[34] Atluri S N, Zhu T. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. Computational Mechanics, 1998, 22 (2): 117-127.
[35] Babuska I, Melenk J M. The partition of unity methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40: 727-758.
[36] 赖生建. 计算电磁学中的径向基无网格法 [D]. 成都：电子科技大学，2010.
[37] Fasshauer G E. Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions [A]. In: Le Méhauté A, Rabut C, Schumaker L L, editor. Surface Fitting and Multiresolution Methods [M]. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 1997: 131-138.
[38] Franke C, Schaback R. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions [J].

Applied Mathematics and Computation, 1998, 93 (1): 73-82.
[39] Wu Z M. Hermite-Birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions [J]. Approximation Theory and its Applications, 1992, 8 (2): 1-10.
[40] La Rocca A, Hernandez Rosales A, Power H. Radial basis function Hermite collocation approach for the solution of time dependent convection - diffusion problems [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2005, 29 (4): 359-370.
[41] Chen W. New RBF collocation methods and kernel RBF with applications. Meshfree methods for partial differential equations. In: Griebel M, Schweitzer M A, editors. Meshfree Methods for Partial Differential Equations [M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2002: 75-86.
[42] Hu H, Chen J, Hu W. Weighted radial basis collocation method for boundary value problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 69 (13): 2736-2757.
[43] Tsai C C, Chen C, Hsu T W. The method of particular solutions for solving axisymmetric polyharmonic and poly-Helmholtz equations [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33 (12): 1396-1402.
[44] Wu Z. Compactly supported positive definite radial functions [J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 4 (1): 283-292.
[45] Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree [J]. Advances in Computational Mathematics, 1995, 4 (1): 389-396.
[46] Liu G R, Yan L, Wang J G, et al. Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2002, 14 (6): 713-732.
[47] Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 54 (11): 1623-1648.
[48] Bayona V, Moscoso M, Carretero M, et al. RBF-FD formulas and convergence properties [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229 (22): 8281-8295.
[49] Moroney T J, Turner I W. A modified finite volume method incorporating radial basis functions for simulating diffusion [J]. ANZIAM Journal, 2005, 46: 458-471.
[50] Yang J G, Guo R, Tian Y W. Hybrid radial basis function/finite element modelling of journal bearing [J]. Tribology International, 2008, 41 (12): 1169-1175.
[51] 周林仁，欧进萍. 基于径向基函数响应面方法的大跨度斜拉桥有限元模型修正 [J]. 中国铁道科学，2012，33 (3). 8-15.
[52] 陈华. 基于径向基函数的有限体积方法 [D]. 南京：南京航空航天大学，2005.
[53] Kupradze V D, Aleksidze M A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems [J]. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1964, 4 (4): 82-126.
[54] Koopmann G H, Song L, Fahnline J B. A method for computing acoustic fields based on the principle of wave superposition [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1989, 86 (6): 2433-2438.
[55] Yusong C, William W S, Robert F B. Three-dimensional desingularized boundary integral methods for potential problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1991, 12 (8): 785-803.
[56] Amano K. A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1994, 53 (3): 353-370.
[57] Chen C S. The Method of Fundamental-Solutions for Nonlinear Thermal Explosions [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1995, 11 (8): 675-681.
[58] Chantasiriwan S. Methods of fundamental solutions for time-dependent heat conduction problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66 (1): 147-165.
[59] Antonio J, Tadeu A, Godinho L. A three-dimensional acoustics model using the method of fundamental solutions [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008, 32 (6): 525-531.
[60] Kondapalli P S, Shippy D J, Fairweather G. Analysis of Acoustic Scattering in Fluids and Solids by the Method of Fundamental-Solutions [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1992, 91 (4):