

教育部審定

初級中學學生用
開明算學教本
代數

下冊

周爲羣 劉薰宇
章克標 仲光然
合編

恒志

開明書店出版

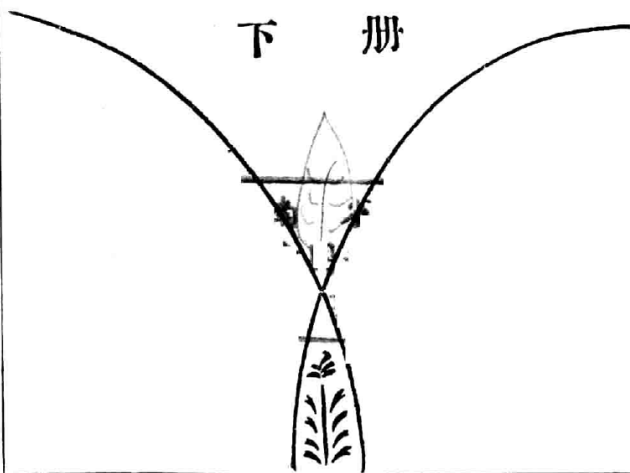
民國二十年三月七日教育部審定

開明算學教本

初級中學學生用

代數

下冊



上海開明書店印行

號壹拾捌第字審照執定審部育教月三年十二國民

民國十八年七月初版發行
民國廿二年六月八版發行

實價大洋六角

(外埠酌加郵費)

本教學算明開

■ 數 代 ■

〔下〕

印翻許不權作著有

編者

周爲羣 劉蕭宇
章克標 仲光然

發行者

上海福州路八十五號
杜海生

印刷者

上海東熙華德路餘慶里
美成印刷公司

總發行所

上海四馬路八五五號
電報掛號七〇五五

開明書店發行所

分發行所

廣州惠愛東路
北平楊梅竹斜街
長沙南陽橋

開明書店分店

下 冊 目 錄

第十三章 三次以上的式子的因數.....195

第十四章 最高公因數和最低公倍數 ... 201

求最高公因數和最低公倍數的法則(202)

第十五章 分 數 211

分數的乘法和除法(214) 倒數(215) 除數爲

分數的除法(216) 分數的加法和減法(218)

第十六章 分數方程式 226

分數方程式的解法(226) 聯立一次分數方

程式的解法(229)

第十七章 指數和對數 237

分數指數(238) 10^0 的意義怎樣(239) 表的

應用(243) 假數(244) 指標(244) 乘法和除

法(246) 乘方和方根(248) 負指數的意義

(250) 指數的性質(257) 對數符號(262)

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ 和 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(262) $\log_a x^p = p \log_a x$ (262) 複利息(265)

第十八章 續二次方程式 269

二次方程式的根和係數的關係 (270) 二次方程式的根的性質 (275) 虛數的性質 (276) 一般虛數的表示 (276)

第十九章 聯立二次方程式 278

兩式中有一個是一次的 (278) 兩個方程式都是二次的 (284) 對稱式, 對稱方程式 (288)

第二十章 不盡根數 294

無理數 (294) 有理數 (294) 共軛式 (296)

第二十一章 無理方程式 301

可逆的步驟 (304) 餘分根 (307) 二次形式的無理方程式 (309) $a \pm 2\sqrt{b}$ 的平方根 (311)

第二十二章 比和比例 315

單位和量數 (315) 比 (315) 比的性質 (316) 齊次式的性質 (318) 齊次方程式 (318) 同次的兩個齊次式的比 (320) 比例 (321) 比例的諸性質 (322)

第二十三章 級數 326

算術級數 (326) 等差級數 (326) 公差 (326)

算術級數的和(327) 一般的求法(328) 算術
級數的和的一般的形式(330) 算術中數(331)
幾何級數(334) 等比級數(334) 公比(334)
幾何級數的和(335) 幾何級數的和的一般
的形式(337) 幾何中數(339) 算術級數和幾
何級數各項的關係(340) 用對數計算幾何
級數(342) 無窮級數(347) 極限值(351) 斂
級數(354) 發級數(354) 調和級數(355)

第二十四章 $(a+x)$ 的乘方 361

$(1+x)^n$ 的近似值(363)

第二十五章 開 方 370

一般的開平方法(373) 一般的開立方法(375)

附 錄

平方根表(i) 對數表(xii)

代 數

下 冊

第十三章

三次以上的式子的因數

135. 由乘法可得下列各恆等式:—

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3,$$

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3\equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

$$\equiv a^3+b^3+c^3-3abc.$$

將這幾個恆等式的兩邊交換,就得幾個分解因數的式子:—

$$a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2-ab+b^2)\dots\dots\dots(\text{v}),^*$$

$$a^3-b^3\equiv(a-b)(a^2+ab+b^2)\dots\dots\dots(\text{vi}),$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\equiv(a+b)^3\dots\dots\dots(\text{vii}),$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\equiv(a-b)^3\dots\dots\dots(\text{viii}),$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\dots(\text{ix}).$$

* 以前的式子見第九章.

〔例題〕 分解 $27x^3-8$ 的因數.

$$\begin{aligned} 27x^3-8 &\equiv (3x)^3-2^3 \\ &\equiv (3x-2)(9x^2+6x+4). \end{aligned}$$

〔例題〕 分解 $(3x-2y)^3+(2x-3y)^3$ 的因數.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\equiv \{ (3x-2y) + (2x-3y) \} \\ &\quad \{ (3x-2y)^2 - (3x-2y)(2x-3y) + (2x-3y)^2 \} \\ &\equiv (5x-5y) \{ (9x^2-12xy+4y^2) \\ &\quad - (6x^2-13xy+6y^2) + (4x^2-12xy+9y^2) \} \\ &\equiv 5(x-y)(7x^2-11xy+7y^2). \end{aligned}$$

〔例題〕 分解 $1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$ 的因數.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\equiv 1-3(4x^2y^2)+3(4x^2y^2)^2-(4x^2y^2)^3 \\ &\equiv (1-4x^2y^2)^3 \\ &\equiv (1+2xy)^3(1-2xy)^3. \end{aligned}$$

〔例題〕 分解 $x^3+a^3-1+3ax$ 的因數.

$$\begin{aligned} \text{原式} &\equiv x^3+a^3+(-1)^3-3xa(-1) \\ &\equiv (x+a-1)(x^2+a^2+1+a+x-ax). \end{aligned}$$

習題 一 ○ ○

分解下列各式的因數:—

1. a^3+8b^3 .

2. $27a^3-b^3$.

3. y^3+1 .

4. $1-125z^3$.

5. a^4+ab^3 .

6. x^3y-8y^4 .

7. $a^{3n} + b^{3n}$. 8. $a^{3n} - b^{3n}$.
9. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. 10. $1 - 3y + 3y^2 - y^3$.
11. $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$. 12. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$.
13. $a^6 + 6a^4b^2 + 12a^2b^4 + 8b^6$.
14. $x^4 - 30x^3y + 300x^2y^2 - 1000xy^3$.
15. $x^3 + y^3 - z^3 - 3xyz$. 16. $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$.
17. $1 - x^3 - y^3 - 3xy$. 18. $x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} - 3x^ny^nz^n$.
19. $(x+2y)^3 - (2x+y)^3$. 20. $(x-2y)^3 + (y-2x)^3$.
21. $(x-y)^3 + (y-x)^3$. 22. $(x-y)^3 - (y-x)^3$.

136. 下面的恆等式也是很有用的:—

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &\equiv a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 \\ &\equiv (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \\ &\equiv (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

$$\therefore a^4 + a^2b^2 + b^4 \equiv (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \dots (x).$$

這也是可注意的, $a^2 + b^2$ 不能被分解成實有理因數,* 而 $a^4 + b^4$ 卻能够這樣; 即

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &\equiv a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 \\ &\equiv (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2ab})^2 \\ &\equiv (a^2 + \sqrt{2ab} + b^2)(a^2 - \sqrt{2ab} + b^2). \end{aligned}$$

這兩個因數都是實數,並且是有理數,雖然 ab 的係數是無理數,但在代數上全式是不作為無理數看的。

* 如 $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b^2}$ 等稱為無理數,以後當詳細地說明。

習題一〇一

分解下列各式的因數：一

1. $x^4 + x^2 + 1$.
2. $a^4 - 7a^2b^2 + b^4$.
3. $a^4 - 6a^2b^2 + b^4$.
4. $p^5 - q^5$.
5. $p^5 + q^5$.
6. $a^4 + 4$.
7. $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$.
8. $a^4 + 16$.
9. $x^8 + x^4 + 1$.
10. $x^8 + 1$.
11. $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$.
12. $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$.
13. $x^2(x+y)^2 - (x^2+y^2)^2$.
14. $9a^2 + 6ab - 4c^2 + 4cb$.
15. $a^4 - ya^3 + z^3a - z^3y$.
16. $(a^2 + 4a) - (b^2 - 4b)$.
17. $6x^2 + 7ax - 2x - 3a^2 - 3a$.
18. $a^2 - b^2 + 8bc - 16c^2$.
19. $a^2 + b^2 + 2(ab + ac + bc)$.
20. $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15$.
21. $\{x^2 - (y-z)^2\} \{y^2 - (z-x)^2\} \{z^2 - (x-y)^2\}$.
22. $(x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-2) - (x-1)$.
23. $3ax^4 - 3ay^4$.
24. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$.
25. $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$.
26. $(x+y)^2 + x + y$.
27. $x^2 - y^2 + x - y$.
28. $x - xy + (1-y)^2$.
29. $9(a+b) - (a^3 + b^3)$.
30. $x^4 + x^3 + x + 1$.
31. $(a+1)^4 + (a+1)^2(b-1)^2 + (b-1)^4$.

32. $(ac-bd)^2 - (bc-ad)^2$. 33. $125x^6 - 64y^3$.
34. $81x^4 - 16y^4$. 35. $(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3$.
36. $12a^2b^3 - 30a^3b^2 + 18ab^4 - 24a^4b$.
37. $3(x-y)^2(x+y) - 3(x+y)^2(x-y)$.
38. $15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 105a^2x^4 - 75a^2x^5$.
39. $x^{m+n}y^m - x^{2n}y^{m+n} - x^ny^{2m}$.
40. $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2(ax - by)$.
41. $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$.
42. $x^{5m} - 9x^{3n}y^{4n}$.
43. $a^3b^3 + 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 + x^3y^3$.
44. $3a^2x^3y + 6a^2x^2y^2 + 3a^2xy^3 - 3a^2xyz^2$.
45. $36a^2x^5y^3 - 25a^3x^4y^2z + 4a^4x^3yz^2$.
46. $4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7$.
47. $(x-y)(x^2-z^2) - (x-z)(x^2-y^2)$.
48. $(a-b)^3 + 3(a+b)(a-b)^2 + 3(a+b)^2(a-b) + (a+b)^3$.

習題一〇二

應用分解因數的法則, 求下列各二式的積:—

1. $(a^2 + a^4 + a^6)(a^2 - 1)$.
2. $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$.
3. $(x^2 + 2xy + 4y^2)(x^2 - 2xy + 4y^2)$.
4. $(a^4 + a^3b + a^2b^2)(a - b)$.

-
-
5. $(a^2 - b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)$.
6. $(1 + 2a + 3b + 4c)(1 + 2a - 3b - 4c)$.
7. $\{(a + c) + (b - d)\} \{(a - c) + (b + d)\}$.
8. $\{x^2 + x(a + b) + ab\} \{x^2 - x(a + b) + ab\}$.
9. $(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.

第十四章

最高公因數和最低公倍數

137. 因數,公因數,倍數,公倍數這些名詞的意義和算術中說過的完全相同.在算術中,一個數的因數一定不比原數大,例如 35 的因數爲 1, 5, 7, 35 等;而牠的倍數一定不比牠小,如 35 的倍數爲 35, 70, 105 等.但在代數上,一個式子的因數只有次數不比原來的高,牠的倍數的次數不比原來的低;至於數值的大小卻不一定;所以在代數中,和最大公約數以及最小公倍數相當的數要稱爲‘最高公因數’和‘最低公倍數’.

[例題] xy , x^2y 是 x^3y 的因數嗎?再回答下面的問題.

- (i) 各式的次數如何?哪一個的最高?
- (ii) 若 $x=1$, $y=2$, 哪一個式子的值最大?
- (iii) 若 $x=2$, $y=1$, 哪一個式子的值最大?
- (iv) 若 $x=-2$, $y=1$, 哪一個式子的值最大?
- (v) 若 $x=\frac{1}{2}$, $y=8$, 哪一個式子的值最大?

〔例題〕 x^5 是 x^3, x^2 的倍數嗎？再回答下面的問題。

(i) 各式的次數如何？哪一個的最低？

(ii) $x=1, 2, -1, \frac{1}{2}$ 時，各式的值怎樣？最小的是哪一個？

138. 最高公因數就是幾個式子所公有的次數最高的因數。

如 $a^2x^3y^4, a^3x^2y^3$ 的公因數有 $a, a^2, x, x^2, y, y^2, y^3, ax, ay, xy, axy, ax^2y, a^2x^2y, a^2x^2y^2, a^2x^2y^3 \dots$ 等，其中一次，二次，二次，四次，五次，六次，七次的都有，以七次為最高，所以 $a^2x^2y^3$ 就是牠們的‘最高公因數’。

最低公倍數就是幾個式子所公有的次數最低的倍數。

如 $3xy^2, 5x^2y$ 的公倍數有 $15x^2y^2, 15x^3y^2, 15x^2y^3 \dots$ 等，其中 $15x^2y^2$ 的次數只有四次，是最低的，所以就是 $3xy^2$ 和 $5x^2y$ 的‘最低公倍數’。

139. 求最高公因數和最低公倍數的法則和算術中求最大公約數及最小公倍數的完全相同，也是分兩種。

〔例題〕 求 $9a^2bc, 12ab^2c, 8abc^2$ 的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ *。

* $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 就是最高公因數和最低公倍數的英文名詞 *Highest Common Factor* 和 *Lowest Common Multiple* 的略寫。

$$\therefore 9a^2bc \equiv 3^2 \cdot a^2bc, 12ab^2c \equiv 2^2 \cdot 3 \cdot ab^2c, 8abc^2 \equiv 2^3 \cdot abc^2.$$

$$\therefore H.C.F. \equiv abc,$$

$$\therefore L.C.M. \equiv 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2c^2 = 72a^2b^2c^2.$$

〔例題〕 求 $4(x^2-4y^2)$, $6(x^2+xy-2y^2)$, $9(x^2-xy-2y^2)$ 的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$

$$\therefore 4(x^2-4y^2) \equiv 2^2(x+2y)(x-2y),$$

$$6(x^2+xy-2y^2) \equiv 2 \cdot 3(x+2y)(x-y),$$

$$9(x^2-xy-2y^2) \equiv 3^2(x-2y)(x+y).$$

$$\therefore H.C.F. \equiv 1,$$

$$L.C.M. \equiv 2^2 \cdot 3^2(x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)$$

$$\equiv 36(x^2-4y^2)(x^2-y^2)$$

$$\equiv 36(x^4-5x^2y^2+4y^4),$$

通常 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 都留著因數相乘的形式, 無須展開.

習題一〇三

求下列各式的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ —

1. $4ab^2c^3$, $3a^4c^2$, $12ab^4c$, $9a^2b^3c$.

2. $20p^4q^2$, $15q^4r^2$, $5r^4p^2$. 3. $16x^5y^4$, $12x^3y^2z^4$, $24y^4z^5$.

4. a^2-ab , $(a-b)^2$. 5. x^2-y^2 , x^4-y^4 .

6. $a^2-3ab+2b^2$, $a^2+2ab-8b^2$.

7. x^4-9x^2 , x^3-5x^2+6x . 8. x^2-x-6 , x^2-2x-3 .