




经典数学系列



神奇的 几何世界

齐浩然 编著



金盾出版社

经典数学系列

神奇的 几何世界

齐浩然 编著

 金盾出版社

内 容 提 要

本书不仅是为爱好数学的人而写，也是为还没有发现数学上许多引人入胜的读者写的。读者在学校中都学过几何学，但并未注意到在我们身边常见的各类事物与几何的关系，也鲜有把学到的几何学知识应用到实际生活中去，在生活中间遇到困难的时候也想不到使用学过的几何学知识。阅读本书，将会提高你学习运用几何学的兴趣。

图书在版编目 (CIP) 数据

神奇的几何世界 / 齐浩然编著. —北京: 金盾出版社, 2015. 5
(经典数学系列)
ISBN 978-7-5186-0053-3

I. ①神… II. ①齐… III. ①几何—青少年读物 IV. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 021859 号

金盾出版社出版、总发行

北京市太平路 5 号 (地铁万寿路站往南)
邮政编码: 100036 电话: 68214039 83219215

传真: 68276683 网址: www.jdcbs.cn

北京市业和印务有限公司印刷、装订
各地新华书店经销

开本: 700 × 1000 1/16 印张: 10.75 字数: 200千字

2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1 ~ 10 000 册 定价: 26.80 元

(凡购买金盾出版社的图书, 如有缺页、
倒页、脱页者, 本社发行部负责调换)



contents

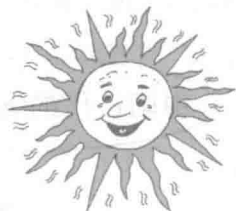
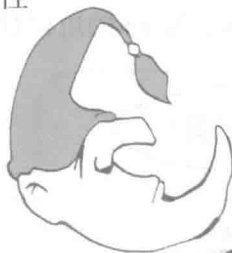
走进奇妙的几何世界·····	1
“几何之父”欧几里得·····	9
毕达哥拉斯的几何情怀·····	16
勾股定理·····	21
神奇的七巧板·····	30
独树一帜的五角星·····	37
庄严的国旗·····	45
奇形的麦田怪圈·····	57
蚂蚁识途的奥秘·····	66
全新的出租车几何学·····	70
最美的黄金分割线·····	74
不规则的地球形状·····	80
独特外观的金字塔·····	84
不可思议的建筑·····	89
视角的不同·····	94
海洋当中的波浪·····	97

蜗牛家族·····	101
千奇百怪的漩涡·····	105
反光镜的秘密·····	109
神奇的彩虹膜·····	113
生活当中的闪电·····	115
行驶中的帆船·····	122
基本的台球打法·····	127
漂亮的玫瑰·····	132
神奇的蚊香·····	137
旋转餐厅·····	143
科学前端的 3D 电影·····	146
闵可夫斯基·····	155
分形几何·····	159
生活当中的摆线·····	164

走进奇妙的几何世界

人们很早的时候就从自然界接触到各种几何形状：太阳是圆的，月亮有时候是镰刀形的，树木长得笔直也有弯曲的……紧跟着是人们模仿制造出了各种各样的几何形状：圆形的、方形的、立体的等，这些几何形状让人拍案叫绝，也成为了建立几何抽象概念的基础。

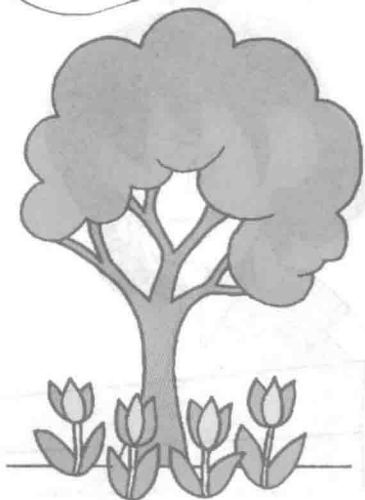
几何，就是研究空间结构及性质的一门学科。它是数学中最基本的研究内容之一，与分析、代数等具有同样重要的地位，并且关系极为密切。产生于古埃及。



几何名称的由来

“几何”这一名词最早出现于希腊，由希腊文“土地”和“测量”合成，意思是“测地术”。实际上希腊人所称的“几何”是指数学，对测量土地的科学，希腊人用了“测地术”的名称。

古希腊学者认为，几何学原是由埃及人开创的，由于尼罗河泛滥，



常把埃及人的土地界线冲掉，于是他们每年要做一次土地测量，重新划分界线。埃及人在实践中发现，画一个边长比例为3、4、5的三角形，与长度为5的边相对的角是直角，并且利用这个方法在地面上画出了直角。这样，埃及人逐渐形成一种专门的测地技术，随后这种技术传到希腊，逐步演变成现在狭义的几何学。



后来，巴比伦人也知道了这个方法，并且发现，在三条边长的比例为5、12、13的三角形中，与长度13的边相对的角是直角。

中国古代的画圆工具？



公元前三百年左右，古希腊数学家欧几里得将公元前七世纪以来希腊几何积累起来的既丰富又纷纭的庞杂结果整理在一个严密统一的体系中，从原始公理开始，列出5条公理，通过逻辑推理，演绎出一系列定理和推论，从而建立了被称为欧几里得几何学的第一个公理化数学体系，写成了巨著《几何原本》。

中国古代的几何学是独立发展的，对几何学的研究有悠久的历史，从甲骨文中发现，早在公元前13、14世纪，中国已有“规”

“矩”等专门工具。《周髀算经》和《九章算术》书中，对图形面积的计算已有记载，《墨经》中已给一些几何概念明确了定义。刘徽、祖冲之父子对几何学也都有重大贡献。中文名词“几何”是1607年徐光启在意大利传教士利玛窦协助下，翻译《几何原本》前6卷时首先提出的。这里说的几何不是狭义地指“多少”的意思，而是泛指度量以及包括与度量有关的内容。



当今，几何已形成结构严密的科学体系，成为数学中的一个重要分支，是训练逻辑思维能力与空间想象能力最有效的学科之一。

“几何”这个词在汉语里是“多少”的意思，但在数学里“几何”的涵义就完全不同了。“几何”这个词的词义来源于希腊文，原意是土地测量，或叫测地术。

几何学和算术一样产生于实践，也可以说几何产生的历史和算术是相似的。在远古时代，人们在实践中积累了十分丰富的各种平面、直线、方、圆、长、短、宽、窄、厚、薄等概念，并且逐步认识了这些概念之间的位置关系跟数量关系之间的联系，后来这些就成了几何学的基本概念。

正是生产实践的需要，原始的几何概念便逐步形成了比较粗浅的几何知识。虽然这些知识是零散的，而且大多数是经验性的，但是几何学就是建立在这些零散、经验性的、粗浅的几何知识之上的。

几何学是数学中最古老的分支之一，也是在数学这个领域里最基础的分支之一。古代中国、古巴比伦、古埃及、古印度、古希腊都是几何学的重要发源地。

几何的发展

国外

最早记载可以追溯到古埃及、古印度、古巴比伦，其年代大约始于公元前 3000 年。早期的几何学是关于长度，角度，面积和体积的经验原理，被用于满足在测绘，建筑，天文，和各种工艺制作中的实际需要。埃及和巴比伦人都在毕达哥拉斯之前 1500 年就知道了毕达哥拉斯定理（勾股定理）；埃及人有方形棱锥的锥台（截头金字塔形）体积正确公式；巴比伦有一个三角函数表。

中国

中国文明和其对应时期的文明发达程度相当，因此它可能也有同样发达的数学，但是没有那个时代的遗迹可以使我們确认这一点。也许这是由于中国早期部分对于原始纸的使用，而不是用陶土或者石刻来记录他们的成就。

几何学的各分支

几何学发展历史悠长，内容丰富，它和代数、分析、数论等关系极其密切。几何思想是数学中最重要的一类思想。目前的数学各分支发展都几何化趋向，即用几何观点及思想方法去探讨各数学理论。



平面几何

最早的几何学当属平面几何。平面几何就是研究平面上的直线和二次曲线（即圆锥曲线，就是椭圆、双曲线和抛物线）的几何结构和度量性质（面积、长度、角度）。平面几何采用了公理化方法，在数学思想史上具有重要的意义。

平面几何的内容也很自然地过渡到了三维空间的立体几何。为了计算体积和面积问题，人们实际上已经开始涉及微积分的最初概念了。

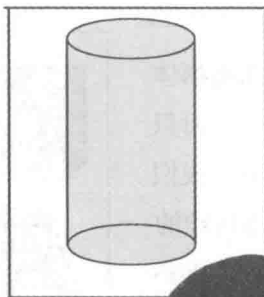
笛卡尔引进坐标系后，代数与几何的关系变得明朗，且日益紧密起来，这就促使解析几何的产生。解析几何是由笛卡尔、费马分别独立创建的，这又是一次具有里程碑意义的事件。从解析几何的观点出发，几何图形的性质可以归结为方程的分析性质和代数性质。

几何图形的分类问题（比如把圆锥曲线分为三类），也就转化为方程的代数特征分类问题，即寻找代数不变量的问题。

立体几何

立体几何归结为三维空间解析几何的研究范畴，从而研究二次曲面（如球面、椭球面、锥面、双曲面、鞍面）的几何分类问题，归结为研究代数学中二次型的不变量问题。

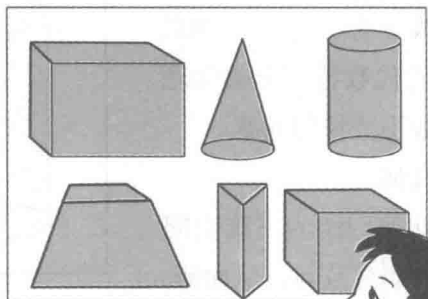
总体上说，上述的几何都是在欧氏空间的几何结构——即平坦的空间结构——背景下考察，而没有真正关注弯曲空间下的几何结构。欧几里得几何公理本质上是描述平坦空间的几何特性，特别是第五公设引



起了人们对其正确性的疑虑。由此人们开始关注其弯曲空间的几何，即“非欧几何”。“非欧几何”中包括了最经典的几类几何学课题，比如“球面几何”“罗氏几何”等。另一方面，为了把无穷远的那些虚无缥缈的点也引入到观察范围内，人们开始考虑射影几何。

几何图形

总的来说这些早期的非欧几何学，是研究非度量的性质，即和度量关系不大，而只关注几何对象的位置问题，比如平行、相交等。这几类几何学所研究的空间背景都是弯曲的空间，为了引入弯曲空间上的度量（长度、面积等），人们就需要引进微积分的方法去局部分析空间弯曲的性质，于是微分几何应运而生。研究曲线和曲面的微分几何称为古典微分几何，但古典微分几何讨论的对象必须事先嵌入到欧氏空间里，才定义各种几何概念等（比如切线、曲率）。一个几何概念如果和几何物体所处的空间位置无关，而只和其本身的性态相关，我们就说它是内蕴的。用物理的语言来说，就是几何性质必须和参考系选取无关。



哪些几何概念是内蕴性质的？这是当时最重要的理论问题。高斯发现了曲面的曲率（即反映弯曲程度的量）竟然是内蕴的，尽管它的原始定义看上去和所处的大空间位置有关。这个重要发现就称为高斯绝妙定理。古典几何的另一个重要发现就是高斯·博纳特公式，它反映了曲率和弯曲空间里的三角形三角之和的关系。研究内蕴几何的学科首



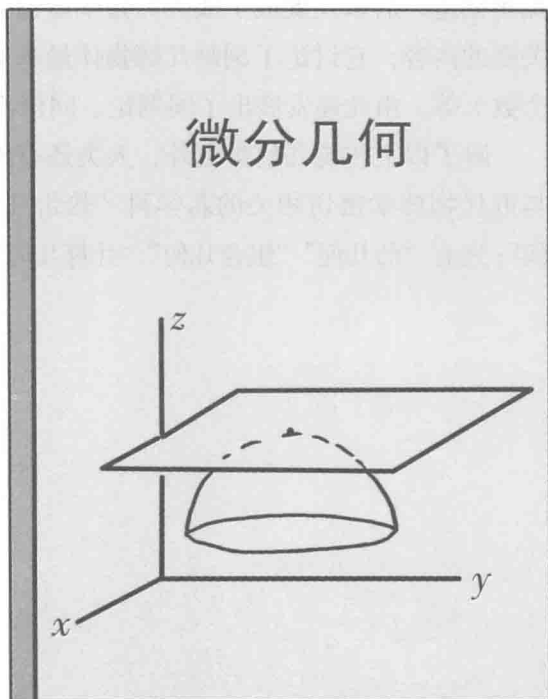
属黎曼几何，黎曼在一次著名的演讲中，创立了这门奠基性的理论。它首次强调了内蕴的思想，并将所有此前的几何学对象都归纳到更一般的范畴里，内蕴定义了诸如度量等的几何概念。这门几何理论打开了近代几何学的大门，具有里程碑的意义。它也成为了爱因斯坦广义相对论的数学基础。

从黎曼几何出发，微分几何进入了新的时代，几何对象扩展到了流形（一种弯曲的几何物体）上，这一概念由庞加

莱引入。由此发展出了诸如张量几何、黎曼曲面理论、复几何、霍奇理论、纤维丛理论、芬斯勒几何、莫尔斯理论、形变理论等。

从代数的角度看，几何学从传统的解析几何发展成了更一般的一门理论——代数几何。传统代数几何就是研究多项式方程组的零点集作为几何物体所具有的几何结构和性质，这种几何体叫作代数簇。解析几何所研究的直线、圆锥曲线、球面、锥面等都是其中的特例。稍微推广一些，就是代数曲线，特别是平面代数曲线，它相应于黎曼曲面。代数几何可以用交换代数的环和模的语言来描述，也可以从复几何、霍奇理论等分析的方法去探讨。代数几何的思想也被引入到数论中，从而促使了抽象代数几何的发展，比如算术代数几何。

和传统几何密切相关的一门重要学科，就是拓扑学，它也可以视为一种“柔性”的几何学，也是所有几何学的研究基础。这门学科的雏形由庞



加莱创造，后来发展成了成熟的数学理论。拓扑学思想是数学思想中极为关键的内容，它讨论了刻画几何物体最基本的一些特征，比如亏格（洞眼个数）等。由此还发展出了同调论、同伦论等基础性的理论。

除了以上传统几何学之外，人类还有闵可夫斯基建立的“数的几何”；与近代物理学密切相关的新学科“热带几何”；探讨维数理论的“分形几何”；还有“凸几何”“组合几何”“计算几何”“排列几何”“直观几何”等。

“几何之父”欧几里得

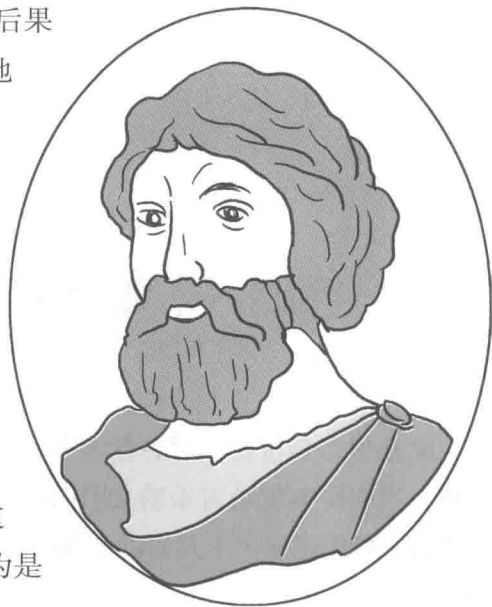
欧几里得是古希腊著名数学家、欧氏几何学的开创者。欧几里得生于雅典，当时雅典就是古希腊文明的中心。浓郁的文化气氛深深地感染了欧几里得，当他还是个十几岁的少年时，就迫不及待地想进入“柏拉图学园”学习。

有一天，一群年轻人来到位于雅典城郊外林荫中的“柏拉图学园”。

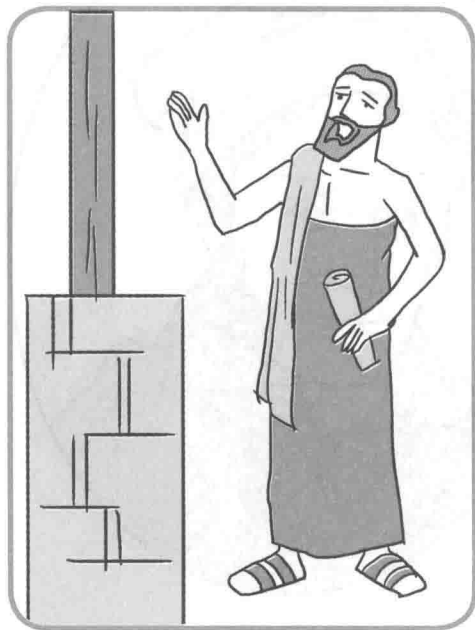
只见学园的大门紧闭着，门口挂着一块木牌，上面写着：“不懂几何者，不得入内！”这是当年柏拉图亲自立下的规矩，为的是让学生们知道他对数学的重视，然而却把前来求教的年轻人给闹糊涂了。有人在想，正是因为我不懂数学，才要来这儿求教的呀，如果懂了，还来这儿做什么？正在人们面面相觑，不知是退、是进的时候，欧几里得从人群中走了出来，只见他



整了整衣冠，看了看那块牌子，然后果断地推开了学园大门，头也没有回地走了进去。“柏拉图学园”是柏拉图在40岁时创办的一所以讲授数学为主要内容的学校。在学园里，师生之间的教学完全通过对话的形式进行，因此要求学生具有高度的抽象思维能力。数学，尤其是几何学，所涉及对象就是普遍而抽象的东西。它们同生活中的实物有关，但是又不来自于这些具体的事物，因此学习几何被认为是寻求真理最有效的途径。



柏拉图甚至声称：“上帝就是几何学家。”这一观点不仅成为学园的主导思想，而且也越来越多的希腊民众所接受。人们都逐渐地喜欢上了数



学，欧几里得也不例外。他在有幸进入学园之后，便全身心地沉潜在数学王国里。他潜心求索，以继承柏拉图的学术为奋斗目标，除此之外，他哪儿也不去，什么也不干，熬夜翻阅和研究柏拉图的所有著作和手稿，可以说，连柏拉图的亲传弟子也没有谁能像他那样熟悉柏拉图的学术思想、数学理论。经过对柏拉图思想的深入探究，他得出结论：图形是神绘制的，所有一切现象的逻辑规律都体现在图形之中。因此，对智慧训练，就应该

从图形为主要研究对象的几何学开始。他确实领悟到了柏拉图思想的要旨，并开始沿着柏拉图当年走过的道路，把几何学的研究作为自己的主要任务，并最终取得了世人敬仰的成就。

几何学说之大成

最早的几何学兴起于公元前7世纪的古埃及，后经古希腊等人传到古希腊的都城，又借毕达哥拉斯学派系统奠基。在欧几里得以前，人们已经积累了许多几何学的知识，然而在这些知识当中，存在一个很大的缺点和不足，就是缺乏系统性。大多数是片断、零碎的知识，公理与公理之间、证明与证明之间并没有什么很强的联系性，更不要说对公式和定理进行严格的逻辑论证和说明。因此，随着社会经济的繁荣和发展，特别是随着农林畜牧业的发展、土地开发和利用的增多，把这些几何学知识加以条理化和系统化，成为一整套可以自圆其说、前后贯通的知识体系，已经变得刻不容缓，成为科学进步的大势所趋。欧几里得通过早期对柏拉图数学思想，尤其是几何学理论系统周详的研究后，已敏锐地察觉到了几何学理论的发展趋势。他下定决心，要在有生之年完成这一工作。为了完成这一重任，欧几里得不辞辛苦，长途跋涉，从爱琴海边的雅典古城，来到尼罗河流域的埃及新埠——亚历山大城，为的就是在这座新兴的但文化蕴藏丰富的异域城市实现自己的初衷。在此地的无数个日日夜夜里，他一边收集以往的数学专著和手稿，向有关学者请教，一边试着著书立说，阐明自己对几何学的理解，哪怕是肤浅的理解。经过欧几里得忘我



的劳动，终于在公元前 300 年结出丰硕的果实，这就是几经易稿而最终定形的《几何原本》一书。这是一部传世之作，几何学正是有了它，不仅第一次实现了系统化、条理化，而且又孕育出一个全新的研究领域——欧几里得几何学，简称欧氏几何。

欧几里得是希腊亚历山大大大学的数学教授。著名的古希腊学者阿基米德，是他“学生的学生”，卡农是阿基米德的老师，而欧几里得是卡农的老师。欧几里得不仅是一位学识渊博的数学家，同时还是一位有“温和仁慈蔼然的长者”之称的教育家。在著书育人过程中，他始终没有忘记当年挂在“柏拉图学园”门口的那块警示牌，牢记着柏拉图学派自古承袭的严谨、求实的传统学风。他对待学生既和蔼又严格，自己却从来不宜扬有什么贡献。对于那些有志于穷尽数学奥秘的学生，他总是循循善诱地予以启发和教育，而对于那些急功近利、在学习上不肯刻苦钻研的人，则毫不客气地予以批评。

在柏拉图学派晚期导师普罗克洛斯的《几何学发展概要》中，就记载着这样一则故事，说的是数学在欧几里得的推动下，逐渐成为人们生活中的



的一个时髦话题（这与当今社会截然相反），以至于当时亚历山大国王托勒密一世也想赶这一时髦，学点儿几何学。虽然这位国王见多识广，但欧氏几何却令他学得很吃力。于是，他问欧几里得“学习几何学有没有什么捷径可走”，欧几里得笑道：“抱歉，陛下！学习数学和学习一切科学一样，是没有什么捷径可走的。学习数学，人人都得独立思考，就像种庄稼，不耕耘是不会有收获的。在这一方面，国王和普通老百姓是一样的。”