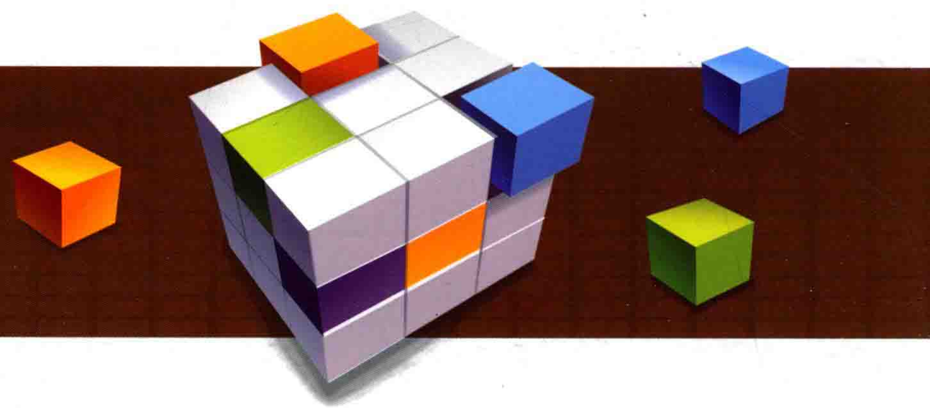
树和偏序理论的模型论研究

SHU HE PIANXU LILUN DE MOXINGLUN YANJIU

傅莺莺◎著

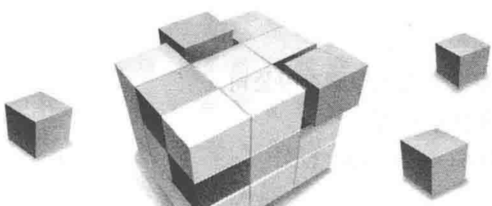


中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

树和偏序理论的
·模型论研究·

SHU HE PIANXU LILUN DE MOXINGLUN YANJIU

傅莺莺◎著



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE
北 京

图书在版编目（CIP）数据

树和偏序理论的模型论研究／傅莺莺著．
北京：中国经济出版社，2015.8
ISBN 978-7-5136-3910-1

Ⅰ.①树… Ⅱ.①傅… Ⅲ.①模型论—研究 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 182609 号

责任编辑　王　建　张　薇
责任审读　贺　静
责任印制　巢新强
封面设计　任燕飞装帧设计工作室

出版发行　中国经济出版社
印 刷 者　北京艾普海德印刷有限公司
经 销 者　各地新华书店
开　　本　880mm×1230mm　1/32
印　　张　6
字　　数　151 千字
版　　次　2015 年 8 月第 1 版
印　　次　2015 年 8 月第 1 次
定　　价　48.00 元
广告经营许可证　京西工商广字第 8179 号

中国经济出版社 **网址** www.economyph.com **社址** 北京市西城区百万庄北街 3 号 **邮编** 100037
本版图书如存在印装质量问题，请与本社发行中心联系调换（联系电话：010-68330607）

序

模型论是研究形式语言及其解释（模型）之间关系的理论，是数理逻辑的主要分支学科之一。模型论是一个年轻而活跃的学科，它自20世纪50年代起才开始系统发展，近年来发展较快。它与数理逻辑的其他分支学科如证明论、递归论、公理集合论等相互渗透，并且在经典数学领域如数论、代数、拓扑等，以及计算机科学中的计算复杂度理论与机器证明等方面有着独特的应用。

稳定性与单纯性理论是近年来模型论研究的热点。树和偏序结构是经典数学与计算机科学研究的重要对象，它们与理论的稳定性和单纯性有着密切联系。傅莺莺同志近年来对树和偏序结构展开了较为深入的研究，取得了一些成果，本书正是她在该方向上所做工作的总结。

模型论研究在我国方兴未艾，希望该书的出版能够使更多的研究人员把兴趣和精力投入到这个研究领域中来。

沈复兴

2015年7月于洛杉矶

前言

模型论是数理逻辑的四大分支之一，是研究形式语言及其解释（模型）之间相互关系的学科。它被应用于代数、拓扑、图论、分析等学科中，得到了不少令人欣喜的成果。传统上，模型论有两个主要研究方向：

（1）研究某个具体的数学模型，比如实数域，用模型论的方法得到有关模型及模型中可定义集合的一些新的结论；

（2）关注一些有共同性质的理论，证明与它们的模型相关的一些普遍性的模型论定理。

这两个研究方向在研究内容上似乎是完全相反的。但在过去的十几年间，模型论学者开始认识到这两个方向之间的紧密联系。传统的数学模型研究，比如群和域，为我们研究模型的分类问题提供了新的途径。而将在抽象的模型论研究中发展起来的想法应用到具体数学模型中，得到的结果同样很惊人。对于后者，最有说服力的例子当属 Hrushovski（1996）用抽象模型论中的方法证明了函数域中的 MordellLang 猜想。而稳定性理论和单纯性理论的发展恰是说明前者的很好例子。

近年来，单纯性理论已经作为一个独立的理论体系建立并蓬勃发展起来，推动着模型论在其他学科中的应用。简单来说，对于一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的理论 T，如果任意公式都不具有序性质，则称 T 是稳定的；如果任意公式都不具有树性质，则称 T 是单纯的。由此可以看出序和树在稳定性和单纯性理论

中扮演了重要角色。

在众多包含序关系的结构当中，线性序结构长期以来备受模型论学者的关注，并且得到了许多有意义的结果。例如，Erdos 等（1995）、Feferman 等（1959）及 Macintyre（1971）详细地研究了 Peano 代数、有序交换群、实闭域等的模型论性质。Pillay、Steinhorn（1986，1988）和 Knight 等（1986）仿照稳定理论中的极小、强极小概念，提出了线性序结构 o-极小的概念，并且给出了线性序群、线性序环等理论是o-极小理论等一系列结果。然而，由于偏序本身的复杂性，关于偏序结构的研究一直很少。直到最近几年，模型论学者才慢慢将目光转移到具有偏序模型的理论上。例如，Toffalori（1998）定义偏序结构的拟 o-极小、o-极小性质并且研究了一类特殊的格序结构，Newelski 等（2001）与 Wencel（2003）研究了具有布尔序的 o-极小结构的一些性质。但是，对一般偏序理论的研究至今还较少涉及，这正是本书考察有最小元的树形偏序结构的初衷。而带根节点的树结构与之有着密切联系，因此也被纳入我们的研究范围。

本书的研究以量词消去方法为基础，对于本书考察的树和偏序理论，我们深入地讨论了这些问题，并得到了量词消去的一系列判别法。全书共分为六章。第一章为预备知识，主要介绍一阶逻辑中与语言、模型、理论等内容相关的基本概念和结论。第二章主要介绍量词消去方法以及经典代数结构上的量词消去及其他相关的模型论研究结果。第三章运用理论的代数素模型和简单闭性质，简化了完全二叉树、完全无穷叉树以及完全稠密二叉偏序理论可量词消去的已有证明。其中完全二叉树、完全无穷叉树是带根节点的树的特例，完全稠密二叉偏序是有最小元的树形偏序的特例，因此本章的一些技巧和结果可以直接推广到一般的树与树形偏序理论。第四章考察了一般的带根节点的有向树、无向树理论的模型

论性质，给出了它们的基本语言和公理，得到两类理论在基本语言及其膨胀下的量词消去的分类定理，并以此为基础，讨论了理论的模型论性质，得到了其可数模型、范畴性方面的结果，对理论的稳定性、单纯性做出了判断。第五章考察了一般的有最小元的树形偏序理论的模型论性质，结构安排与第四章类似。第六章介绍了有待进一步研究的问题。

在本书的撰写过程中，得到了很多人的支持与帮助。感谢我的博士生导师沈复兴教授。我有幸自本科时代起一直聆听先生的教诲，先生严谨踏实的治学作风、开阔敏捷的思维方式、豁达开朗的生活态度和宽厚待人的品德都深深影响着我，使我受益匪浅。感谢北京工商大学研究生学习基地建设项目（190054280691026）、北京工商大学学科建设与研究生教育专项（2015XWYJS018）、北京工商大学青年教师科研启动基金（QNJJ 2014-27）的资助，以及理学院曹显兵教授的鼓励与支持。感谢理学院各位同人对我工作、生活上的关怀与帮助。感谢中国经济出版社王建编辑为本书出版付出的辛勤劳动。感谢我的家人，他们是我完成此书的最大动力。

由于本人水平有限，书中难免存在错误和疏漏之处，敬请同行与读者批评指正。

傅莺莺

2015年5月于北京工商大学

目录

第一章　一阶逻辑预备知识

本章中，我们将简要地介绍一些预备知识，包括一阶逻辑语言、模型与理论的基本概念，以及完全理论、稳定性与单纯性理论的相关性质. 这些概念和性质将在后续章节中经常出现.

本章中大部分的定义、定理和写法均出自沈复兴（1995).

1.1　一阶逻辑的语言

许多数学概念都无法用命题逻辑来描述. 例如，数学中函数 $F(x)$ 与大于关系 “$>$” 可以构造命题：“对任意 x，都有 $F(x)>0$”“存在 x，使得 $F(x)>0$” 等. 仅仅使用命题变元不能刻画这些命题，因此我们要用更复杂的形式化语言来描述数学结构，这就是一阶逻辑语言.

定义 1.1.1 称由以下三组符号构成的集合

$$\mathcal{L}=\Big\{\{R_i\}_{i\in I},\ \{F_j\}_{j\in J},\ \{c_k\}_{k\in K}\Big\}$$

（$\mathcal{L}$ 为英文中的 L）为**一阶逻辑形式语言**，简称**一阶语言**. 其中各组符号可以只有有限多个（含空组)，也可以是可数无限多个，甚至可能有不可数无限多个.

(1) R_i，$i\in I$：对每个关系符号 R_i，有某一确定的正整数

$n \geqslant 1$，称 R_i 为 n 元**关系符号**.

(2) F_j，$j \in J$：对每个函数符号 F_j，有某一确定的正整数 $m \geqslant 1$，称 F_j 为 m 元**函数符号**.

(3) c_k，$k \in K$：称为**个体常量符号**.

对一些常用的有限语言，我们仍用习惯方式来表示.

例 1.1.1 一阶语言的几个例子

(1) $\mathcal{L}_1 = \{\leqslant\}$：表示语言中只有一个二元关系符号"$\leqslant$"，即通常意义下的序关系"小于等于"；

(2) $\mathcal{L}_2 = \{\leqslant, +, \cdot, 0\}$：表示语言中除"$\leqslant$"外，还有二元函数符号"$+$"(加法)与"$\cdot$"(乘法)，以及个体常量符号 0；

(3) $\mathcal{L}_3 = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$：表示语言中没有关系符号，除"$+$"，"$\cdot$"外还有一个函数符号"$-$"(逆元)，另外还有个体常量符号 0 和 1. 显然 $\mathcal{L}_3$ 可以用来描述环的结构.

对于一阶逻辑形式语言 $\mathcal{L}$，我们总假设其中还有如下一些**逻辑符号**:

(1) **个体变元**: $v_0, v_1, \cdots, v_n, \cdots, n < \omega$；

(2) **连接符号**: $\rightarrow$ (蕴含)，$\neg$ (非)；

(3) **量词符号**: $\forall$ (任意一个)；

(4) **等号**: $=$；

(5) **括号**: (，).

逻辑符号是每个语言 $\mathcal{L}$ 中都有的符号，因而不计入 $\mathcal{L}$ 中. $\mathcal{L}$ 中的关系、函数和常量符号则统称**非逻辑符号**. 以 $|\mathcal{L}|$ 记 $\mathcal{L}$ 的非逻辑符号集的基数，以 $\|\mathcal{L}\|$ 记 $\mathcal{L}$ 的全体符号集的基数，

称 $\| \mathcal{L} \|$ 为语言 $\mathcal{L}$ 的**势**. 由于逻辑符号有可数无限多个，因此 $\| \mathcal{L} \| = \omega \cup |\mathcal{L}|$. 当 $\mathcal{L}$ 中非逻辑符号只有有限多个或者可数多个时，有 $|\mathcal{L}| \leqslant \omega$ 且 $\| \mathcal{L} \| = \omega$，此时称 $\mathcal{L}$ 为**可数语言**.

定义 1.1.2 两个一阶逻辑形式语言 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ 如果满足 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$，即 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}'$ 的子集，则称 $\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{L}'$ 的**归约**，或称 $\mathcal{L}'$ 是 $\mathcal{L}$ 的**膨胀**.

下面用递归的方式给出一阶语言中项、原子公式和公式的定义.

定义 1.1.3

(1) 称单个变元，或者单个常量符号是**项**;

(2) 如果 $t_1, \cdots, t_m$ 是项，F_j, $j \in J$ 是 $\mathcal{L}$ 的 m 元函数符号，也称 $F_j(t_1, \cdots, t_m)$ 是**项**.

定义 1.1.4

(1) 如果 t_1, t_2 是项，则称 $t_1 = t_2$ 是**原子公式**;

(2) 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，R_i, $i \in I$ 是 $\mathcal{L}$ 的 n 元关系符号，也称 $R_i(t_1, \cdots, t_n)$ 是**原子公式**.

定义 1.1.5

(1) 称原子公式是**公式**;

(2) 如果 ϕ, ψ 是公式，也称 $\phi \to \psi$, $\neg\phi$ 是**公式**;

(3) 如果 ϕ 是公式，x 是个体变元，也称 $\forall x\phi$ 是**公式**.

我们可以为语言 $\mathcal{L}$ 引入其他逻辑连接符号，例如，可以用 $\to$、$\neg$ 定义连接符号 $\wedge$、$\vee$ 与 $\leftrightarrow$（记号“:=”表示定义):

$$\phi \wedge \psi := \neg(\phi \to \neg\psi),$$

$$\phi \vee \psi := (\neg\phi) \to \psi,$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \ := \ (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi).$$

我们还可以把 $\exists$ 当作 $\neg$、$\forall$ 组成公式的简写，即定义

$$\exists x\psi \ := \ \neg\forall x(\neg\psi).$$

我们规定连接符号的运算优先级由高到低依次为: $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$ 与 $\leftrightarrow$，并且为了书写方便，我们习惯省略那些不会引起歧义的括号. 例如，约定用

$$\phi_1 \to \phi_2 \to \phi_3 \to \phi_4$$

代替

$$\phi_1 \to \big(\phi_2 \to (\phi_3 \to \phi_4)\big);$$

约定用 $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ 表示

$$\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \phi_3) \text{ 或者 } (\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3.$$

现在，为了在一阶语言 $\mathcal{L} = \{\leqslant,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$ 中描述数学命题“任何一个大于零的数都可以开方”，只需考察语言 $\mathcal{L}$ 中的公式

$$\phi := \forall v_1\Big(\neg v_1 \leqslant 0 \longrightarrow \exists v_2(v_1 = v_2 \cdot v_2)\Big).$$

下面给出公式中约束变元与自由变元以及句子的定义.

定义 1.1.6 如果一个公式中有 $\forall x\phi$ 或 $\exists y\psi$ 出现，则称 ϕ 为量词 $\forall x$ 的**辖域**，称 ψ 为量词 $\exists y$ 的**辖域**. 如果个体变元 x 出现在量词 $\forall x$ 或 $\exists x$ 的辖域内，则称此 x 为公式的**约束变元**，或称 x 在辖域内**约束出现**.

如果 x 不在量词 $\forall x$ 或 $\exists x$ 的辖域内，则称 x **自由出现**，或

称 x 为公式的**自由变元**.

以下列公式为例:

$$\phi := \forall v_1(v_1 + v_2 = 0) \longrightarrow \exists v_1 v_2(v_1 \cdot v_2 = 1),$$

其中 $\exists v_1 v_2$ 是 $\exists v_1 \exists v_2$ 的简写. 在公式 ϕ 中, v_1 的两处出现都是约束出现, 而前一个 v_2 是自由出现, 后一个 v_2 是约束出现. 因此 v_2 是 ϕ 的自由变元, 并且 v_1, v_2 又都在 ϕ 中有约束出现.

自由变元在公式中起着重要作用, 因此: 常用 $t(x_1,\cdots, x_n)$ 表示项 t, t 中所出现的变元都在 $x_1,\cdots, x_n$ 中 (注意, 并不要求 $x_1,\cdots, x_n$ 都一定在 t 中出现); 用 $\phi(x_1,\cdots, x_n)$ 表示公式 ϕ, ϕ 中所有的自由变元都在 $x_1,\cdots, x_n$ 中 (注意, 并不要求 $x_1,\cdots, x_n$ 都一定在 ϕ 中自由出现).

例 1.1.2 在语言 $\mathcal{L} = \{+, 1\}$ 中, 可以用 $t_1(v_1, v_2, v_3)$, $t_2(v_1, v_2, v_3)$, $t_3(v_1, v_2, v_3)$ 表示

$$t_1 := 1, \quad t_2 := v_1 + 1, \quad t_3 := v_1 + v_2 + v_3.$$

可以用 $\phi_1(v_1, v_2, v_3)$, $\phi_2(v_1, v_2, v_3)$, $\phi_3(v_1, v_2, v_3)$ 表示

$$\phi_1 := v_1 + 1 = v_2,$$

$$\phi_2 := \forall v_2(v_1 + v_2 = v_2 + v_1),$$

$$\phi_3 := \exists v_1(v_1 + v_2 = v_2 + v_1).$$

当然, 在无须特别指出哪些变元是公式 ϕ 中的自由变元时, 我们也简单地用 ϕ 表示任意一个公式, 或者用 $\phi(x)$ 表示其中含有自由变元 x (也可能还有别的自由变元).

定义 1.1.7 没有自由变元的公式称作**句子**.

不含变元的公式当然是句子，每个变元都约束出现的公式也是句子. 例如，

$$\forall v_1 v_2(v_1 + v_2 = v_2 + v_1)$$

是一个句子，$\neg(1+1=1)$ 也是句子. 一阶逻辑中句子起着极重要的作用. 事实上，每一公式都可以通过添加一组全称量词得到一个句子.

定义 1.1.8 设 $\phi(x)$ 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 的一个公式，x 是 ϕ 中自由变元，t 是 $\mathcal{L}$ 的一个项. 用 $\phi(x/t)$ 表示用 t 代换 ϕ 中所有自由出现的 x 所得的公式，如果 t 中每个变元在 $\phi(x/t)$ 中被代入后的出现都不受约束，则称**项 t 相对于 x 在公式 ϕ 中自由**.

例 1.1.3 在语言 $\mathcal{L} = \{+,\ \cdot,\ 1\}$ 中，设

$$\phi(v_1) \ := \ \forall v_2(v_1 + v_2 = v_2 + v_1) \wedge \forall v_1(v_1 \cdot v_1 = 1).$$

如果令 $t = v_3 \cdot v_1$，则

$$\phi(v_1/t) \ := \ \forall v_2(v_3 \cdot v_1 + v_2 = v_2 + v_3 \cdot v_1) \wedge \forall v_1(v_1 \cdot v_1 = 1),$$

于是项 t 相对于 v_1 在公式中 $\phi(v_1)$ 是自由的.

而若令 $t = v_2$，则

$$\phi(v_1/t) \ := \ \forall v_2(v_2 + v_2 = v_2 + v_2) \wedge \forall v_1(v_1 \cdot v_1 = 1).$$

于是项 t 相对于 v_1 在公式中 $\phi(v_1)$ 不是自由的.

1.2 一阶逻辑的推演（语法）

设$\mathcal{L}$是一阶逻辑形式语言，$\mathcal{L}$的公理系统由下列三组公理构成：

（1）**命题公理.** 设ϕ，ψ，τ是$\mathcal{L}$的任意公式，则以下三类公式都是公理：

(a) $\phi \to \psi \to \phi$；

(b) $(\phi \to \psi \to \tau) \longrightarrow (\phi \to \psi) \longrightarrow \phi \to \tau$；

(c) $(\neg\phi \to \neg\psi) \longrightarrow (\psi \to \phi)$.

（2）**量词公理.** 设ϕ，ψ是$\mathcal{L}$的任意公式，x是$\mathcal{L}$的任意个体变元，则以下两类公式都是公理：

(d) $\forall x(\phi \to \psi) \longrightarrow \phi \longrightarrow \forall x\psi$，　x不在ϕ中自由出现；

(e) $\forall x\phi(x) \to \phi(x/t)$，　t相对于x在公式ϕ中自由.

（3）**等词公理.** 设t，t_1，t_2，$\cdots$是$\mathcal{L}$的项，R是$\mathcal{L}$的n元关系符号，F是$\mathcal{L}$的m元函数符号，则以下三类公式都是公理：

(f) $t = t$；

(g) $t_1 = t_{n+1} \to \cdots \to t_n = t_{2n}$

$$\to R(t_1, \cdots, t_n) \to R(t_{n+1}, \cdots, t_{2n});$$

(h) $t_1 = t_{m+1} \to \cdots \to t_m = t_{2m}$

$$\to F(t_1, \cdots, t_m) = F(t_{m+1}, \cdots, t_{2m}).$$

$\mathcal{L}$的推演规则由两个法则构成：

（1）**分离法则** MP：由ϕ和$\phi \to \psi$可得ψ；

（2）**概括法则** G（也称**推广法则**）：由 ϕ 可得 $\forall\phi$.

定义 1.2.1 设 ϕ 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 的一个公式，如果存在 $\mathcal{L}$ 中一个有限长的公式序列 $\phi_1,\cdots,\phi_n$，其中 $\phi_n=\phi$，满足：对每个 $i\leqslant n$，ϕ_i 或者是一条公理，或者是由该序列中 ϕ_i 之前的公式经推演规则得到的公式，则称 ϕ 是 $\mathcal{L}$ 的一个**定理**，记作 $\vdash\phi$. 序列 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 称作从公理出发到 ϕ 的一个**证明**，简称 ϕ 的一个证明.

显然每条公理都是一个定理. 并且，由于命题逻辑的公理都是一阶逻辑的公理，命题逻辑的推演规则都是一阶逻辑的推演规则，因此将命题逻辑定理中的命题符号代换成一阶逻辑公式都将得到一阶逻辑的定理.

定义 1.2.2 设 ϕ 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 的一个公式，Γ 是 $\mathcal{L}$ 的一个公式集，如果存在 $\mathcal{L}$ 中一个有限长的公式序列 $\phi_1,\cdots,\phi_n$，其中 $\phi_n=\phi$，满足：对每个 $i\leqslant n$，ϕ_i 或者是一条公理，或者是 Γ 中的一个公式，或者是由该序列中 ϕ_i 之前的公式经推演规则得到的公式，则称 ϕ 是 Γ 的一个**推论**，记作 $\Gamma\vdash\phi$. 序列 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ 称作从 Γ 出发到 ϕ 的一个证明.

定理 1.2.1 一阶逻辑演绎定理

设 Γ 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 的一个公式集，ϕ，ψ 是 $\mathcal{L}$ 的公式，如果

$$\Gamma\cup\{\phi\}\vdash\psi \text{（简写作}\Gamma,\ \phi\vdash\psi\text{）},$$

并且在从 $\Gamma\cup\{\phi\}$ 出发到 ψ 的证明中没有对 ϕ 的自由变元使用推广法则，则 $\Gamma\vdash\phi\to\psi$.

为了使推演更方便，我们常用到下面的结论.

定理 1.2.2 设 Γ 是 $\mathcal{L}$ 的公式集，ϕ 是 $\mathcal{L}$ 的公式.