普通高等学校“十二五”规划教材

# 线性代数

XIANXINGDAISHU

黄 璇 吴高翔 罗贤强 刘忠东 编

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

# 线性代数

黄　璇　吴高翔　罗贤强　刘忠东　编

重庆大学出版社

## 内容简介

本书根据理工科和经管类专业线性代数课程的基本要求编写而成.全书共六章,即行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵、二次型.各章均配有一定数量的习题,书末附有习题答案,供学生参考使用.

本书可作为高等院校非数学类各专业线性代数课程的教材,也可作为工程技术人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/黄璇等编.—重庆:重庆大学出版社,2015.5
ISBN 978-7-5624-8923-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①黄… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 052301 号

**线性代数**

黄 璇 吴高翔 罗贤强 刘忠东 编
策划编辑:杨粮菊
责任编辑:谭 敏 曾春燕 版式设计:杨粮菊
责任校对:关德强 责任印制:赵 晟

重庆大学出版社出版发行
出版人:邓晓益
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编:401331
电话:(023) 88617190 88617185(中小学)
传真:(023) 88617186 88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆联谊印务有限公司印刷

*

开本:720×960 1/16 印张:10.5 字数:155 千
2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月第 1 次印刷
印数:1—3 000
ISBN 978-7-5624-8923-8 定价:22.00 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

**版权所有,请勿擅自翻印和用本书**
**制作各类出版物及配套用书,违者必究**

# 前言

线性代数是高等院校理工科和经管类专业的一门重要基础课程，其理论和方法广泛应用于工程技术、化学生物、经济管理等各个领域，是解决许多实际问题的有力工具.

我们根据教育部21世纪大学数学（理工类和经管类）线性代数课程的基本要求，并参照教育部考试中心制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，在吸收同类教材优点的基础上，结合编者多年课堂教学实践经验，编写了这本教材. 本书的内容编写，符合普通高等院校的办学定位和人才培养目标.

本书具有以下两个特点：

1. 以线性方程组为主线，以矩阵和向量为工具，阐述线性代数课程中的基本概念、基本理论和方法.

2. 在保持内容的系统性、严谨性的同时，适当简化或略去了某些性质和定理的证明. 行文通俗易懂，简洁清晰，例题丰富，便于学生自学.

由于编者水平有限，书中不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2015年1月

# 目录





此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

# 第 1 章
# 行列式

在解决有关工程和经济等实际应用问题时，常需要求解方程组. 而线性方程组是这些方程组中最简单和最常见的类型. 在中学的代数课程中，学习过二元一次方程组和三元一次方程组. 在线性代数中，主要讨论一般的 $n$ 元一次方程组，即 $n$ 元线性方程组. 在研究线性方程组及其相关知识理论时，最重要的两个工具就是行列式和矩阵. 本章主要介绍行列式的定义、性质及其计算方法.

## 1.1 二阶与三阶行列式

### 1.1.1 二阶行列式

求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，分别消去未知数 $x_1$，$x_2$，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \end{cases} \tag{1.2}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组(1.1)有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\tag{1.3}$$

观察式(1.3)的结构,发现式(1.3)的两个分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,它是由方程组(1.1)的 4 个系数确定.把这 4 个系数按它们在方程组(1.1)中的位置,排成二行二列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\tag{1.4}$$

则表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.4)所确定的二阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\tag{1.5}$$

其中,数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.5)的元素.横排称为行,竖排称为列.元素 $a_{ij}$ 中第一个下标 $i$ 称为行标,第二个下标 $j$ 称为列标,分别表示元素 $a_{ij}$ 在行列式(1.5)中所处的行数和列数.例如,元素 $a_{21}$ 在行列式(1.5)中位于第二行第一列.

二阶行列式的定义可以用对角线法则来表示:参看图 1.1,行列式的主对角线(从左上角到右下角的实连线)上的两元素 $a_{11}$,$a_{22}$ 的乘积,减去行列式副对角线(从右上角到左下角的虚连线)上两元素 $a_{12}$,$a_{21}$ 的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**图** 1.1

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

利用二阶行列式的概念,式(1.3)中分子部分也可用二阶行列式表示,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

其中，分母 $D$ 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，而 $D_1, D_2$ 分别是用方程组(1.1)右端的常数列来代替 $D$ 中的第一列和第二列所得的二阶行列式.

**例 1.1**　计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**解**　按对角线法则，有

$$D = 2 \times 3 - 1 \times (-1) = 7.$$

**例 1.2**　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

**解**　由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-14}{1} = -14,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{1} = 9.$$

### 1.1.2　三阶行列式

类似地，在用消元法求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.6}$$

时，可引入三阶行列式的定义：9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.7}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array} \tag{1.8}$$

(1.8)式称为由式(1.7)所确定的三阶行列式.

从上述定义可知,三阶行列式是 6 项的代数和,每项都是由不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号所得,其规律可以用图 1.2 所示的对角线法则描述:图中有三条实线看成平行于主对角线的连线,三条虚线看成平行于副对角线的连线,实线上三元素的乘积冠以正号,虚线上三元素的乘积冠以负号.

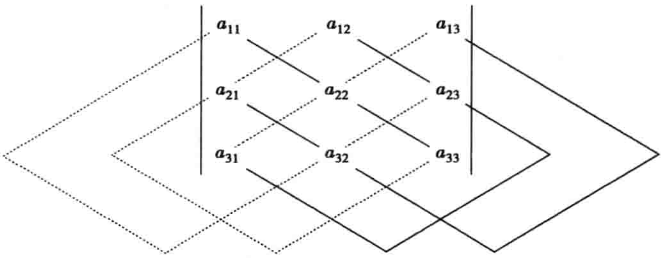


**图** 1.2

**例** 1.3 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

**解** 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= 1\times4\times5+2\times(-3)\times(-2)+0\times3\times1-1\times(-3)\times1-2\times3\times5-0\times4\times(-2) \\ &= 20+12+0+3-30-0=2. \end{aligned}$$

需指出,对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,四阶及以上的行列式不再具有对角线法则.将在 1.2 节中根据二阶、三阶行列式的规律引出 $n$ 阶行列式的定义.

## 1.2 $n$阶行列式

在1.1节,介绍了二阶、三阶行列式的定义.在1.2节中,将根据二阶、三阶行列式的规律引出$n$阶行列式的定义.首先,介绍全排列的相关知识.

### 1.2.1 全排列与逆序数

把$n$个不同的元素排成一列,称为这$n$个元素的全排列(也简称排列).$n$个不同的元素所有可能的排列种数,称为全排列数,通常用$A_n^n$表示.下面来给出$A_n^n$的计算公式.

从$n$个不同元素中任取一个放在第一个位置上,有$n$种取法;从剩下的$n-1$个元素中任取一个放在第二个位置上,有$n-1$种取法;这样递推下去,直到最后只剩下一个元素放在第$n$个位置上,只有1种取法.于是

$$A_n^n = n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1 = n!. \tag{1.9}$$

因此,$n$个不同元素的全排列数为$A_n^n=n!$.

例如,用1,2,3三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

这个问题相当于把3个数字分别放在百位、十位与个位上,有几种不同的放法?由式(1.9)可知,共有$A_3^3=3!=6$种放法.事实上,百位上可以从1,2,3三个数字中任选一个,所以有3种放法;十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有两种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有1种放法.因此,共有$3\times2\times1=6$种放法.

这6个不同的三位数分别是:

$$123,132,213,231,312,321.$$

对于$n$个不同的元素,先规定各元素之间有一个标准次序(例如$n$个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这$n$个元素的任一排列中,当某两个元素的排列次序与标准次序不同时,就称为有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一般地,$n$个自然数$1,2,\cdots,n$的一个任意排列记作$p_1p_2\cdots p_n$,如果比$p_i$大的且排在$p_i$前面的元素有$\tau\tau_i$个,就说元素$p_i$的逆序数是$\tau_i$.全体元素的逆序数之和



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\tau = \tau_1 + \tau\tau_2 + \cdots + \tau_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$$

即是这个排列的逆序数.

**例 1.4** 求排列 43512 的逆序数.

**解** 在排列 43512 中,4 排在首位,逆序数为 0;3 的前面比 3 大的数有一个"4",故逆序数为 1;5 是最大的数,逆序数为 0;1 的前面比 1 大的数有 3 个,即"4,3,5",故逆序数为 3;2 的前面比 2 大的数有 3 个,为"4,3,5",故逆序数为 3;于是这个排列的逆序数为

$$\tau = 0+1+0+3+3=7.$$

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.如例 1.4 中的排列 43512 就是一个奇排列.

### 1.2.2 对换

为研究 $n$ 阶行列式的需要,我们再来讨论对换的概念以及其与排列奇偶性的关系.

将一个排列中任意两个元素的位置对调,其余元素不动,而得到一个新排列的过程称为对换.若对换的是相邻的两个元素,则称为相邻对换.

排列 43512 可由排列 34512 进行一次相邻对换得到,也可由排列 13542 进行一次不相邻的对换得到.可知排列 34512 和排列 13542 都是偶排列,而排列 43512 是一个奇排列,可见进行一次对换(无论相邻与否)将改变排列的奇偶性.可得出下面的基本事实:

**定理 1** 一个排列进行一次对换,排列改变奇偶性一次.

**证** 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$,对换元素 $a,b$,变为 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$.显然,$a_1 \cdots a_l$;$b_1 \cdots b_m$ 这些元素的逆序数经过 $a,b$ 对换后并不改变,改变的只是元素 $a,b$ 的逆序数,当 $a<b$ 时,经对换后 $a$ 的逆序数增加 1,而 $b$ 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经对换后 $a$ 的逆序数不变,而 $b$ 的逆序数减少 1.因此,不论是增加 1 还是减少 1,排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$,将元素 $b$ 作 $m$ 次相邻对换,变成排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$,再将元素 $a$ 作 $m+1$ 次相邻对换,变成排列 $a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots$

$b_m ac_1 \cdots c_n$. 于是可知排列 $a_1 \cdots a_l ab_1 \cdots b_m bc_1 \cdots c_n$ 经 $2m+1$ 次相邻对换变成排列 $a_1 \cdots a_l bb_1 \cdots b_m ac_1 \cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反.

**推论**　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

**证**　由定理 1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此，可知推论成立.

### 1.2.3　*n* 阶行列式

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，先来回顾一下三阶行列式的结构. 三阶行列式的定义为式(1.8)，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

容易看出：

(i)式(1.8)右边的每一项都恰是位于不同行、不同列的 3 个元素的乘积. 因此，式(1.8)右边的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(行标)排成标准次序 123，而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 这 3 个数的一个全排列，这样的排列共有 $3!=6$ 种，对应式(1.8)右边共有 $3!=6$ 项.

(ii)各项的正负号与列标排列的对应情况：

取正号的三项列标排列是：123，231，312；

取负号的三项列标排列是：132，213，321.

易知前 3 个排列都是偶排列，而后 3 个排列都是奇排列. 因此各项所取的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau}$，其中，$\tau$ 为列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数.

于是，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中，$\tau$ 为列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1,2,3 这 3 个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 对应的项求和.

以此类推，可把行列式推广到 $n$ 阶的情形.

**定义 1** 设有 $n^2$ 个数，排成 $n$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 $n$ 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并冠以符号 $(-1)^\tau$，得到的项形如

$$(-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.10}$$

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列，$\tau$ 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如式(1.10)的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 $n$ 阶行列式，记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

也简记作 $\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}$ 称为行列式 $D$ 的 $(i,j)$ 元，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

按此定义的二阶、三阶行列式，与 1.1 节中所用的对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 特别当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

**例 1.5** 计算下三角行列式：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

其中，未写出的元素全为零(以后均如此).

**解** 在这个行列式中，当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 $D$ 中可能不为 0 的元素 $a_{ip_i}$，其下标应满足 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1,p_2\leqslant 2,\cdots,p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 1 2 $\cdots n$，所以 $D$ 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^\tau a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^\tau=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即 $D$ 等于主对角线上元素的乘积.

同理可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为三角行列式特例的对角行列式(除对角线上的元素外，其他元素都为 0，在行列式中未写出来)也有，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**例 1.6** 证明行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

**证** 令 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^\tau a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^\tau\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中,$\tau$ 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,则 $\tau=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$,故结论得以证明.

### 1.2.4 $n$ 阶行列式的其他定义形式

利用定理 1,我们来讨论行列式定义的其他表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中,$1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列,$\tau$ 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数,对换元素 $a_{ip_i}$ 与 $a_{jp_j}$ 得

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时,这一项的值不变,而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换.设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 $\tau_1$,则 $\tau_1$ 为奇数;设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 $\tau_2$,则

$$(-1)^{\tau_2}=-(-1)^{\tau},\text{故}(-1)^{\tau}=(-1)^{\tau_1+\tau_2},$$

于是

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这说明,对换乘积中两元素的次序,从而行标排列与列标排列同时作了一次对换,因此,行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性.经过一次对换如此,经过多次对换亦如此.于是经过若干次对换,使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$(逆序数为 $\tau$)变为自然排列(逆序数为 0);行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列,设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$,其逆序数为 $s$,则有

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{s}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i=j$,则 $q_j=i$(即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j}$),可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得 $n$ 阶行列式的定义如下:

**定理 2** $n$ 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

其中,$\tau$ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

**证** 按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

记

$$D_1 = \sum (-1)^{\tau} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

按上面的讨论可知：对于 $D$ 中任一项 $(-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$，总有 $D_1$ 中唯一的一项 $(-1)^{s} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 $D_1$ 中的任一项 $(-1)^{\tau} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$，也总有 $D$ 中唯一的一项 $(-1)^{s} a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 $D$ 与 $D_1$ 中的项可以一一对应并相等，所以 $D=D_1$.

更一般的有，$n$ 阶行列式的定义如下：

**定理 3**　$n$ 阶行列式可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau_1+\tau_2} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}, \tag{1.11}$$

其中，$p_1 p_2 \cdots p_n$，$q_1 q_2 \cdots q_n$ 分别为行标排列和列标排列，它们的逆序数分别为 $\tau_1$，$\tau_2$.

**例 1.7**　判断在四阶行列式中，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 应取什么符号？

**解**　(1) 按定义 1 计算.

因为 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}=a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，而 4123 的逆序数为

$$\tau = 0+1+1+1 = 3,$$

所以，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 的前面应取负号.

(2) 按定理 3 计算.

因为 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 的行标排列 2314 的逆序数为

$$\tau_1 = 0+0+2+0 = 2,$$

列标排列 1243 的逆序数为

$$\tau_2 = 0+0+0+1 = 1,$$

$\tau_1+\tau_2=3$，为奇数，所以 $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 的前面应取负号.

## 1.3　行列式的性质

在 1.2 节中，引入了 $n$ 阶行列式的定义，并利用定义计算了一些特殊行列式(如上三角行列式等). 然而，对于一般的 $n$ 阶行列式，当 $n$ 较大时，直接利用定义计算将非常烦琐，因此必须进一步研究行列式的性质，以便利用它来简化



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com