线性代数

王章雄　李任波　主编

案例式教学

自主学习

南京大学出版社

线性代数

主　编　王章雄　李任波
副主编　曹顺娟　任丽洁
编　委　(按姓氏笔划顺序)
丁素芬　余　君　张　健
黄永红　蔡晨晴

南京大学出版社

内容简介

全书包括矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容，重点介绍线性代数的基本概念、基本原理、基本方法，强调科学性与实用性的统一，内容编排由浅入深，以矩阵及其初等变换为主线贯穿全书内容，易于理解和处理。本书可供高等学校各专业学生作为教材使用，也可供有关专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 王章雄，李任波主编. -- 南京 ：南京大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-305-15026-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… ②李… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 076811 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 线性代数
主　　编 王章雄　李任波
责任编辑 陈亚明　苗庆松　　　编辑热线 025-83597482　83592401

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 盐城市华光印刷厂
开　　本 787×960　1/16　印张 14.75　字数 257 千
版　　次 2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-15026-5
定　　价 30.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：025-83594756

前　言

在各类高等院校中,《线性代数》都是一门重要的数学教育公共基础课,它的思想、方法和结论在科学技术、工程技术、管理科学等众多领域都有着广泛的应用,同时,其结构化、公理化思维方式,对训练和提高学生的计算能力、抽象思维、逻辑推理、数学表达能力等都非常有益。本教材以讲授本科大学生代数基本知识和提高学生抽象数学思维水平为出发点,注重培养学生综合运用所学知识分析问题和解决实际问题的能力,使学生能够掌握代数知识在专业学习、生产实践中的具体应用方法和应用手段。

本书包括矩阵、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等内容,涵盖了《线性代数》课程的基本要求。由于一般非数学专业的《线性代数》课程教学时数的限制,本书重点放在线性代数的基本概念、基本原理、基本方法方面,有些内容没有展开作深入探讨,有些定理也没有给出详细证明。按目前我国高校工、农(林)、经(管)等各类专业《线性代数》课程设置惯例,本书教学内容安排48学时完成。根据专业的不同需求,教师也可以在此基础上减去相应内容,使之能够适用于较少学时的其他专业的《线性代数》课程。

本教材是在中国农业出版社《线性代数》的基础上修改而成。从多年教学实践来看,本书的"以矩阵为主线,用初等变换作为线性代数计算问题的主要手段(包括行列式的计算)"的处理方法是行之有效的,达到了教师易教,学生易学的效果。本次修改沿用了这一体系。为贯彻以学带教的改革思路和加强本课程的实用性,本书增加了"自主与小组学习"与"应用案例"两个模块,教师可以将这些内容布置给学生在课外小组中自学、研讨。鉴于代数余子式与行列式的按行按列展开是比较难的内容,本次修改将这些有关的内容归集到一起,便于教学。对第四章中关于初等矩阵讨论的调整,也是基于同样的理由。

本书在编写过程中,参考了众多的相关教材和文献资料,在此一并致谢!

书中不妥甚至错误之处,希望各位读者不吝指正。

编　者

2014 年 10 月

目　录

第一章　矩阵的初等变换与方程组的消元法

矩阵是线性代数研究的主要对象和工具，它在数学的其他分支以及自然科学、现代经济学、管理学和工程技术领域等方面具有广泛的应用. 矩阵的初等变换是线性代数的基础，在以后各章的学习中有重要的作用. 它是求解行列式、研究变量的线性变换、研究向量组的线性相关性及线性方程组求解等问题的有力且不可替代的工具.

在本章中，首先引进矩阵的概念和定义，然后重点介绍矩阵的初等变换. 通过初等变换把矩阵变成行阶梯形、行最简形以及标准形. 最后说明用消元法解线性方程组等同于其增广矩阵的初等行变换.

§1.1　矩阵的概念

1. 引例

在现实生活中，我们经常会遇到表示各种问题的数表.

例 1　我们经常看到学生的成绩表，如下表是某校四个学生的数学、物理、化学三门课程成绩：

姓名	数学	物理	化学
张三	65	61	72
李四	77	77	76
王五	67	63	49
赵六	80	69	75

表中数据有四行，分别代表四位同学，第 1 行代表张三，第 2 行代表李四，等等；有三列，分别代表数学、物理、化学三门课程；表格中的每个数据分别表示它所在行所在列的成绩，如位于第 2 行第 3 列的数据 76 表示第二位同学（李四），第三门课程（化学）的成绩，这样既能清楚地看到每位同学的每一门课程的成绩，

又能对不同同学(行)的成绩进行对比,对不同课程(列)的成绩进行对比.

除去这个表格的实际意义,只看它的数据部分,我们可用以下的数表来表示:

$$\begin{pmatrix} 65 & 61 & 72 \\ 77 & 77 & 76 \\ 67 & 63 & 49 \\ 80 & 69 & 75 \end{pmatrix}$$

该数表作为一个整体,描述了四位同学三门课程的成绩,不同行代表了不同同学,不同列代表了不同课程.

例 2 为了比较甲、乙、丙三种不同土壤条件的苗圃的育苗情况,分别在三个苗圃中培育苗木.一定时间后,从甲、乙、丙三个苗圃中各随机抽取若干株苗木,观察苗木的合格情况.

在甲苗圃中抽取了 255 株,其中 225 株合格,30 株不合格;

在乙苗圃中抽取了 195 株,其中 188 株合格,7 株不合格;

在丙苗圃中抽取了 380 株,其中 365 株合格,15 株不合格;

为了更清楚地表示三个苗圃合格苗木的分布情况,我们建立如下数表,表中有三行,第 1 行表示甲苗圃,第 2 行表示乙苗圃,第 3 行表示丙苗圃;有两列,分别代表合格株数和不合格株数;表格中的每个数据分别表示它所在行所在列的特征,如位于第 1 行第 1 列的数据 225 表示甲苗圃的合格株数为 225,这样既能清楚地看到不同苗圃是否合格的株数,又能对不同行(列)代表的数据进行比较.

苗圃	合格株数	不合格株数
甲苗圃	225	30
乙苗圃	188	7
丙苗圃	365	15

除去这个表格的实际意义,只看它的数据部分,我们可以用以下的数表来表示:

$$\begin{pmatrix} 225 & 30 \\ 188 & 7 \\ 365 & 15 \end{pmatrix}$$

数表的不同行代表了不同的苗圃,不同列代表了苗木是否合格的株数,显然表中

的数据表示了它所在行所在列的数字特征.

例 3　某航空公司在 A、B、C、D 四个城市之间的航线如图 1－1 所示.

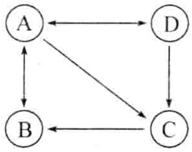

图 1－1

我们也可用以下的数表来表示：

城市	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	0
C	0	1	0	0
D	1	0	1	0

表中“1”表示有航班，“0”表示没有航班. 即得如下数表：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

该数表的行代表出发城市，列代表到达城市，表中的数据反映了 A、B、C、D 四个城市之间的交通连接情况.

通过以上例子可以看到，我们经常用这样的数表来表示一些实际问题. 对于每个问题对应的数表有不同的实际意义，除去每个数表的实际背景，它们有共同的特征，即：每个数表看作一个整体，由若干行若干列组成，其中不同行代表一个变量的不同取值，不同列代表另一个变量不同取值，表中的数据表示了它所在行所在列的数字特征.

这样的数表在现实生活中随处可见. 例如企业上经常用到的年报表，月报表，林业上用到的小班调查表，人事部门的员工信息表，员工工资表，等等. 因此研究表格及其关系具有实际意义.

这些数表就是我们要介绍的矩阵.

2. 矩阵的定义

定义 1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ **矩阵**. 通常用大写字母 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}\cdots$. 表示矩阵，a_{ij} 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的**元素**，简称为**元**，元素 a_{ij} 位于矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 (i,j)**元**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示元素所在的行，称为**行标**，第二个下标 j 表示元素所在的列，称为**列标**. 以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的矩阵可简记为 (a_{ij}). 有时为了表明一个矩阵的行数和列数，用 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 或 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列矩阵.

元素是实数的矩阵称为**实数矩阵**，简称**实矩阵**，元素是复数的矩阵称为**复矩阵**；本书中的矩阵除特别说明者外，都指实矩阵.

只有一行的矩阵 $\mathbf{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$ 称为**行矩阵**；只有一列的矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**.

行数与列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**，n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 也记作 $\mathbf{A}_n$.

在 n 阶方阵中，行标与列标相等的元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$，称为**(主)对角线元素**. 有时也称 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 为次对角线元素. 主对角线之外的元素全为零的方阵称为**对角矩阵**，简称**对角阵**. 如：

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

也记为 $\mathbf{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

两个矩阵的行数相等，列数也相等，就称它们是**同型矩阵**. 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是同

型矩阵，并且对应的元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}, (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$$

那么称矩阵 **A** 和 **B** 相等，记作 **A**=**B**.

例 4　设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & x\\ y & 2-z\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}z+1 & 2\\ y & 2-y\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

已知 **A**=**B**，求 x,y,z.

解　因为

$$\begin{aligned}&2=z+1,\\ &x=2,\\ &2-z=2-y\end{aligned}$$

所以 $x=2, y=1, z=1$.

我们看到，上一节的例 1～例 3 中的数表都是矩阵. 如例 1 中学生成绩表可表示为矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}65 & 61 & 72\\ 77 & 77 & 76\\ 67 & 63 & 49\\ 80 & 69 & 75\end{pmatrix}$$

这是一个 4×3 的矩阵，矩阵 **A** 中每一个元素表示每一名同学的数学、物理、化学课程的成绩.

例 3 中四城市之间的航线可用矩阵表示为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

这是一个 4 阶方阵，矩阵 **B** 中的元素反映了 A、B、C、D 四个城市两两之间有无航班的交通情况.

3. 常用的矩阵

(1) 零矩阵

$m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为零矩阵,记作 $\mathbf{O}$.

注:不同型的零矩阵是不同的.

(2) 单位矩阵

主对角线上的所有元素全为 1 的对角阵,称为单位阵,记作 $\mathbf{E}$.

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(3) 数量矩阵

主对角线上的所有元素全为 λ 的对角阵,称为数量阵,记作 $\lambda\mathbf{E}$.

$$\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{pmatrix}.$$

(4) 三角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为**上三角形矩阵**.

形如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵称为**下三角形矩阵**.

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**,简称三角阵.

§1.2　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵的一种十分重要的运算,它在整个矩阵理论中有着重要的作用.

1. 矩阵的初等变换

定义 2　矩阵的下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(1) 交换矩阵的两行(交换 i,j 两行,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$);

例 5

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

互换 1,2 行得

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 以一个非零实数 k 乘矩阵的某一行(第 i 行乘以数 k,记为 $r_i \times k$ 或 kr_i);

例 6　对例 5 中的矩阵 $\mathbf{A}$,作变换$\left(以\dfrac{1}{3}乘矩阵的第 1 行\right)$,得

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) 把矩阵的某一行的 k 倍加到另一行(第 j 行乘以数 k 加到第 i 行,记为:$r_i + kr_j$).

例 7　对例 5 中的矩阵 $\mathbf{A}$,作变换(第 1 行加上第 3 行的 3 倍),得

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 3r_3} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 18 & 21 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

以上(1),(2),(3)三种变换统称为矩阵的**初等行变换**,分别称为矩阵的第一,二,三种初等行变换.

把定义 2 中的“行”换成“列”,即得矩阵的初等列变换.

定义 3 矩阵的下列三种变换称为矩阵的**初等列变换.**

(1) 交换矩阵的两列(交换 i,j 两列,记为 $c_i \leftrightarrow c_j$),

(2) 以一个非零的数 k 乘矩阵的某一列(第 i 列乘以数 k,记为 $c_i \times k$ 或 kc_i),

(3) 把矩阵的某一列的 k 倍加到另一列(第 j 列乘以数 k 加到第 i 列,记为 $c_i + kc_j$).

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的**初等变换.**

注:初等变换可逆,且其逆变换是同一类型的初等变换.

例如:第一种初等行变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换为它本身 $r_i \leftrightarrow r_j$;第二种初等行变换 $r_i \times k$ 的逆变换为 $r_i \times \frac{1}{k}$,也是第二种初等行变换;第三种初等行变换 $r_i + kr_j$ 的逆变换为 $r_i - kr_j$,也是第三种初等行变换.同理三种初等列变换的逆变换也是同类型的初等列变换.

定义 4 若矩阵 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\mathbf{B}$,则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **等价**,记为:$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$;

若矩阵 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等行变换变成矩阵 $\mathbf{B}$,则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **行等价**,记为:$\mathbf{A} \xrightarrow{r} \mathbf{B}$;

若矩阵 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等列变换变成矩阵 $\mathbf{B}$,则称矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ **列等价**,记为:$\mathbf{A} \xrightarrow{c} \mathbf{B}$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质:

(1) 自反性:$\mathbf{A} \to \mathbf{A}$;

(2) 对称性:若 $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 则 $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$;

(3) 传递性:若 $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$,$\mathbf{B} \to \mathbf{C}$,则 $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$.

行等价与列等价也具有上述性质.

2. 矩阵的标准形

从下面例子我们看到,用一系列的初等变换,可以将矩阵化为较简单的形式.

例 8 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

对其作如下的初等变换：

首先互换 1,4 行：

$$\mathbf{A} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

作变换第 2 行减第 4 行，使第二行第一个元素化为零：

$$\xrightarrow{r_2 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

作变换第 3 行减第 1 行的 2 倍，使第 3 行第一个元素化为零：

$$\xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

作变换第 4 行减第 1 行的 3 倍，使第 4 行第一个元素化为零：

$$\xrightarrow{r_4 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

注意到第 4 行的元素中有公因数，可以化简，作变换第 4 行乘以$\frac{1}{4}$，相当于约去第 4 行的公因数：

$$\xrightarrow{r_4 \times \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

下面以第二行为基础，把第 3 行第 2 列，第 4 行第 2 列的元素化为零. 作变换第 3 行减第 2 行的 3 倍，第 4 行减第 2 行，有时候为了方便可以把两个变换写在一起，注意变换的先后顺序，按从上到下的顺序标出.