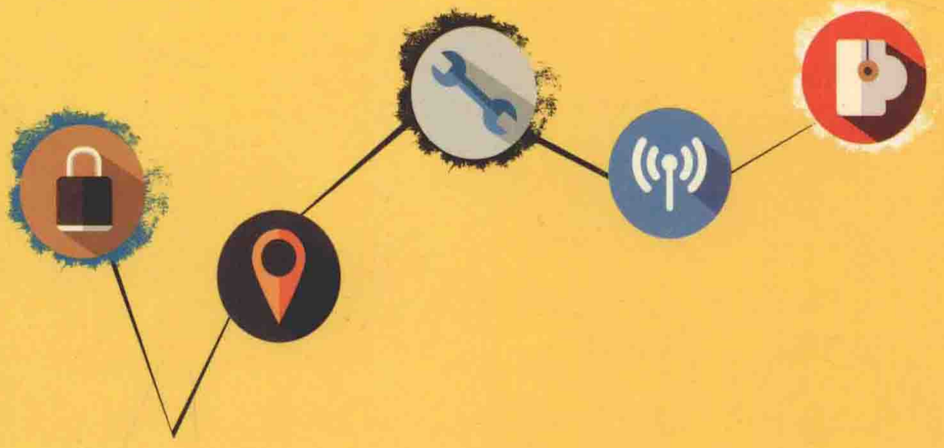
基础与现代
新课标高中物理知识讲座集

《物理教学》编辑部组编
主编　钱振华



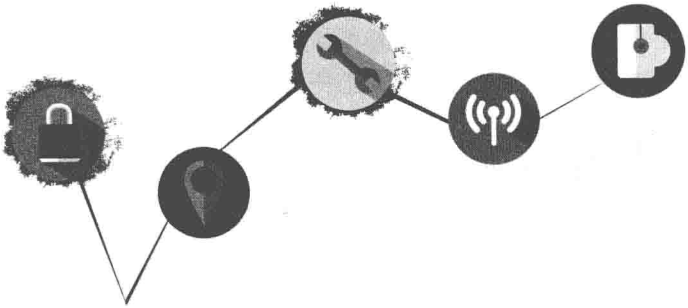
上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

基础与现代

新课标高中物理知识讲座集

《物理教学》编辑部组编

主编　钱振华



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

基础与现代：新课标高中物理知识讲座集/钱振华主编.—上海：华东师范大学出版社，2015.5
ISBN 978-7-5675-3588-6

Ⅰ.①基… Ⅱ.①钱… Ⅲ.①中学物理课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第104516号

基础与现代
——新课标高中物理知识讲座集

主　　编　钱振华
责任编辑　徐　平
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　25.75
字　　数　578千字
版　　次　2015年7月第1版
印　　次　2015年7月第1次
印　　数　1—5100
书　　号　ISBN 978-7-5675-3588-6/G·8324
定　　价　48.00元

出 版 人　王　焰

序

《物理教学》杂志于2010年10月起开设新栏目“面向21世纪中学物理讲座”，现把其中文稿集中起来，并补充一些其他文章，汇集成册出版，是一件很有意义的事情。

十多年来，公民素质教育的呼声很高，而中学教育是素质教育非常重要的环节。本人认为，公民素质有三个方面，即道德素质、人文素质和科学素质。科学素质包括科学知识、科学精神和科学方法，这些素质并不只是理工科的学生需要，在科学高度发展的现代社会里，文科学生也需要有一定的科学素质。在中学的课程里，除数学外，物理课在科学素质的培养方面起着其他课程无法替代的作用。无论国家政策和高考方案怎样改变，都无法改变这一事实。好多年前，我认识一位北大化学系的教授，她曾负责北大化学系的招生。有一年某地区规定，高考中物理和化学只选一门，征求她的意见。她说，从化学系招生的角度看，两门都要考，如果强制只选一门，我们北大化学系从考物理的学生中选。我还认识一位北大生物系的教授，他曾负责全国中学生生物学竞赛。为北大生物学选学生，他不从生物学竞赛优胜者中选，而是从物理竞赛优胜者中选。他认为生物学考试对学生科学素质的分辨力不强。

要在物理课中进行科学素质教育，就不能只应付高考，教师知识也不能局限于教学大纲。即使从应付考试的角度看，近年来也出现了一些考试题或模拟题，内容的深度和广度有意无意地超出了中学物理大纲，对中学教师的思想引起很大混乱，长期争论不休。这都说明，中学教师的知识不能局限于中学的教学大纲。我相信《物理教学》杂志汇集的这本文集会对中学物理教师知识的扩展大有裨益。

北京大学　赵凯华

2015年6月

前言

《物理教学》杂志于2010年10月起新开设了一个新栏目“面向21世纪中学物理讲座”。讲座内容以中学物理课程标准的基本要求为主线，包括力、热、电、光、原子物理等基础知识，同时根据新课程教学改革的要求，对新课改所涉及的一些拓展内容，包括热力学第二定律，相对论，量子物理及宇宙学等比较近代的一些物理内容，作出一些导引性的介绍。另外，为了更好地解读课标，我们也适当组织了一部分学科教学论的文稿，介绍一些教学理论、教学心理与教学方法等方面的内容。讲座每期一讲，每讲一个主题，约请一些在大学长期担任基础物理教学的教授与教学专家，以及一些多年工作在中学教学第一线的资深教师撰稿。这些讲座文稿刊出后，很快受到许多读者的欢迎与好评。这一专栏陆陆续续，定期不定期的开设，延续了约三年时间。现在为了方便更多读者阅读的需要，我们得到华东师范大学出版社的支持，把在杂志上各期分散刊出的这些文稿集中起来，加以编辑整理，并补充了一些新撰写的文章，以讲座集的形式成书出版，作为一本继续教学的高中物理知识读物奉献于广大读者。

认真搞好基础教育的改革，提高基础教育各门课程的教学质量，从应试教学的桎梏中走出来，已是大家的共识。根据新课标的要求，进行素质教育。按照新课标的教学理念，展开探究式教学，想使学生既学到知识，又增长才干，首先要提高师资的质量。物理课程不是基础教育的重点学科，但在中学学好物理课程，打好物理基础，无论为继续升入高一级学校学习，还是直接参加工作，都显得特别重要。关于这一点在大学招生，以及各类学科竞赛中同样显示出物理学科的重要性。今天作为一名合格的高中物理教师，按新课标的要求，上好每一堂课，做好每一个实验，开展好生动而有实效的实践性活动，都必须具有扎实而全面的物理学基本素养。对于物理学本身，无论是比较基础的基本知识，还是比较近代的物理理论，都提出了比过去更高的要求。

杨振宁先生的老师，已故北京大学教授王竹溪先生说过：“牛顿力学虽然古老，但却并不陈旧。”可以这样说，在基础物理中的许多概念都建立在力学之上，因此学好力学，打好基础还是十分必要的。而在GPS、半导体芯片与核能应用如此普及的今天，在中学物理课程中，拓展性地学一点相对论与量子物理的知识，显得如此的迫切与重要。当初我们在杂志上决定刊出这一讲座栏目，正是想从这两方面给一线教师，在繁忙的教书育人工作之余，提供一些知识的补充与储备。今天汇编成册，希望这本书得到你的喜爱，特别期待这是一本对你有用的书。

赵凯华先生是大家熟悉而尊敬的长者，他长期关心我们《物理教学》杂志，即使近年来年事已高，还不断为杂志写稿，每年我们都可以看到赵先生的文章，为我们解答教学中的一些困惑与疑难。当我们告诉他，要把杂志上文章结集出书时，他表示同意他的文章全部都

可以编书入册。在本书出版时，赵先生又为本书写序，热情鼓励我们的工作。我们对赵先生对中学物理教学的一贯关心与帮助，对本书出版的支持表示衷心的感谢。

在本书出版过程中我们得到了本书全体编委的通力合作，他们为文稿撰写修改付出了大量的心血，本书责任编辑徐平女士更为本书出版做出了许多努力，所有这一切都表示衷心感谢！

我们本着“不怕错主义”撰写、编辑出版了本书，但书中错误希望读者不吝指正。

钱振华
华东师范大学
2015 年 3 月

目录

第一篇　基础物理

1. 碰撞与质心系

碰撞是常见的物理现象，对碰撞问题的研究，在宏观领域是讨论体育运动、交通事故等问题的理论基础；在微观领域，更是研究微观粒子间相互作用的重要手段。著名的卢瑟福 α 粒子散射实验，就是利用碰撞认识微观粒子间相互作用的光辉范例，卢瑟福由此奠定了以他名字命名的原子核式结构理论的基础。

所谓碰撞，就是两物体（视为质点）相互靠近，经相互作用又迅速分离，使两物体运动状态发生急剧变化的现象。由于发生碰撞的时间极短，我们总是通过讨论碰撞前、后两物体的运动情况来研究碰撞问题。碰撞前后两物体的运动均在同一条直线上的碰撞称为正碰，不满足这一条件的碰撞称为斜碰。碰撞过程中机械能守恒（表现为碰撞前、后动能不变）的碰撞称为弹性碰撞，碰撞过程中机械能有损失或有增加的称为非弹性碰撞（后者亦称为超弹性碰撞）。

正碰是讨论碰撞的基础，但正碰作为斜碰的特例，又可包含在斜碰之中，所以我们主要讨论斜碰。一般情况下，斜碰为三维问题，碰撞后两个物体的速度 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 不一定在碰撞前两物体的速度 $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ 所组成的平面上，但若碰撞前一个物体处于静止状态，即 $\vec{u}_2=0$，则这种碰撞是二维问题。这正是实验室中最常见的碰撞现象，我们主要就讨论这种情况。为简单起见，我们主要讨论弹性碰撞。

设入射粒子的质量为 m_1，速度为 $\vec{u}_1$，靶粒子静止，质量为 m_2，碰后两粒子的速度分别为 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$，$\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 与入射方向 $\vec{u}_1$ 间的夹角（称为散射角）各为 θ_1、θ_2，如图 1 所示。由动量守恒，可写出下列方程，

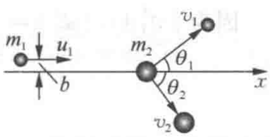


图 1

$$m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2\text{，}m_1v_1\sin\theta_1 = m_2v_2\sin\theta_2\text{；}$$

如果碰撞是弹性的，由能量守恒可得 $\frac{1}{2}m_1u_1^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$。

这里未知量有 v_1、v_2、θ_1、θ_2 四个，而方程只有三个，这是由于入射方向与靶粒子中心的间距 b（称为碰撞参量或瞄准距离，见图 1）未确定之故，通常可由实验确定未知量中的一个，其余三个可由方程求得。

以上就是通常求解碰撞问题的方法。通过代数运算，可由以上方程得到一些结论：

(1) 当 $m_1<m_2$ 时，θ_1 可以取 $0\sim\pi$ 之间任何值；

(2) 当 $m_1=m_2$ 时，$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$；

(3) 当 $m_1>m_2$ 时，θ_1 只能取 $0\sim\theta_{1m}$ 之间的值，且 $\theta_{1m}<\frac{\pi}{2}$。

这些结论的得出需要经过比较繁杂的计算，这里不赘述。

如果在质心系中考察，上述碰撞问题就将变得更清晰、明了，一些结论也很容易得出。所谓质心系，就是质心在其中静止的平动系（通常取质心为对应坐标系的原点）。由于碰撞

中不受外力(或外力可忽略),故质心系仍是惯性系。先求质心速度:$\vec{v}_c=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{u}_1$;

在质心系中,两粒子碰前速度为:$\vec{u}'_1=\vec{u}_1-\vec{v}_c=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{u}_1$;

$$\vec{u}'_2=\vec{u}_2-\vec{v}_c=-\vec{v}_c=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{u}_1;$$

显然有 $m_1\vec{u}'_1+m\vec{u}'_2=0$。

即碰前,在质心系中体系的动量为零。碰后,体系的动量仍为零,$m_1\vec{v}'_1+m\vec{v}'_2=0$;

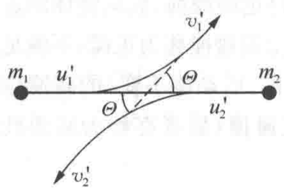


图 2

可见,$\vec{v}'_1$、$\vec{v}'_2$仍在一直线上,如图 2 所示。而且,再由碰撞前、后动能不变,不难得出,$|\vec{v}'_1|=|\vec{u}'_1|$,$|\vec{v}'_2|=|\vec{u}'_2|$。因为,如果 $|\vec{v}'_1|>|\vec{u}'_1|$,由动量守恒,必有$|\vec{v}'_2|>|\vec{u}'_2|$,这样,能量就增大了;同理,如果$|\vec{v}'_1|<|\vec{u}'_1|$,由动量守恒,必有 $|\vec{v}'_2|<|\vec{u}'_2|$,则能量减小,都违背能量守恒。所以在质心系中,二粒子碰撞后,它们的速度只改变方向,而不改变大小,碰后两速度仍在一直线上,但直线的方位改变了,可用粒子的出射方向与入射方向的夹角 Θ 来表示粒子运动方向改变的程度,其值可在 $0\sim\pi$ 之间,依碰撞参量而变。

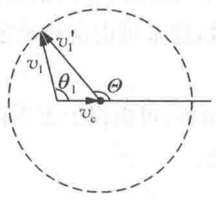
回到实验室参考系,有 $\vec{v}_1=\vec{v}'_1+\vec{v}_c$,$\vec{v}_2=\vec{v}'_2+\vec{v}_c$;

因为 $|\vec{v}'_1|=|\vec{u}'_1|=\dfrac{m_2}{m_1+m_2}u_1$;$|\vec{v}'_2|=|\vec{u}'_2|=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}u_1$;

$$|\vec{v}_c|=|\vec{u}'_2|=\frac{m_1}{m_1+m_2}u_1。$$

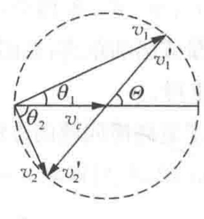
所以,当 $m_1<m_2$ 时,有 $|\vec{v}_c|<|\vec{v}'_1|$,由矢量图(图 3)可见,m_1 的散射角 θ_1 可取 $0\sim\pi$ 之间的任意值,即 $0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$。

当 $m_1=m_2$ 时,有 $|\vec{v}_c|=|\vec{v}'_1|=|\vec{v}'_2|$,由图 4 可见,$\vec{v}_1$ 与$\vec{v}_2$ 成直角,即 $\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$。



$m_1<m_2$, $0\leqslant\theta_1\leqslant\pi$

图 3



$m_1=m_2$, $\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$

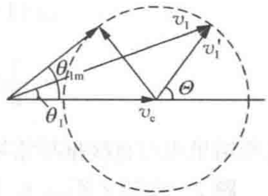
图 4

当 $m_1>m_2$ 时,有 $|\vec{v}_c|>|\vec{v}'_1|$,由图 5 可见,θ_1 不可能大于$\theta_{1m}=\sin^{-1}\dfrac{m_2}{m_1}$,即 $0\leqslant\theta_1\leqslant\sin^{-1}\dfrac{m_2}{m_1}$。

这些就是上文提到过的结论。显然，在质心系中得出这些结论要方便得多。

作为以上讨论的练习，我们来看几个题目。

题1 正碰。我们也可用质心系来讨论正碰问题。设碰前质量各为 m_1、m_2 的粒子的速度各为 u_1、u_2，求碰后两粒子速度 v_1、v_2。



$m_1 > m_2$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \arcsin\frac{m_2}{m_1}$

图5

解：由动能守恒，有 $m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$；

质心速度 $v_c = \dfrac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}$。

在质心系中，碰前两粒子的速度变为

$$u_1' = u_1 - v_c = \frac{m_1u_1 + m_2u_1 - m_1u_1 - m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2};$$

$$u_2' = u_2 - v_c = \frac{m_1u_2 + m_2u_2 - m_1u_1 - m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2};$$

根据上面的讨论，若碰撞是弹性的，碰后，各粒子的速度反向，但大小不变。回到实验室系，得两粒子的速度

$$v_1 = -u_1' + v_c = \frac{-m_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2;$$

$$v_2 = -u_2' + v_c = \frac{m_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2。$$

此结果与将动量守恒方程及能量守恒方程联立得出的结果相同。

如果碰撞是非弹性的，只要引进恢复系数 e，也不难求解。由于相对速度与参照系无关，不仅碰后各粒子的速度反向，且大小变为原大小的 e 倍。回到实验室系，得两粒子的速度

$$v_1 = -eu_1' + v_c = \frac{-em_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2}u_2$$

$$v_2 = -eu_2' + v_c = \frac{em_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2}u_2$$

当 $e = 1$ 时，结果与弹性碰撞相同；当 $e = 0$，即得完全非弹性碰撞结果 $v_1 = v_2 = v_c$。至于碰撞中的能量损失，由于内力的总功与参照系无关，且质心系也是惯性系，于是可用质心系中的能量损失来表示实验室系中的能量损失：

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 - \frac{1}{2}m_1(eu_1')^2 - \frac{1}{2}m_2(eu_2')^2 \\ &= (1-e^2)\left(\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2\right) \\ &= (1-e^2)\left[\frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2(u_1 - u_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2(u_1 - u_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}\right]\end{aligned}$$

$$= (1-e^2)\cdot\frac{1}{2}\frac{(u_1-u_2)^2}{(m_1+m_2)^2}(m_1m_2{}^2+m_2m_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2$$

这些结果也与直接推导结果相同,但显然现在的推导方法更简洁明了。

题 2 实验表明,α 粒子至少携动能 $E_0 = 1.45$ MeV 射向静止的 ^{14}N 核,核反应

$$\alpha + {}^{14}N = {}^{17}O + p$$

才能发生,试问,α 粒子的入射动能至少要比 E_0 大多少,才能使上述核反应的生成物质子的动能为零?

解:当 α 粒子携最小动能 E_0 射向静止的氮核时,^{17}O 和 p 必以相同速度运动,故这是一个完全非弹性正碰问题,只是碰后粒子(核)发生了变化,由 α、^{14}N 变成了 ^{17}O 和 p,因而称为核反应,碰撞中损失的机械能就转化为粒子(核)重新组合所需的能量,这种能量通常称为反应能。只要发生该核反应,此反应能总是需要的,而且是不变的,可以改变的只是生成物(^{17}O 和 p)的动能。

当 α 粒子的入射动能为 E_0 时,设其速度为 $u_{\alpha0}$,则碰后生成物 ^{17}O 和 p 必以相同速度运动,此速度即为质心速度,设为 v_c,由动量守恒,有 $m_\alpha u_{\alpha0} = (m_O + m_p)v_C$

得 $v_c = \dfrac{m_\alpha}{m_O + m_p}u_{\alpha0}$ 则反应能(即碰撞中的机械能损失)为

$$Q = \frac{1}{2}m_\alpha u_{\alpha0}^2 - \frac{1}{2}(m_O + m_p)v_c^2 = \frac{1}{2}m_\alpha m_{\alpha0}^2 - \frac{1}{2}\frac{m_\alpha}{m_o + m_p}m_\alpha u_{\alpha0}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_\alpha u_{\alpha0}^2\left(1 - \frac{m_\alpha}{m_o + m_p}\right) = \frac{m_N}{m_o + m_p}E_0$$

因为 $\dfrac{1}{2}m_\alpha u_{\alpha0}^2 = E_0$,而 $m_O + m_P - m_\alpha = m_N$。此结果也与上题的能量损失 ΔE 表达式当 $e = 0$ 及 $u_2 = 0$ 的形式一致,读者可自行检验之。

为求使生成物质子的动能为零时的 α 粒子的入射能量并无现成的公式可用,但仍可用基本原理求解。设此时 α 粒子的入射速度为 u_α,既然要使质子 p 的动能为零,其速度也应为零,因而 α 粒子的动量应完全变为 ^{17}O 的动量,而有 $m_\alpha u_\alpha = m_o v_o$;

导致 $v_o = \dfrac{m_\alpha}{m_o}u_\alpha$;

由能量守恒,有:$\dfrac{1}{2}m_\alpha u_\alpha{}^2 = \dfrac{1}{2}m_o v_o{}^2 + Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_\alpha}{m_o}m_\alpha u_\alpha{}^2 + Q$,

以 Q 表式代入上式得 $\dfrac{1}{2}m_\alpha u_\alpha^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_\alpha}{m_o}m_\alpha u_\alpha{}^2 + \dfrac{m_N}{m_o + m_p}E_0$;

于是有 $\dfrac{1}{2}m_\alpha u_\alpha{}^2\left(1 - \dfrac{m_\alpha}{m_o}\right) = \dfrac{m_\alpha}{m_o + m_p}E_0$;

即 $\dfrac{1}{2}m_\alpha u_\alpha{}^2 = \dfrac{m_N}{m_O + m_P}E_0\Big/\left(1 - \dfrac{m_\alpha}{m_o}\right) = \dfrac{m_o}{m_o - m_\alpha}\dfrac{m_N}{m_o + m_p}E_0$。

题目所求的 α 粒子动能增量即为

$$\delta E=\frac{1}{2}m_\alpha u_\alpha{}^2-E_0=\left(\frac{m_o}{m_o-m_\alpha}\frac{m_N}{m_o+m_p}-1\right)E_0。$$

以相应数据代入上式，得

$$\delta E=\left(\frac{17}{17-4}\frac{14}{17+1}-1\right)\times 1.45=\left(\frac{17}{13}\frac{14}{18}-1\right)\times 1.45;$$

$$=\frac{2}{117}\times 1.45=0.0248\ \text{MeV}=24.8\ \text{keV}。$$

【题 3】 N 个相同小球等间隔地排成半圆形*，置于光滑水平桌面上，如图 6 所示。这些小球的总质量为 M。另一个质量为 m 的小球 A 以初速 u 自左方射向半圆，方向垂直于半圆的直径，从半圆上方向左离开半圆。

(1) 在 $N\to\infty$ 的极限情况下，求能实现上述过程的 M/m 的取值范围；

(2) 在 M/m 取上问的临界值情况下，求小球 A 的最终出射速率 v。(2000 年美国大学生物理竞赛题)

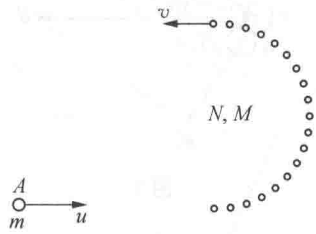


图 6

解：(1) 由题意，要使小球 A 依次与半圆上的小球相碰，应使小球 A 在每次碰撞中的散射角为 π/N。根据上面的讨论，质量 m 与半圆上的小球质量 M/N 相比不能太大，而应满足 $\sin\frac{\pi}{N}\leqslant\frac{M/N}{m}$。

因为这里的 $\frac{\pi}{N}$ 即对应上文中的 θ_1，$\frac{M}{N}$ 即对应上文中的 m_2，m 对应上文中的 m_1。由于 $N\gg 1$，$\sin\frac{\pi}{N}\approx\frac{\pi}{N}$，上式变为 $\frac{\pi}{N}\leqslant\frac{M/N}{m}$；于是得 $\frac{M}{m}\geqslant\pi$；

此即能实现所要求过程的 $\frac{M}{m}$ 的取值范围。

(2) 在 $\frac{M}{m}$ 取(1)问中临界值 $\frac{M}{m}=\pi$ 情况下，经一次碰撞，设 A 球速度变为 v_1，根据上文的讨论，应有(参见图 5)

$$v_1=v_c\cos\theta_{1m}=\frac{m}{m+M/N}\sqrt{1-\left(\frac{M}{Nm}\right)^2}u;$$

以 $\frac{M}{m}=\pi$ 代入上式，并注意 $N\gg 1$，略去二级以上小量，有

$$v_1=\frac{1}{1+\pi/N}\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{N}\right)^2}u\approx\frac{u}{1+\pi/N},$$

经过 N 次碰撞后，即得小球 A 的出射速度 v：$v=v_n=\frac{u}{(1+\pi/N)^N}$；

* 严格讲不是完整的半圆，而应使两端小球与圆心的连线分别和直径成 $\pi/2N$ 的小角。

但 $(1+\pi/N)^N=\left[\left(1+\dfrac{\pi}{N}\right)^{N/\pi}\right]^{\pi}$，而 $\lim\limits_{N\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{\pi}{N}\right)^{N/\pi}\right]=e$

于是得 $v=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{u}{(1+\pi/N)^N}=\mathrm{e}^{-\pi}u\approx 0.043u$

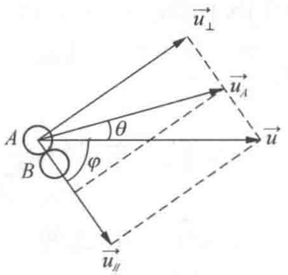


图 7

【题 4】 小球 A 以初速 u 与同质量的静止小球 B 发生非弹性碰撞。A 球速度方向与两球相碰时的球心连线成 φ 角。设两球表面光滑，两球碰撞的恢复系数为 e，问当 φ 为何值时，A 球的偏向角最大？并求此最大偏向角。

解：将 A 球的入射速度 u 分解为与两球的连线垂直的分量 $u_{\perp}=u\sin\varphi$ 和与之平行的分量 $u_{/\!/}=u\cos\varphi$ 两部分(图 7)。由于球光滑，碰后 $u_{\perp}$ 不变，而 $u_{/\!/}$ 则改变为 $u'_{/\!/}$。为求 $u'_{/\!/}$，考察以速度 $u_{/\!/}$ 运动的 A 球与静止的 B 球的正碰问题。上文的讨论显然适用于非弹性正碰。现在，质心速度 $v_c=\dfrac{1}{2}u_{/\!/}$，在质心系中，有 $u'_A=\dfrac{1}{2}u_{/\!/}=u'_B$。根据恢复系数的意义及零动量条件，不难得出两球在质心系中碰后的速度为：$v'_A=eu'_A=\dfrac{1}{2}eu_{/\!/}=\dfrac{1}{2}eu\cos\varphi=v'_B$；

方向与原来相反，于是得实验室参照系中 A 球正碰后速度

$$u'_{/\!/}=v_c-v'_A=\frac{1}{2}u_{/\!/}-\frac{1}{2}eu_{/\!/}=\frac{1}{2}(1-e)u\cos\varphi;$$

A 球碰后的实际速度 $\vec{v}_A=\vec{u}'_{/\!/}+\vec{u}'_{\perp}$，$\vec{v}_A$ 与 $\vec{u}$ 的夹角 θ 即为 A 球的偏向角。如图 7，有

$$\tan(\varphi+\theta)=\frac{u_{\perp}}{u'_{/\!/}}=\frac{u\sin\varphi}{\dfrac{1}{2}(1-e)u\cos\varphi}=\frac{2}{1-e}\tan\varphi;$$

上式展开并整理，得 $2\tan\theta\tan^2\varphi-(1+e)\tan\varphi+(1-e)\tan\theta=0$；
这是以 $\tan\theta$ 为参量的关于 $\tan\varphi$ 的二次方程，此方程应有实数解。由此可得

$(1+e)^2\geqslant 8(1-e)\tan^2\theta$；即 $\tan\theta\leqslant\dfrac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}$。

可见 $$\theta\leqslant\theta_m=\tan^{-1}\frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}。$$

代入 $\tan\varphi$ 的二次方程，得 $\theta=\theta_m$ 时 φ 满足 $\tan\varphi=\dfrac{1+e}{4\tan\theta_m}=\sqrt{\dfrac{1-e}{2}}$；

即当 $\varphi=\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-e}{2}}$ 时，A 球达最大偏向角 $\theta_m=\tan^{-1}\dfrac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}$。

（郑永令　复旦大学物理系　200433）

2. 二体问题与折合质量

从一个例子说起

设有质量为 m_1、m_2，相距为 r 的两星体，在万有引力作用下绕它们的质心 C 做圆周运动，求运动周期(图 1)。

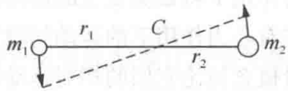


图 1

本题容易求解。设两星体绕质心转动的角速度为 ω，m_1、m_2 与质心距离为 r_1、r_2，由牛顿定律

$$m_1\omega^2 r_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad ①$$

$$m_2\omega^2 r_2 = G\frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad ②$$

由质心的意义，有 $r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}r$，$r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}r$；

代入以上二式得 $m_1\omega^2\frac{m_2}{m_1+m_2}r = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$； ③

由此解得 $\omega = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}}$，$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(m_1+m_2)}}$。

以上讨论是在质心静止系中进行的。但质心处并无星体，对实际观察来说，在相对一个星体静止的参照系中讨论更方便，也就是说，讨论两星体的相对运动更方便。为此，我们来看式③。若令 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$； ④

则③式写成 $\mu\omega^2 r = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$； ⑤

这正是一个星体(例如 m_1)绕另一星体(m_2)做相对运动的运动方程。这就是说，只要将一个星体(如 m_1)的质量换成 μ，它相对另一星体(m_2)的运动仍满足牛顿定律。同样，将 m_2 的质量换成 μ，它相对另一星体(m_1)的运动也满足牛顿定律。尽管其时视为静止的星体并非静止在惯性系中。由④式定义的 μ 称为折合质量或约化质量。

为进一步厘清以上讨论的物理意义，我们从另一角度来进行讨论。我们试着在相对 m_2 静止的平动系中来考察 m_1 的运动。m_2 在其中静止的平动系并非惯性系，但只要引入惯性力，牛顿定律仍适用。注意到 m_2 相对惯性系的加速度

$$a = G\frac{m_1 m_2}{r^2}/m_2 = G\frac{m_1}{r^2};$$

方向指向 m_1。于是 m_1 的运动方程写为 $m_1\omega^2 r = G\frac{m_1 m_2}{r^2} + m_1 G\frac{m_1}{r^2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)$；

化简即得 $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\omega^2 r = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$。

此即③式。可见，当讨论二质点的相对运动时，只要用折合质量代替实际质量，其作用与考