考研直通车 考研数学系列丛书

普通高等教育“十二五”规划教材

考研数学
要点口诀与解题技巧

主编 余星

◆本书特色◆

◎最基础角度入手，详解考查要点

◎典型真题实例，紧扣考纲透彻深入剖析

◎集中提炼要点精华，贴心提示误区失分点

◎揭秘考题绝招，指点思路技巧易错点

国防工業出版社
National Defense Industry Press

考研数学要点口诀与解题技巧

主编　余　星

参编　陈国华　廖小莲　李军成　孙红果

　　　钟月娥　李炳君　谢　淳　唐　振

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书涵盖“高等数学”(微积分)、“线性代数”“概率论与数理统计”三门课的主要内容,以总结式、口诀化的模式总结了大学数学的知识点和解题技巧。本书第一部分总结每章对应的解题技巧,第二部分是配套练习。这些题目来自于相关课程中的经典例子和练习、近15年考研真题以及自编题,具有一定的代表性。对照第一部分总结的解题技巧基本上可以顺利解决配套练习的题目。本书最后给出了配套练习的详细解答过程,解答过程一方面是对第一部分解题技巧的梳理与回顾,另一方面也给读者展示了解大学数学题的思想和方法。

本书既可以作为数学考研辅导教材,也可以作为大学数学课程学习的辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学要点口诀与解题技巧/余星主编.—北京:国防工业出版社,2015.4

ISBN 978-7-118-10045-7

Ⅰ.①考... Ⅱ.①余... Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第097830号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 14 **字数** 322千字

2015年4月第1版第1次印刷 **印数** 1—3000册 **定价** 35.00元

国防书店:(010)88540777　　发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755　　发行业务:(010)88540717

前　　言

本书是编者结合多年的教学经历总结了大学数学“高等数学”“线性代数”“概率论与数理统计”这三门课的相关解题技巧精心编著而成的。

本书以总结式、口诀化的模式总结了大学数学的知识点和解题技巧。它可以是考研辅导教材,也可以是大学数学课程学习的辅导教材。编者力求用最简洁的语言总结出解题技巧和步骤。如在求极限部分,总结出了13种求极限的常见方法(几乎包含了所有的计算方法),在求三重积分时把计算方法总结为“穿、切、柱面、球面”这几个关键词,使读者一看到三重积分就想起计算方法。再如,在求二元离散型随机变量函数的分布时总结的解题口诀为“改头换面”,连续型随机变量求概率的口诀为“图加图”。像这样的解题技巧口诀在本书中非常多。

本书的第一部分一般先总结每章对应的解题技巧,细心的读者会发现每个专题的知识点和解题技巧所占的版面并不是很多,这正体现了“浓缩是精华”,在讲解相关技巧时,只列出了对应的例子,基本上没有给出详细的解题过程,希望读者能对照技巧自己动手体验一下豁然开朗的感觉。第二部分是配套练习,这些题目来自于相关课程中的经典例子和练习题、近15年考研真题以及自编题,具有一定的代表性。希望读者在做这些题目时能尽量对照前面总结的技巧。本书最后给出了配套练习的解答过程,解答过程一方面是对第一部分解题技巧的梳理与回顾,另一方面也给读者展示了解大学数学题的思想和方法。

由于时间仓促,书中错误之处在所难免,望读者批评指正。

编　者

目　录

第一部分　高等数学

第一章　极限的求法

一、极限的求法

在极限存在的前提下，函数极限实际上包括了数列极限，函数极限的求法也适合于求数列极限，其理论依据是极限存在的归结原则。极限的求法可以归纳为如下几种：

1. 等价替换

严格来说，在求极限时优先考虑到等价替换这种方法，因为通过等价替换后可以使要求极限的式子变得相对简单。常用的等价替换如下：

当$\odot\to 0$时，$\sin\odot\sim\odot$，$\tan\odot\sim\odot$，$\arcsin\odot\sim\odot$，$\ln(1+\odot)\sim\odot$，$e^{\odot}-1\sim\odot$，$a^{\odot}-1\sim\odot\ln a$，$1-\cos\odot\sim\frac{1}{2}\odot^2$，$(1+\odot)^{\alpha}-1\sim\alpha\odot$，$\log_a(1+\odot)\sim\frac{1}{\ln a}\odot$，$\arctan\odot\sim\odot$。

其中$\odot$表示某一个整体，不仅仅指x，值得注意的是，以上等价替换必须要求$\odot$是趋于0的。通常要构造等价替换的式子出来。一般地，等价替换方法要配合其他方法使用。

2. 构造等价替换的式子

有些式子从表面上看不能用等价替换的方法，但经过变换后就可以使用了。

（1）当$x\to 0$时，$e^x-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)\sim x-\sin x$。

读者可以尝试当$x\to 0$时，$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})\sim ?$

（2）出现 ln 应联想到$\ln(1+\odot)\sim\odot$（当$\odot\to 0$时）。如当$x\to 1$时，$\ln(x^2-2x+2)=\ln(1+x^2-2x+1)\sim x^2-2x+1$。

3. 洛必达法则

值得注意的是，一般先要作等价变换再用洛必达法则，否则对一个复杂式子求导只会越求越复杂。其次，当用洛必达法则求极限时，出现极限不存在的情况要反思是否极限真的不存在，还是洛必达法则失效了，此时要用其他方法重新判断。

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{3}{2}$$

如果第三步不先用等价替换$\ln(1+x)\sim x$而直接求导的话只会越来越复杂。要注意的是，洛必达法则只能用在乘除法中，不能用在加减法中。例如：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-(\sqrt{1-x}-1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x}{x}=1$$

该做法是错误的。

另外，洛必达法则在使用时需要确定函数在极限点是否可导。如果题目没有说明函数在极限点可导，就不能盲目地用洛必达法则求导。

4. 取对数

当被求极限的式子形式为 $f(x)^{g(x)}$ 时，一般考虑先取对数，然后联想到 $\ln(1+\odot)\sim\odot$，这种方法非常重要，如果不用这种方法的话很容易出现错误，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，有的人认为当 $x\to\infty$ 时，$1+\frac{1}{x}\to1$，而 1 的任何次方都为 1，所以原式极限为 1，这是错误的。正确的做法是令 $L=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，则 $\ln L=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim x\cdot\frac{1}{x}\to1$，所以 $L\to\mathrm{e}$。

注意用这种方法求出极限后再取指数，即若 $L\to2$，则原式 $\to\mathrm{e}^2$，如果忘记这点，对于填空题损失就大了。出现 $f(x)^{g(x)}$ 时，用取对数的方法，而不需要硬套重要极限的形式。一般出现 $(f(x)^{g(x)}-$常数$)$ 的形式时也进行类似处理。

例如：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1$$

令 $L=\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}$，则

$$\ln L=2x\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)\Rightarrow L=\mathrm{e}^{2x\ln\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}$$

所以

$$\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1=\mathrm{e}^{2x\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}-1\sim2x\ln\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)$$

$$=2x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right)\sim2x\,\frac{\cos x-1}{2}\to0$$

这道题也可以用取对数法先求出前部分极限，再将极限减 1 得到结果。

又如：

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$$

令 $L=x^x\Rightarrow\ln L=x\ln x\Rightarrow L=\mathrm{e}^{x\ln x}$，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1$$

与没有减去常数的情形比较，取完对数后要“回去”，若没有减常数时取对数求完极限后“回去”。

5. 出现根号，一般先要有理化

例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\arcsin^2 x}$$

有一类极限虽然有根号,但却是开不同次方,如:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-2x}$$

这是一个$\infty-\infty$型的极限,需要变成相乘的形式:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

再换元,拆开用等价替换。

或者采用如下方法解:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right]$$

再用后面介绍的方法 8 做。

6. 出现 $x\to\infty$ 构造$\frac{1}{x}$

并不是一定要这样处理,要视具体题而确定合适的方法。例如:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to 0}(\sin t+\cos t)^{\frac{1}{t}}\text{(出现}f(x)^{g(x)}\text{形式取对数)}$$

7. 被求极限的式子含有阶乘

此时利用级数收敛的必要条件,即若$\sum u_n$收敛,则$u_n\to 0$,如$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$,构造级数$\sum\frac{3^n}{n!}$,令$u_n=\frac{3^n}{n!}$,则$\frac{u_{n+1}}{u_n}\to 0$。所以级数$\sum\frac{3^n}{n!}$收敛,于是$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$。

8. 分子为比较复杂的式子,而分母为 x^k 的形式

此时可以利用泰勒公式展开法。在此之前要先了解多项式除以多项式的极限求法。

(1) 求极限的形式为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}\cdots+b_0}\quad(a_n\neq 0,b_m\neq 0)$$

当$n<m$时,极限$l=0$;当$n>m$时,极限$l=\infty$;当$n=m$时,极限$l=\frac{a_n}{b_m}$(次数一样时极限为最高的次数系数比)。

实际上这种情形的极限由最高次数决定。

(2) 求极限的形式也为多项式除以多项式,但趋近方式为$x\to 0$时的极限:当分子的最低次数小于分母的最低次数时,极限$l=\infty$;当分子的最低次数大于分母的最低次数时,极限$l=0$;当最低次数相同时,极限等于最低的次数系数比。

(3) 常用函数的展开式有：

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$ （$\sin x$ 为奇函数，展开式中只含奇数次项）

$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$ （$\cos x$ 为偶函数，展开式中只含偶数次项）

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ （类似于以 $-x$ 为公比，1 为首项的等比级数）

同理，有

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \cdots$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$\ln'(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \text{（一项都不缺）}$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{1}{2!}a(a-1)x^2 + \frac{1}{3!}a(a-1)(a-2)x^3 + \cdots$$

例，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$，在不影响理解和结果的条件下，可以作以下处理：

因为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots, \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

所以

$$\text{分子} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots$$

$$\text{原式} = \frac{1}{6}\left(\text{因}\frac{a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots}{x^3} \to 0\right)$$

正式的格式为

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

有时候也不一定是分子为比较复杂的式子，分母为 x^k 的形式，当被求极限的式子含熟悉的 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 等以外都是多项式时，都可以考虑用泰勒公式展开。

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - n^2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$，把 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 展开就可以了。

例，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 e^{2x} + \ln(1 - x^2)}{x\cos x - \sin x}$，展开后利用多项式相除的极限求法，即 $\lim\limits_{x\to 0}$ 多项式/多项式时的极限求法。

这种求极限的方法在 2013 年考研试题中出现了。如数一的第一题：

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \arctan x}{x^k} = c \neq 0$ 求 k, c。

这道题只需要把 $\arctan x$ 展开再按多项式除法求极限即可。

再如 2013 年数三第一大题：

$$\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}\to 1$$

有些参考答案给得比较复杂，事实上只需要把 $\cos x,\cos 2x,\cos 3x$ 展开，也不要展开很多项，根据多项式极限只需要找出最低次即可。

再如含抽象函数的极限，也要用到泰勒展开式做。

例如，设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x+f(x)}{x^2}=?$

因 $f(x)$ 的表达式及性质未知，所以不能随便用类似于洛必达法则的方法，这题可以考虑用泰勒公式展开做：

$$\frac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=\frac{2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\cdots+xf(x)}{x^3}\to -\frac{4}{3}+\frac{2+f(x)}{x^2}\to 1$$

所以

$$\frac{2+f(x)}{x^2}\to\frac{7}{3}$$

又

$$\frac{2\cos x+f(x)}{x^2}=\frac{2\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-\cdots\right)+f(x)}{x^2}\to -1+\frac{2+f(x)}{x^2}\to\frac{4}{3}$$

另外，在求参数时也可以考虑泰勒公式展开法。

例如，设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-ax-bx^2}{x^2}=2$，求 a,b 的值。

9. 一部分有界一部分趋于 0，则乘积极限为 0

连续函数的极限值等于函数值，注意被求极限的式子 $=f(x)g(x)$，而 $f(x)\to A\neq 0$，则原式等价于求 $Ag(x)$ 的极限：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

若在第一步中不把 $\frac{1}{1+\cos x}$ 分离出来直接用洛必达法则做，只会越求导越复杂。

10. 利用定积分的定义求极限

当被求极限的式子为一串和式时，考虑到定积分的定义。事实上，有时一串和式求极限可以用两边夹求极限，但对于稍微有难度的考试，不是简单的放大缩小就可以的，下面详细讲解这种方法。

利用积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 的步骤：

(1) 通过变形,得 $a_n = \sum f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$。

(2) 确定被积函数 $f(x)$ 和积分限 a,b 其中 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}$($k$ 为 i 的第一个取值),$b=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}$($m$ 为 i 的最后一个取值)。

例如,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}}\right)$,答案为 $2(\sqrt{3}-1)$。

但有一类和的极限,表面上可以用积分来做,但在变形中总是差那么一点时,就需要放大、缩小再做。如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}$,首先自然想到要把通项提取 $\frac{1}{n}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n^2}}$$

除了 $\frac{1}{n}$ 之外的部分为 $\frac{\tan\frac{i}{n}}{1+\frac{i}{n^2}}$,它不是 $f\left(\frac{i}{n}\right)$ 的形式,此时不能直接用积分做。需要放大、缩小,利用两边夹来做。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n^2}}$$

系数越来越小,所以可以将被求极限的式子放大、缩小,即

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n\tan\frac{i}{n}}{n^2+i}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{\tan\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n^2}}$$
$$\leqslant\frac{1}{1+\frac{n}{n^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n}$$

又

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\to 1,\ \frac{1}{1+\frac{n}{n^2}}\to 1$$

因此上式左端极限为 $\int_0^1\tan x\mathrm{d}x$,右端极限也为 $\int_0^1\tan x\mathrm{d}x$,所以原式极限也为左端极限为 $\int_0^1\tan x\mathrm{d}x$。

11. 利用单调有界求迭代数列的极限

一般求迭代数列的极限较难,难在证明极限存在上,而证明极限存在的求法常用单调

有界原理证明，即证数列单调递增有上界，或单调递减有下界即可。而同样地对于有难度的考试，单调有界的验证也不是很容易，在此列举出所有关于迭代数列证明收敛的相关定理，有的会给验证带来很大的方便，只是在使用时（特别是大题）要事先预证结论，然后才能使用。所以应理解并能证明、运用下面的结论。

有界变差数列收敛定理：若数列$\{x_n\}$满足条件

$$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1| \leqslant M$$

则称数列$\{x_n\}$为有界变差数列，且有界变差数列一定收敛。

证：令$y_1 = 0, y_n = |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1|$，那么数列$\{y_n\}$递增，由题意$\{y_n\}$有上界$M$，则$\{y_n\}$收敛：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，使$n > m > N$有$|y_n - y_m| < \varepsilon$，即

$$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$$

而

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$$

由柯西准则知数列$\{x_n\}$收敛。

压缩数列：若数列$\{x_n\}$满足条件

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant r|x_{n-1} - x_{n-2}|, 0 < r < 1$$

则称数列$\{x_n\}$为压缩数列，且压缩数列一定收敛。

证明：由题意，有

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant r^2 |x_{n-2} - x_{n-3}| \leqslant \cdots \leqslant r^{n-2} |x_2 - x_1|$$

所以

$$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1| \leqslant$$

$$(r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + 1)|x_2 - x_1| < \frac{|x_2 - x_1|}{1 - r} = M$$

由有界变差数列一定收敛，得数列$\{x_n\}$收敛。

定理：若$x_{n+1} = f(x_n)$，且存在$\lambda: 0 < \lambda < 1$使$|f(x_n) - f(x_{n-1})| < \lambda |x_n - x_{n-1}|$，则$\{x_n\}$收敛。

推论：若$x_{n+1} = f(x_n)$，且存在$\lambda: 0 < \lambda < 1$使$|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$，则$\{x_n\}$收敛。

为了节约篇幅，定理和推论的证明省略，证明过程可以在相关参考中找到。读者可以根据上面介绍的结论求其他参考书上的迭代数列的极限。

但是有的题目能比较简单地判定单调性和有界性，就没有必要用这种方法。

例如，设

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), a > 0$$

因为

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} 2 \cdot \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}$$

说明数列$\{a_n\}$有下界$\sqrt{a}$，以下只需要证明数列单调递减。而如果用上面介绍的方法，则

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)$$

因为

$$a_n\geqslant\sqrt{a}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{a}\Rightarrow x^2\geqslant a$$

于是 $|f'(x)|\leqslant 1$，因此数列收敛。需注意的是，虽然由 $a_{n+1}\geqslant\sqrt{a}$ 不一定能推出 $a_n\geqslant\sqrt{a}$，因为第一项不确定与 $\sqrt{a}$ 的大小，但由于数列的极限与有限项的取值无关，所以即使第一项小于 $\sqrt{a}$，也可以修改成大于 $\sqrt{a}$。

还可以这样做：由 $a_n\geqslant\sqrt{a}\Rightarrow a\leqslant a_n{}^2$，则

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_n{}^2}{a_n}\right)=a_n$$

所以数列单调递减。

12. 含积分的式子求极限

若为变动限积分，则用到洛必达法则，须熟练掌握的是变动限积分求导的方法（将在后面详细讲解）。若为常数限积分，一般用到积分中值定理。

例如，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$。设 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

$$m\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$

左右两端都趋于 0，于是原式 $=0$。

13. 利用渐近线

如果 $y=f(x)$ 有倾斜渐近线 $y=kx+b$，则 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-kx$。所以若已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-ax-b=0$，则参数 a,b 分别为渐近线的斜率和截距。

二、极限的应用

1. 函数连续性的判断

$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，应特别注意分段函数在分界点处的连续性的判断，一般需要考察左极限、右极限和函数值三者是否相等。

2. 间断点的分类

须指出的是，可能的间断点一般为使原函数无意义的点或分段函数的分界点。

第一类间断点：$f(x_0+)$，$f(x_0-)$ 均存在。一是可去间断点，即 $f(x_0+)=f(x_0-)\neq f(x_0)$ 或 $f(x)$ 在 x_0 无意义；二是跳跃间断点，即 $f(x_0+)\neq f(x_0-)$。

注意第一类间断点的前提是左右极限都存在。

第二类间断点：$f(x_0+)$，$f(x_0-)$ 至少有一个不存在。

总之，先“怀疑”可能的间断点（使原函数无意义的点或分段函数的分界点），然后针对每个点求左右极限，再进行判断。有时候，分段函数并不直接给出。

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，须先将 x 视为不同区间上的常数，对 n 取极限最终得到关

于 x 的函数 $f(x)$，一般 $f(x)$ 为分段函数的形式。

在判定间断点的类别时要有耐心，按照定义判断。如 2013 年考研题：

$f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 可去间断点的个数为多少个？

3. 无穷小阶的比较

这个知识点读者可以在其他参考书上找到相关概念，此处不再赘述。在做无穷小阶的比较时通常要用到泰勒公式求极限。以下介绍下高阶无穷小的表示方式。若

$$f(x)\to 0,g(x)\to 0,\frac{f(x)}{g(x)}\to 0$$

则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，记为 $f(x)=o(g(x))$。注意：高阶无穷小是一个符号，它代表着一类函数，如当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^2}{x}\to 0$，则记 $x^2=o(x)$；又 $\dfrac{x^3}{x}\to 0$，则记 $x^3=o(x)$，因此 $o(x)$ 代表一类函数，这一类函数有一个共同的性质 $\dfrac{o(x)}{x}\to 0$，同理，符号 $o(x^2)$ 意味着 $\dfrac{o(x^2)}{x^2}\to 0$。

理解了这些符号，2013 年考研题数三中的第一题就简单了。

(2013) 当 $x\to 0$ 时，错误的是(D)。

A. $xo(x^2)=o(x^3)$　　B. $o(x)o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

4. 渐近线

(1) 水平渐近线：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=y_0\Rightarrow y=y_0$。

(2) 垂直渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Rightarrow x=x_0$。

(3) 倾斜渐近线：$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)-kx$。

三、闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的性质包括最值定理、介值定理、根的存在性定理，这在后面将详细讲到。

四、配套练习

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$。

2. 设 $a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛。

3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$。

4. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$。

5. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$。

6. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2g(x), x\leqslant 0\end{cases}$,其中$g(x)$是有界函数,则$f(x)$在$x=0$处(　　)。

A. 极限不存在　　B. 极限存在,但不连续　　C. 连续但不可导　　D. 可导

7. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$。

8. 设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数,且$f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$,若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to 0$时是比h高阶的无穷小,试确定a,b的值。

9. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$。

10. 把$x\to 0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, \beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t, \gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$,使排在后面的是前面一个的高阶无穷小,则正确的顺序是(　　)。

A. α,β,γ　　B. α,γ,β　　C. β,α,γ　　D. β,γ,α

11. 曲线$y=\dfrac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线方程为(　　)。

12. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$。

13. 设数列$\{x_n\}$满足$0<x<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$。

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求出极限;

(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

14. 当$x\to 0^+$时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　)。

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

15. 曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的渐近线条数为(　　)。

16. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$。

17. 当$x\to 0$时,$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,求a,b。

18. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x$。

19. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$。

20. 设函数$f(x)$由方程$y-x=e^{x(1-y)}$确定,则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=($　　$)$。

21. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}$。

22. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$。

23. 设数列$\{x_n\}$满足$x_0=1,x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$,证明$\{x_n\}$极限存在并求之。

24. 证明数列$\{x_n\}$收敛,其中$x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{3}{x_n}\right)$,证明$\{x_n\}$极限存在并求之。

25. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{2n}}{1+a^{2n}}$。

26. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$。

27. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$。

28. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2x-2\tan x}{1+\cos 4x}$。

29. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})(|x|<1)$。

30. 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$。

31. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$。

32. 求极限$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$。

33. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}$。

34. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}$。

35. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

36. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$。

37. 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2},x<0\\ 5,x=0\\ \dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x},x>0\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。