新题型解析思路365丛书

（初三）

数学

·与新教材同步·

开明出版社

最新题型解析思路 365 丛书

初三数学

（与新教材同步）

杨　瑜　钱　英　王汝娴　编

开　明　出　版　社

（京）新登字104号

最新题型解析思路365丛书
初三数学
（与新教材同步）
杨　瑜　钱　英　王汝娴　编
*
开明出版社出版发行
（北京海淀区车道沟8号）
新华书店北京发行所经销
新蕾印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张：9.375　字数：212千
1995年12月北京第1版　1996年7月第2次印刷
印数：10,001—15,000册
ISBN 7－80077－228－4/G·161　　定价：9.50元

内 容 简 介

本书以教学大纲为准绳，与九年义务教育三年制、四年制初三数学新教材内容对照编写。内容包括：每章重点和难点，基本题型和最新题型，思路与解答，巩固练习题以及答案与提示。

本书所选题目难易适中，主要适合一般学习水平的学生阅读，也编选了部分较难的题目，供较高水平的学生阅读。通过阅读本书，能帮助同学们巩固所学知识，提高分析和解答试题的能力，并可供广大教师参考。

编者的话

为配合教育改革，提高教学质量，使同学们尽早地、较好地、准确地适应最新题型，灵活运用课堂所学内容，训练思维、增长知识、开阔视野、提高应考能力、争取好成绩，我们组织北京市极富教学经验的高级教师编写了这套《最新题型解析思路365丛书》。丛书于1992年出版发行以来，深受读者们的欢迎。现应广大读者的要求，我们又组织了人力重新编写了这套丛书，把她奉献给广大同学和老师。

丛书以教学大纲为准绳，结合各科新教材内容选题，由浅入深，先易后难。其中绝大部分题目适合一般学习水平的同学阅读，旨在巩固基础知识，启发解题思路，培养分析问题和解决问题的能力。另外，还选编了部分较难的题目，供较高水平的同学提高解题技巧，开阔知识领域，加深对所学知识的理解。

丛书各册均与九年义务教育三年制、四年制初级中学新教材对照编写，其特点是：一、内容新。所选试题均是各种书中出现的最新题型试题。二、容量大。丛书每册均覆盖该年级学年教科书的全部内容，特别是重点和难点，具有针对性和启发性。三、角度广。丛书取题多方位、多角度，涉及教科书和试题的各个方面，使同学们尽快地适应题型演变。四、易掌握。每题均从课本内容实际出发，深入浅出，易学易懂，启发思路，提高兴趣，从而达到巩固、深化所学知识的目的。

丛书所选题目，按照标准化考试要求，在能力型、潜隐型、客观型上都有所体现。每题均有答案，还附有解题思路、方法

和步骤。通过阅读本书，同学们可掌握解题的钥匙，做到举一反三，一通百通。

我们衷心地期望这套丛书，能成为同学们的良师，老师们的益友。

编 者

1995年4月

目　　录

代数第三册

几何第三册

代数第三册

第十二章　一元二次方程

重点和难点

本章主要内容是一元二次方程的解法和方程解应用题，一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系，以及与一元二次方程有关的方程（分式方程、无理方程等）的解法等，此外，还要学会简单的二元二次方程组的解法。

一元二次方程是中学数学的主要内容，在初中代数中占有重要地位，对承上启下有重要意义。

本章的重点是一元二次方程的解法，分式方程和无理方程的解法也是本章的一个重点，这是因为，除了整式方程以外，常见的代数方程主要是分式方程与无理方程，学了分式方程与无理方程之后，代数方程的知识就比较全面了，列方程解应用题是本章教材的另一个重点。

本章的难点是配方法，列方程解应用题也是难点，分式方程与无理方程的验根问题也是学生难以理解和掌握的。

总之，本章在初中代数中是非常重要的，要求一定要学好的。

一、填空题

1. 一元二次方程的一般形式为__________；一元二次方程

的解法有____________________。

思路与解答 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$；直接开平方法、配方法、求根公式法、因式分解法等。

2. 下列方程的根为

(1) $x^2-5=0$，$x_1=$______，$x_2=$______；

(2) $x^2-2x-4=0$，$x_1=$______，$x_2=$______；

(3) $x^2+3x+1=0$，$x_1=$______，$x_2=$______；

(4) $9x^2-12-1=0$，$x_1=$______，$x_2=$______。

思路与解答 化成标准形 $(x+q)^2=r$

从 $x+q=\pm\sqrt{r}$，得 $x=-q\pm\sqrt{r}$，

(1) 从 $x^2=5$，得 $x=\pm\sqrt{5}$，$\therefore x_1=\sqrt{5}$，$x_2=-\sqrt{5}$。

(2) 为把左边化成 $(\quad)^2$ 的形式，两边加 1，得

$(x-1)^2=5$，$\therefore x-1=\pm\sqrt{5}$，$\therefore x_1=1+\sqrt{5}$

，$x_2=1-\sqrt{5}$。

(3) 为把左边化成 $(\quad)^2$ 的形式，两边加$\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，

得 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，$\therefore x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\therefore x_1=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2},x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

(4) 为使 x^2 的系数成为 1，两边除以 9，得

$$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{1}{9},$$

为把左边化成 $(\quad)^2$ 的形式，两边加$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，得

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9},\therefore x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$x_1=\frac{2+\sqrt{5}}{3},x_2=\frac{2-\sqrt{5}}{3},$$

注：如果把（2）化成 $(x-1)^2=5$，（3）化成 $(2x+3)^2=5$，（4）化成 $(3x-2)^2=5$，那么都是（1）的 $x^2=5$ 的形式，所以也可以用（1）解。

巩固练习

（1）方程 $x^2-\sqrt{625}=0$ 的根为 x_1 ______，x_2 ______。

（2）方程 $4x^2-25=0$ 的根为 x_1 ______，x_2 ______。

（3）方程 $\frac{x^2}{5}+0.7=1$ 的根为 x_1 ______，x_2 ______。

（4）方程 $25(x-2)^2-16=0$ 的根为__________。

答案与提示　（1）5，-5，（2）$\frac{5}{2}$，$-\frac{5}{2}$，（3）$\frac{\sqrt{6}}{2}$，$-\frac{\sqrt{6}}{2}$，（4）$x_1=\frac{14}{5}$，$x_2=\frac{6}{5}$。

3. 下列方程的根为

（1）$x^2=x$，$x_1=$______，$x_2=$______；

（2）$4x^2+24x=0$，$x_1=$______，$x_2=$______；

（3）$\sqrt{2}x^2-\sqrt[3]{2}x=0$，$x_1=$______，$x_2=$______；

（4）$(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$，$x_1=$______，$x_2=$______。

思路与解答　（1）$x^2=x$，$x^2-x=0$，$x(x-1)=0$，

$\therefore x_1=0$，$x_2=1$　　所以应填 0，1

（2）$4x^2+24x=0$，$4x(x+6)=0$，$\therefore x_1=0$，$x_2=-6$

所以应填 0，-6

（3）$\sqrt{2}x^2-\sqrt[3]{2}x=0$，$x\cdot(\sqrt{2}x-\sqrt[3]{2})=0$

$$\therefore x_1=0, x_2=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt[6]{32}}{2}$$

所以应填　0，$\frac{\sqrt[6]{32}}{2}$

(4) $(1-\sqrt{2})x^2=(1+\sqrt{2})x$，$(1-\sqrt{2})x^2-(1+\sqrt{2})x=$，$x[(1-\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})]=0$，$\therefore x_1=0$，$x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{2}}{-1}=-3-2\sqrt{2}$$

所以应填　　　0，$-3-2\sqrt{2}$

注：解以上这些方程的时候，不能把方程两边的公因式 x 约去，否则就会使方程失去一个根 $x=0$。

4. 已知方程 $3x^2-19x+m=0$ 的一个根为 1，则 $m=$_______，另一个根为______。

思路与解答　将 $x=1$ 代入原方程得 $3\times1^2-19\times1+m=0$，

$\therefore m=16$，这时原方程为 $3x^2-19x+16=0$，

$(x-1)(3x-16)=0$，$\therefore$另一根为 $x=\frac{16}{3}$，所以应填 16，$\frac{16}{3}$。

巩固练习

(1) 方程 $(x-2a)^2=4a^2-4ax$ 的根为______。

(2) 方程 $x^2+3x-10=0$ 的根为____________。

(3) 方程 $-x^2+18=-3x$ 的根为____________。

答案与提示　(1) $x^2-4ax+4a^2=4a^2-4ax$，$\therefore x^2=0$ 所以 $x_1=x_2=0$，(2) 因式分解得 $(x-2)(x+5)=0$，$\therefore x_1=2$，$x_2=-5$ (3) 方程变为 $x^2-3x-18=0$，分解因式得 $(x-6)(x+3)=0$，$\therefore x_1=6$，$x_2=-3$　　应填 $x_1=6$，$x_2=-3$

5. 方程　$6x^2-5x-3=0$ 的根为 $x_1=$______，$x_2=$______。

思路与解答　把方程变为　$x^2-\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}=0$，

$x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{2}$，$x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{2}$。

$x^2-\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{12}\right)^2$，

$\left(x-\frac{5}{12}\right)^2=\frac{97}{144}$，$x-\frac{5}{12}=\pm\frac{\sqrt{97}}{12}$，

$\therefore x_1=\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{97}}{12}=\frac{5+\sqrt{97}}{12}$；$x_2=\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{97}}{12}=\frac{5-\sqrt{97}}{12}$。

应填　$\frac{5+\sqrt{97}}{12}$，$\frac{5-\sqrt{97}}{12}$

6. 方程 $3x^2+2x-6=0$ 的根为 $x_1=$______，$x_2=$______，

思路与解答　把原方程变为　$x^2+\frac{2x}{3}=2$，

把方程的两边各加上$\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$x^2+\frac{2}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=2+\left(\frac{1}{3}\right)^2,\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{19}{9}$。

$$\therefore x+\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$\therefore x_1=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{19}}{3}=\frac{-1+\sqrt{19}}{3},x_2=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{19}}{3}=\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$$

应填　$\frac{-1+\sqrt{19}}{3}$，$\frac{-1-\sqrt{19}}{3}$。

巩固练习

（1）填上适当的数，使下式成恒等式 x^2-6x+______$=(x-$______$)^2$

（2）方程 $x^2+x-72=0$ 的根为________。

（3）方程 $6x^2+x-2=0$ 的根为________。

答案与提示 （1）9，3，（2）$x_1=8$，$x_2=-9$，（3）$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{2}{3}$

7. 用公式法求下列方程的根为

（1）$7x^2-11x-6=0$，$x_1=$______，$x_2=$______。

（2）$2x^2+8x-7=0$，$x_1=$______，$x_2=$______。

思路与解答 （1）$7x^2-11x-6=0$，这里 $a=7$，$b=-11$，$c=-6$，$b^2-4ac=(-11)^2-4\times7\times(-6)=289$。

$$x=\frac{11\pm\sqrt{289}}{2\times7}=\frac{11\pm17}{14}$$

$$\therefore x_1=\frac{11+17}{14}=2, x_2=\frac{11-17}{14}=-\frac{3}{7}$$

所以应填 2，$-\frac{2}{7}$

（2）$2x^2+8x-7=0$，这里 $a=2$，$b=8$，$c=-7$

$$b^2-4ac=8^2-4\times2(-7)=120$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{120}}{4}=\frac{-8\pm2\sqrt{30}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{30}}{2}$$

所以得 $x_1=\frac{-4+\sqrt{30}}{2}$，$x_2=\frac{-4-\sqrt{30}}{2}$

应填$\frac{-4+\sqrt{30}}{2}$，$\frac{-4-\sqrt{30}}{2}$

8. 用公式法求方程 $x^2-(2-2\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2}=0$ 的根为______。

思路与解答 这里 $a=1$，$b=-(2-2\sqrt{2})$，$c=3-2\sqrt{2}$）. $b^2-4ac=(-2+2\sqrt{2})^2-4(3-2\sqrt{2})=0$。

$$x=\frac{2-2\sqrt{2}\pm0}{2}=1-\sqrt{2}$$

所以应填 $x_1=x_2=1-\sqrt{2}$

注：在这个方程里，$b^2-4ac=0$，这个方程有两个相等的根。

巩固练习

(1) 用公式法求方程 $3x^2-5x-2=0$ 的根为________。

(2) 用公式法求方程 $2x^2+2x-1=0$ 的根为________。

(3) 用公式法求方程 $0.09x^2-0.21x+0.1=0$ 的根为________。

答案与提示 (1) $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$, (2) $x_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, (3) $x_1=\frac{5}{3}$, $x^2=\frac{2}{3}$

9. 当 $b^2-4ac>0$，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为________________。

思路与解答 用配方法把原方程变形为

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，因此当 $b^2-4ac>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

10. 如方程 $9x^2-(m+6)x+m-2=0$ 的两根相等，则 $m_1=$______，$m_2=$______。

思路与解答 $\Delta=[-(m+6)]^2-4.9(m-2)$

$=m^2+12m+36-36m+72=m^2-24m+108$

如果要使方程 $9x^2-(m+6)x+m-2=0$ 的两根相等，必须 $\Delta=0$，$\therefore m^2-24m+108=0$

$$(m-6)(m-18)=0, m_1=6, m_2=18$$

所以应填 6，18

巩固练习

(1) 如方程 $kx^2+4x+1=0$ 有两个相等的实数根，则 $k=$__

____。

(2) 如方程 $9x^2-kx+4=0$ 有两个相等的实数根，则 $k=$____。

(3) 如方程 $kx^2-(2k+1)x+k=0$，有两个相等的实数根，则 $k=$______。

答案与提示 (1) 4，(2) ±12，(3) $-\frac{1}{4}$

11. 两个连续奇数的积是 195，则两个数为______。

13. 如果方程 $x^2+px+g=0$ 的两个根是 x_1、x_2，那么 $x_1+x_2=0$______，x_1、$x_2=$______。

思路与解答 根据连续奇数的意义，可以知道，两个连续奇数的差是 2，所以设其中一个数是 x，那末另一个数就是 $x+2$ 或 $x-2$，现设另一奇数是 $x+2$。

根据题意，列得方程 $x(x+2)=195$

$\therefore x^2+2x-195=0$，$(x-13)(x+15)=0$

$\therefore x_1=13$，$x_2=-15$。因奇数可以是正数，也可以是负数，所以 $x=13$ 和 $x=-15$ 都适合题意。

当 $x=13$ 时，$x+2=15$；

当 $x=-15$ 时，$x+12=-13$；

所以应填 13 和 15 或 −13 和 −15

12. 有一个两位数等于其数字之积的 3 倍，其十位数字较个位数字小 2，则此两位数为________。

思路与解答 设十位数字是 x，则个位数字是 $x+2$，这个两位数是 $10x+(x+2)$。

依题意有 $10x+(x+2)=3x(x+2)$

整理得 $3x^2-5x-2=0$ $(x-2)(3x+1)=0$。

$\therefore x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{3}$（不合题意，舍去）

∴两位数为 $10x+(x+2)=10\times2+(2+2)=24$，应填24。

巩固练习

（1）有两个数，它们的积是45，它们的差是4，则这两位数为________。

（2）两个数和是$-\frac{5}{9}$，积是$-\frac{2}{27}$，则这个数为______。

答案与提示 （1）5，9或-5，-9；（2）$\frac{1}{9}$，$-\frac{2}{3}$

13. 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=0$ ______，$x_1\cdot x_2=$______。

思路与解答 ∵ $(x-x_1)(x-x_2)=0$

∴ $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$。由此得 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$，所以应填$-p$，q

14. 已知 $x_1=\frac{4}{5}$，$x_2=-3\frac{1}{2}$，则一元二次方程为______。

思路与解答 设所求的一元二次方程为

$x^2+px+q=0$（二次项系数作为1），那末

$$p=-\left[\frac{4}{5}+\left(-3\frac{1}{2}\right)\right]=-\left(-\frac{27}{10}\right)=\frac{27}{10},$$

$q=\frac{4}{5}\times\left(-3\frac{1}{2}\right)=-\frac{14}{5}$，所以所求的方程为

$x^2+\frac{27}{10}x-\frac{14}{5}=0$，去分母，得 $10x^2+27x-28=0$

巩固练习

（1）已知 $4x^2-11x+6=0$ 有一个根为2，则它的另一个根为______。

（2）已知 $x_1=-\frac{3}{5}$，$x_2=\frac{5}{3}$，则一元二次方程为______。

答案与提示 （1）$x=\frac{3}{4}$；（2）$15x^2-16x-15=0$

15. 已知方程 $2x^2+3x-5=0$，不解方程，可求得两根的平方和为______，两根的负倒数和为______。

思路与解答 设方程的两个根为 x_1 和 x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2}, x_1x_2=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{5}{2}\right)=7\frac{1}{4}$$

而 $$-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$=-\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{5}$$

所以得两根平方和为 $7\frac{1}{4}$，两根的负倒数的和是 $-\frac{3}{5}$

16. 已知方程 $2x^2+4x+m=0$ 的两根的平方和是 34，则 m 值为______。

思路与解答 设原方程的两个根为 x_1 和 x_2，那末 $x_1+x_2=-\frac{4}{2}=-2$，$x_1x_2=\frac{m}{2}$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-2)^2+2\left(\frac{m}{2}\right)=4-m$

根据题意，得 $x_1^2+x_2^2=34$，$\therefore 4-m=34$，$\therefore m=-30$

应填 -30

巩固练习

(1) 设 x_1 和 x_2 是方程 $x^2+4x-6=0$ 两个根，不解这个方程，求 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$ 的值为______。

(2) 已知方程 $x^2+mx+21=0$ 的两个根平方和是 58，则 m