高校核心课程学习指导丛书

线性代数与解析几何学习辅导

XIANXING DAISHU YU JIEXI JIHE XUEXI FUDAO

申伊塃　郑业龙　陈效群　张韵华／编著

中国科学技术大学出版社

高校核心课

申伊塃 郑业龙 陈效群 张韵华 / 编著

线性代数与解析几何学习辅导

XIANXING DAISHU YU JIEXI JIHE
XUEXI FUDAO

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是“线性代数与解析几何”课程的辅导参考书. 按照《线性代数与解析几何》(陈发来、陈效群、李思敏、王新茂,高等教育出版社)教材的章节安排本书的内容次序,依次为向量与复数、空间解析几何、线性方程组、矩阵与行列式、线性空间、线性变换、欧几里得空间、实二次型. 每节有内容提要和多层次的例题演示与分析,每章给出上列《线性代数与解析几何》教材的习题和参考答案,附录中有几份近几年中国科学技术大学期中和期终考试的试卷.

希望本书能帮助正在学习“线性代数与解析几何”课程的学生开阔视野,为他们及时解惑,同时给考研的学生提供一份复习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何学习辅导/申伊塃等编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2015.5

ISBN 978-7-312-03687-3

Ⅰ. 线… Ⅱ. 申… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 ②解析几何—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 064829 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷 合肥学苑印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 22.25
字数 424 千
版次 2015 年 5 月第 1 版
印次 2015 年 5 月第 1 次印刷
定价 45.00 元

前　　言

几何、代数和分析组成当代数学学科的三大主干分支，而解析几何、线性代数和微积分是相应的入门基础课程. 线性代数被普遍认为是一门比较难学、难教的课程. 主要困难在于，线性代数的公理化体系太抽象. 经过该课程的学习后学生的抽象思维能力、空间想象能力和计算机应用能力都会有较大的提高.

本书是“线性代数与解析几何”课程的配套辅导参考书，适合于学生在课程学习中答疑解惑，也是课程复习和研究生考试的一份参考资料. 中国科学技术大学（非数学系）线性代数课程教材《线性代数与解析几何》由陈发来教授等编写，高等教育出版社 2011 年出版. 本书的章节逐一对应该教材的内容次序，依次为向量与复数、空间解析几何、线性方程组、矩阵与行列式、线性空间、线性变换、欧几里得空间和实二次型.

本书每章内容包括“内容提要”、“例题分析”和教材的习题，在附录 1 中给出教材中习题的参考答案或解题的提示，附录 2 中给出近几年中国科学技术大学的考试试卷.

本书选用的例题包括计算题、选择题、证明题和错例分析等多种题型. 例题覆盖面广、难易兼顾，以适应不同学习阶段和不同层次的需求. 在例题分析中精选典型例题演示和分析，例题中有启发性的提示或点评，以点代面拓展学生解题的思路，提高学生分析和解决问题的能力.

作为课堂教学的补充，本书将不同院系所需的专门内容扩充到例题和习题中，有些例题是定理证明. 对超出考研范围、有难度的例题，我们标以星号 (*)，供参考.

中国科学技术大学数学科学学院是首批全国理科人才培养基地，“线性代数与解析几何”课程是 2007 年国家精品课程和 2013 年共享课程，在课程建设中贯穿中国科学技术大学制定的“基础宽厚实，专业精新活，注重全面素质和创新精神”

的教学理念. 课程主持人陈发来教授严谨而开阔的课程录像点击率高, 已有多家网站下载.

编写本书的作者具有多年的教学经验, 他们参考北京大学、清华大学、上海交通大学、南开大学、山东大学、武汉大学和东南大学等高校教材、习题辅导、考研试题和课程考试试题汇集而成本书. 希望本书成为正在学习线性代数课程学生的课外辅导良师, 成为理工科考研或复习课程的学生的交流益友, 帮助学生掌握线性代数课程的精华, 提高其抽象思维能力和空间想象能力, 并为其他学科学生的学习、研究以及实际应用打下坚实的基础. 我们将收集本书的反馈意见, 不断修订和充实例题. 感谢博士生曾超、江金凤、孙玉财和周进, 他们都担任过课程辅导并完成了教材的习题, 给出了参考答案; 周进和曾超还为线性代数共享课程网上建设做了很多工作, 在此一并向他们表示感谢. 感谢中国科学技术大学出版社和教务处对出版本书的支持!

编著者

2015 年 2 月

目　次

第 1 章　向量与复数

1.1　向量的线性运算和坐标系

内 容 提 要

1. 向量

既有大小, 又有方向的量称为**向量**. 记为 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{a}$, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 称为向量的模, 长度为 1 的向量称为单位向量, 长度为 0 的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{O}$, 和向量大小相同、方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量, 记作 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的坐标表示

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是三个不共面的向量, 对空间中的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都存在唯一的有序实数组 (x,y,z), 使 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$, 称 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的仿射坐标或坐标.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标中的三个坐标轴 Ox,Oy,Oz 上的坐标（投影）分别为 x,y,z.

向量的模为: $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

利用向量运算可以简化许多几何问题计算, 其思想是将向量直观的几何性质转化为简便的代数运算.

3. 向量的加法和数乘

向量加法的几何描述: 平行四边形法则.

向量加法和数乘的坐标表示: 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,x_3),\boldsymbol{b}=(y_1,y_2,y_3)$, λ 为一个实数.

向量表示:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+y_1)\boldsymbol{e}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{e}_2+(x_3+y_3)\boldsymbol{e}_3,\\&\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{e}_1+\lambda x_2\boldsymbol{e}_2+\lambda x_3\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

分量表示:

$$\begin{aligned}&(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),\\&\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3).\end{aligned}$$

4. 向量的方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$ 与坐标轴 Ox,Oy,Oz 的夹角分别为 α,β,γ, 则 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\right),$$

并有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

5. 向量的共线与共面

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ,μ, 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\mathbf{0}.$$

向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是存在不全为零的实数 λ,μ,ν, 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\mathbf{0}.$$

设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为一组向量, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实数. 称向量

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n$$

为向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的**线性组合**.

如果存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0},$$

称 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为**线性相关**.

反之, 不是线性相关的一组向量称为**线性无关**. 也就是说, 如果上式成立, 则 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

点评　在空间解析几何中引入向量共线、共面、线性相关的基本概念, 为线性代数的难点（线性相关和线性无关）内容作了铺垫, 也为学习 n 维向量空间的内容提供了直观的几何实例, 益处多多.

例 题 分 析

例 1.1　求点 $P(3,-4,5)$ 到坐标原点以及各坐标轴的距离.

解　设点 P 到坐标原点、x 轴、y 轴和 z 轴的距离分别为 L_0,L_x,L_y,L_z, 则

$$\begin{aligned}
L_0&=\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}=5\sqrt{2},\\
L_x&=\sqrt{(-4)^2+5^2}=\sqrt{41},\\
L_y&=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34},\\
L_z&=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5.
\end{aligned}$$

例 1.2　求 z 轴上一点, 使与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 的距离相等.

解　设所求的点为 $M(0,0,z)$, 则由两点间的距离公式可得

$$\begin{aligned}
|AM|&=\sqrt{4^2+(-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{66-14z+z^2},\\
|BM|&=\sqrt{(-3)^2+(-5)^2+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}.
\end{aligned}$$

由题设 $|AM|=|BM|$, 所以

$$66-14z+z^2=38+4z+z^2,$$

解得 $z=14/9$, 故所求点为 $(0,0,14/9)$.

例 1.3　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴的正向的夹角都相等, 求此向量的方向余弦.

解　由假设知 $\alpha=\beta=\gamma$, 故得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1,$$

所以

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 1.4　求点 $M(a_1,b_1,c_1)$ 关于点 $N(a_2,b_2,c_2)$ 的对称点.

解 设所求点是 (x,y,z), 则

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x+a_1)=a_2 \\ \dfrac{1}{2}(y+b_1)=b_2 \\ \dfrac{1}{2}(z+c_1)=c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2a_2-a_1 \\ y=2b_2-b_1 \\ z=2c_2-c_1 \end{cases}.$$

故所求点是 $(2a_2-a_1,2b_2-b_1,2c_2-c_1)$.

例 1.5 已知 $\boldsymbol{a}$ 与轴 Ox 和 Oy 所夹角分别为 $\alpha=60°$, $\beta=120°$, 且 $|\boldsymbol{a}|=2$. 试求 $\boldsymbol{a}$ 坐标.

解 由题意得

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \boldsymbol{a}=(2\cos 60°,2\cos 120°,2\cos\gamma),$$

故

$$\boldsymbol{a}=(1,-1,\pm\sqrt{2}).$$

例 1.6 设单位向量 $\overrightarrow{OT}$ 与 z 轴的方向角为 30°, 另外两个方向角相等, 求 T 的坐标.

解 设 T 点的坐标为 (x,y,z), 方向角为 α,β,γ. 由

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

有

$$2\cos^2\alpha+\frac{3}{4}=1,\quad \cos\alpha=\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

又 $|OT|=1$, 得

$$(x,y,z)=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\pm\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

T 点的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

例 1.7 对任意非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 证明: 向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$ 线性无关.

证　设未知量 λ,μ,ν 对 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 有线性组合式

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+\nu(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0},$$

化简得

$$(\lambda+\mu+\nu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu+2\nu)\boldsymbol{b}+(\lambda-\mu+3\nu)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

列出未知量的方程组

$$\begin{cases}\lambda+\mu+\nu=0\\ \lambda-\mu+2\nu=0.\\ \lambda-\mu+3\nu=0\end{cases}$$

解方程组, 得到 $\lambda=0,\mu=0,\nu=0$, 方程组只有零解, 因此三个向量线性无关.

1.2　向量的数量积、向量积、混合积

内 容 提 要

1. 向量的数量积和投影

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**为一个实数, 数量积也称为**点乘**、**内积**. 它等于两个向量的模长与两个向量夹角的余弦的乘积, 记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$ 方向（可正可负）的单位向量. 向量的投影表示为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0\quad\left(\boldsymbol{b}^0\text{表示 }\boldsymbol{b}\text{ 的单位向量, }\boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right).$$

内积也可表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}.$$

在直角坐标系下, 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, 内积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$, 即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直.

两向量的夹角

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

数量积的运算性质: 对向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及实数 λ, 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},\\&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\\&(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}),\\&\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0,\quad \text{等号成立当且仅当 }\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

2. 向量的向量积

两个向量的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量. 向量积也称为**叉乘、外积**. 它的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直, 且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系；它的模等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积, 即

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 间的夹角.

在直角坐标系下, 给定两个向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

向量积运算性质: 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个向量, λ 为实数, 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\\&(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}),\\&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

3. 向量的混合积

给定三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的**混合积**. 它是一个数量. 也记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

混合积的几何意义: $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 表示的是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的“有向体积”. 即: 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为右手系时, 就是六面体的体积; 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为左手系时, 它是六面体体积的相反数. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

在直角坐标系下, 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 有

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

混合积运算性质: 设有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及实数 λ, 有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\\
&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=0,\\
&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}),\\
&(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\\
&(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).
\end{aligned}$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\{x_1,y_1,z_1\},\boldsymbol{\alpha}_2=\{x_2,y_2,z_2\},\boldsymbol{\alpha}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$ 共面

$$\Leftrightarrow \quad \text{混合积 } (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow$　存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$.

例题分析

例 1.8　用向量证明余弦定理.

证　在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{\alpha},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{\beta},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\boldsymbol{\gamma}^2=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}^2+\boldsymbol{\alpha}^2-2\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta},$$

有

$$||\overrightarrow{BC}||^2=||\overrightarrow{AC}||^2+||\overrightarrow{AB}||^2-2||\overrightarrow{AC}||||\overrightarrow{AB}||\cos\angle A.$$

注　当 $\cos\angle A=\pi/2$ 时即为勾股定理.

例 1.9 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,2,1),\boldsymbol{b}=(1,2,-2),|\boldsymbol{c}|=3$, 计算沿着向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 夹角平分线方向的向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

解 由题意得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{3}(2,2,1),\quad \boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}(1,2,-2),\\
&\tilde{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\frac{1}{3}(3,4,-1),\quad |\tilde{\boldsymbol{c}}|=\sqrt{26}/3,\\
&\boldsymbol{c}=\lambda\tilde{\boldsymbol{c}},\quad \lambda=\pm\frac{9}{\sqrt{26}},\quad \boldsymbol{c}=\pm\frac{3}{\sqrt{26}}(3,4,-1).
\end{aligned}$$

例 1.10 下列各式对吗? 为什么?

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^3$;

(2) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$;

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0$;

(4) 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;

(5) 若 $\boldsymbol{a}\neq 0$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

解 (1) 不对. (1) 式两端都是没有意义的, 既没有三个向量的数量积的定义, 也没有 $\boldsymbol{a}^3$ 的定义, 我们曾规定了 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$, 它实际上表示 $|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 不对. (2) 式左端为

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

可见, 只有当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时 (2) 式才成立.

(3) 不对. (3) 式是套用实数的平方差公式而得的, 但由于两向量的叉乘虽满足分配律, 但不满足交换律, 因此, 这些公式对叉乘运算不成立, 事实上, 有

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(-\boldsymbol{b})\\
&=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

(4)、(5) 不对. (4)、(5) 两式是套用实数的消去律, 由于两向量的点乘、叉乘运算都没有逆运算, 因此, 这种消去律是不成立的. 事实上, 由 (4) 式可得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0.$$

从而

$$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}).$$

由 (5) 式可得

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0.$$

于是

$$a \parallel (b-c).$$

例 1.11　证明下面恒等式:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2).$$

并说明它的几何意义.

证　由题意得

$$\begin{aligned}左边&=(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\&=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)=右边.\end{aligned}$$

几何意义: 平行四边形对角边的平方和等于四边的平方和.

例 1.12　设 $\boldsymbol{a}=(5,6,7),\boldsymbol{b}=(2,-2,1)$, 求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量及投影向量的长度.

解　由题意得

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+2^2+1}=3,\quad \boldsymbol{b}^0=(2/3,-2/3,1/3),\\&\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}^0=5\cdot2/3+6\cdot(-2/3)+7/3=5/3.\end{aligned}$$

例 1.13　已知 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$, 计算 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

解　由向量积的定义有 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$; 由数量积的定义有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=2$, 则

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

得

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$$

例 1.14　已知三角形的顶点 $A(1,2,3),B(3,4,5),C(-1,-2,7)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　设所求三角形的面积为 S, 则由向量积的定义可知

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

但

$$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\quad\overrightarrow{AC}=(-2,-4,4),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$
$$=16\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

所以
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+(-12)^2+(-4)^2}=2\sqrt{26}.$$

例 1.15 已知四面体的四个顶点为 $A(1,1,1),B(3,4,4),C(3,5,5),D(2,4,7)$, 试求该四面体的体积.

解 容易看出, 所求四面体的体积 V 是以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行六面体的体积的 1/6, 故
$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\,|.$$
而
$$\overrightarrow{AB}=(2,3,3),\quad \overrightarrow{AC}=(2,4,4),\quad \overrightarrow{AD}=(1,3,6).$$
所以
$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=6.$$
于是得到 $V=1$.

例 1.16 试证恒等式
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

证 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 φ, 则
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\sin^2\varphi+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cos^2\varphi=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

例 1.17 若向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, 向量 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直于向量 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, 求两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 因为
$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}),$$
即
$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0 \quad\Rightarrow\quad 7\boldsymbol{a}^2-15\boldsymbol{b}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0. \tag{1}$$