全国高等教育自学考试指定教材配套辅导丛书

工程数学——线性代数

应试指导及模拟试题

全国高等教育自学考试命题研究组 编

教材依据 魏战线 主编

JI SUAN JI ZHUAN YE

计算机类 威辅导

- 重点难点精讲
- 解题技巧分析
- 教材同步训练
- 考前实战演习

中国大地出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导

工程数学

线 性 代 数

应试指导及模拟试题

全国高等教育自学考试命题研究组　编

教材依据　魏战线　主编

中国大地出版社

内容简介

本书是由全国高等教育自学考试命题研究组专家编写的应试指导与题库，依据的是国家教育部考试中心于2002年开始，正式执行自学考试新计划下的新大纲、新教材。本书的试题经过精心设计，题型标准，应试导向准确，针对性强。考生只需用少量时间，通过实战练习，就能在较短时间内巩固所学知识，掌握要点，突破难点，把握重点，熟练掌握答题方法及技巧，适应考场氛围，顺利通过考试。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学—线性代数应试指导及模拟试题/全国高等教育自学考试命题研究组编.—北京：中国大地出版社，2002.6
(全国高等教育自学考试辅导丛书)
ISBN 7-80097-498-7

Ⅰ.工… Ⅱ.全… Ⅲ.工程数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.P288

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第012488号

责任编辑:王慧军
出版发行:中国大地出版社
社址邮编:北京市海淀区大柳树路19号 100081
电　　话:(010)-62183493(发行部)
传　　真:(010)-62183493
印　　刷:北京市顺义康华福利印刷厂
开　　本:787×1092 1/16
印　　张:220
字　　数:4000千字
版　　次:2002年6月第1版
印　　次:2002年6月第1次印刷
印　　数:1-3600册
书　　号:ISBN 7-80097-498-7/TP·7
总 定 价:300.00元

(凡购买中国大地出版社的图书，如发现印装质量问题，本社发行部负责调换)

前　言

国家教育部考试中心于2002年开始，正式执行自学考试新计划，同时使用新编的大纲和教材。

参加自考的学生渴求在考前能通过应试指导的帮助及模拟试题的演练，全面检查自己所学的知识是否扎实，考试大纲所要求的内容是否掌握，已经理解的知识能否完整、确切、简明地进行书面表述，并借此增强考生分析和解决实际问题的能力，帮助考生顺利通过考试。因此，为配合广大考生参加考试，并能顺利过关，我们利用多年积累的自考教学辅导资源和经验，全面系统地剖析了各门专业课程新大纲和教材的内容体系，组织编写了一套“全国高等教育自学考试应试指导及模拟试题”丛书，推向全国，以满足考生之急需，适应社会之需要。

本书在编写过程中，严格按照考试大纲的要求，以指定教材为基础，包括了所有考试的知识点，并着重突出重点和难点，充分体现了“在考察课程主体知识的同时，注重考查能力尤其是应用能力”的新的命题指导思想。

本书以习题为主，完全按照指定教材的结构，以章为单位。每章设“考试要求”、“知识重点”、“反馈测试题解”三部分。“考试要求”主要是考试大纲所规定的本章考核要求。“知识重点”主要是对该章的重点、要点内容的总结归纳；“反馈测试题解”则根据考试大纲对各知识点不同能力层次的要求，将知识及知识点下的细目以各种主要考试题型的形式编写，覆盖全部考核内容，适当突出重点章节，并且加大重点内容的覆盖密度，所有试题均附详细解答；书后附有模拟试卷及2001年度试题，供考生检验自己学习情况，建议在规定时间内完成。本书由王冬丽主编。

欢迎广大读者对本丛书提出宝贵意见，以便我们今后工作中得以改进。

全国高等教育自学考试命题研究组

2002.6

目　　录

线性代数考试概述

线性代数课程是高等教育自学考试工科类专业独立本科段考试计划中一门重要的基础理论课,它是为培养满足工科类专业高等本科人才的需要而设置的。线性代数是讨论有限维空间线性理论的一门学科,由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域,而且线性问题的处理方法是许多非线性问题处理方法的基础,因此,本课程所介绍的方法广泛地应用于各个学科。尤其在计算机的应用日益普及的今天,该课程的地位与作用更显得重要。通过自学本门课程,使自学者掌握本门课程的基本理论与方法,培养分析和解决实际问题的能力,并为以后学习后继课程提供必要的数学基础。

线性代数的某些内容与空间解析几何有着密切联系。例如向量空间与几何空间、二次型与二次曲面的联系,特别是向量空间 R^n 中向量的线性运算、线性相关性、内积、长度、正交等概念都是几何空间中相应概念的推广,因而在学习线性代数时,紧密结合几何空间这一具体模型中的问题,将有助于对抽象概念的理解并且有利于培养解决实际问题的能力。

线性代数是工科类有关专业自学考试计划中技术基础课与专业课的先修课程,它与后继课程有着十分密切的联系,在建立数学模型和数值计算中起着十分重要的作用。所以,学好线性代数,奠定一定的数学基础,对以后的学习无疑是十分必要的。

通过本课程的自学,要求考生系统地获得矩阵、行列式、n 维向量、线性方程组、特征值与特征向量、实二次型的基本知识、必要的基本理论及常用的数学方法。

在自学过程中,要求考生切实掌握有关内容的基本概念,基本理论和基本方法,通过学习,应该具有比较熟练的运算能力,能够运用获取的基本知识和基本技能去分析问题和解决问题,同时注意培养抽象思维能力与一定的逻辑推理能力,并不断提高自学能力。

线性代数课程概念较多,推理较多,所以在阅读教材时,要逐段细读,逐句推敲,边看书边思考,分析比较各个概念及理论之间的联系与区别,吃透每一个知识点。自学者应多动脑,多动手,建议对教材中有关的定理证明、公式推导、例题计算等再推证演算一遍,以便从中了解推理与计算中的关键所在、加深并巩固对定理及公式的理解、训练解题能力并提高自学能力;在自学中,应该逐渐提高使用矩阵、行列式、向量等常用数学工具的能力,掌握本课程解决问题的常用方法。例如,矩阵的初等变换,就是在求逆矩阵、求向量组的秩及最大无关组、求解线性方程组等问题中的一个常用方法,应该牢固掌握它,在自学中,应不断总结这些常用方法,进一步做到灵活运用;定理是由条件与两部分构成的,定理的条件必在证明结论的过程中用到。因此,在学习时要注意证明中哪些地方用到所给条件。应用定理时,必须要求定理中的条件得到满足。特别应该注意区分必要条件、充分条件和充要条件。不顾条件,滥用定理,就会导致错误结果。教材中有些定理的证明是不作要求的,但对这些定理的含义与作用必须理解透彻;做作业是理解、消化和巩固所学知识,培养分析问题、解决问题以及提高运算能力的重要环节。在做作业之前,必须认真阅读教材,切勿认为会做题就是掌握了教材。做题要求步骤清楚、运算准确、书写以及使用数学语言

规范、演算出最后结果，在弄清概念和原理、保证作业质量的前提下，应该多做一些题目，对于获取知识，这是十分必要的。

各章所规定的考核知识点及知识点下的知识细目，都是考试的内容。试题覆盖到章，适当突出重点章节，加大重点内容的覆盖密度；本课程在试卷中对不同认知层次要求的分数比例大致为：识记占20%，领会占30%，简单应用占30%，综合应用占20%；要合理安排试题的难易程度，试题的难度可分为：易、较易、较难和难四个等级。这四个等级在每份试卷中的试题所占分数比例依次约为2:4:3:1；试题主要有单项选择题、填空题、计算题、证明题等四种题型，选择题与填空题约占40%；考试方式为闭卷、笔试、考试时间为150分钟，试题份量应以中等水平的考生在规定时间内答完全部试题为度，评分采用百分制，60分为及格。考试时只允许带钢笔、铅笔、三角板、橡皮。答卷必须用钢笔；当本课程作为“工程数学”的一部分时，其考试时间及评分均占全课程的50%。

(一) 单项选择题(在下列每小题四个备选答案中选出一个正确答案，并将其字母标号填入题干后面的括号内)

1. 设 A 是 $n(>2)$ 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中 (　　)

A. 必有一列元素为零

B. 必有两列元素对应成比例

C. 必有一列向量是其余列向量的线性组合

D. 任一列向量是其余向量的线性组合

答：C

2. 设 A,B 均为 n 阶方阵，满足等式 $AB=0$，则必有 (　　)

A. $A=0$ 或 $B=0$　　B. $A+B=0$

C. $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　D. $|A|+|B|=0$

答：C

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若任何 n 维列向量都是方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，则 (　　)

A. $A=0$;　　B. $0<R(A)<n$;

C. $R(A)=n$;　　D. $R(A)=m$;

答：A

(二) 填空题(每空2分，共20分)

1. 设 A 是主对角元为 $1,2,3,\cdots,n$ 的 n 阶三角阶阵，则 $|A|=$ ________.

答：$n!$

2. 若 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$，则 A 的(1,2)元素 a_{12} 的代数余子式为________.

答：-7

3. 设 a 是实数，且 $|a|\neq 1$，若齐次方程组 $\begin{bmatrix}2-a & 2\\ \frac{1}{2} & 2-a\end{bmatrix}\vec{x}=0$ 有非零解，则 $a=$

________.

答:3

4. 设 A,B 为同阶可逆方阵,则$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ = ________.

答:$\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

5. 设 $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ 为 n 维正交的规范向量组,则 $\| 4\vec{x} - 7\vec{y} + 4\vec{z} \|$ = ________.

答:9

6. 设 A,B 均为 n 阶方阵,且 $|AB| = 1$,则方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 与 $B\vec{x} = \vec{0}$ 的非零解的个数之和为________.

答:0

7. 设 $\vec{x}$ 为 3 维向量,满足 $3\vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\vec{x}$,则 $\vec{x}$ = ________.

答:$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

8. 设矩阵 $A = [1,0,-1]$,矩阵 $B = [1,1,1]$,则 A^TB = ________.

答:$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

9. 设 Q 是 n 阶初等阵,且对任一 n 阶方阵 A,AQ 使得 A 的第 2 列元素改变符号,则 $|Q|$ = ________.

答:-1

10. 与实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ 相应的实对称矩阵有________个正特征值.

答:2

(三) 计算题

1. 设$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$,求 X.

答:$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. 设 3 阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1,\lambda_2 = 2,\lambda_3 = 3$,对应的特征向量为

$$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \vec{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}.\text{又向量 } \vec{P} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}.$$

(1) 将 $\vec{P}$ 用 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ 线性表示；

(2) 求 $A^n\vec{P}$.

答：(1) $\vec{\beta} = 2\vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$

(2) $A^n\vec{P}\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}$

3. 设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB = A + 2B$，且 $A = \begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$

求矩阵 B.

答：$B = \begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}$

(四) 证明题

1. 设 A 为 $m \times n$ 阶实矩阵，$\vec{x}$ 为 n 维实向量，且满足 $\vec{x}^TA^TA\vec{x} = 0$，证明 $A\vec{x} = \vec{0}$.

答：因为 $\vec{x}$ 满足 $\vec{x}^TA^TA\vec{x} = 0$，故有

$(A\vec{x}, A\vec{x}) = 0$

即 $\|A\vec{x}\| = 0$

故推得 $A\vec{x} = 0$

2. 设有三阶方阵 A, B，且 $A = \begin{bmatrix}a_1&0&0\\0&a_2&0\\0&0&a_3\end{bmatrix}$，$a_i \neq a_j, i \neq j$，试证明满足 $AB = BA$ 的矩阵 B 是对角矩阵.

答：设 $B = \begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$，因为

$$AB = \begin{bmatrix}a_1b_{11}&a_1b_{12}&a_1b_{13}\\a_2b_{21}&a_2b_{22}&a_2b_{23}\\a_3b_{31}&a_3b_{32}&a_3b_{33}\end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix}a_1b_{11}&a_2b_{12}&a_3b_{13}\\a_1b_{21}&a_2b_{22}&a_3b_{23}\\a_1b_{31}&a_2b_{32}&a_3b_{33}\end{bmatrix}$$

若要 B 满足 $AB = BA$，则应有

$a_ib_{ij} = a_jb_{ij}, i \neq j$

由于 $a_i \neq a_j, i \neq j$，故必有 $b_{ij} = 0, i \neq j$，于是 B 为对角阵.

第一章　矩形和行列式

◎ 考试要求

本章总的要求是：理解矩阵的概念；熟练掌握矩阵的初等变换及解线性方程组的消元法；熟练掌握矩阵的运算（包括线性运算、乘法、方阵的幂、转置和求逆矩阵）；了解分块矩阵及其运算；知道行列式的定义；记住行列式的性质及按一行（列）展开法则；熟练掌握 2、3 阶行列式的计算；会计算简单的 n 阶行列式；掌握 Cramer 法则。

本章的知识点中，重点是：矩阵的概念与运算；消元法；矩阵的初等变换。难点是：n 阶行列式的计算。

1.矩阵的概念，要求达到“领会”层次。

理解矩阵的概念。熟知单位矩阵、零矩阵的定义。理解矩阵相等的定义。

2.消元法与矩阵的初等变换，要求达到“综合应用”层次。

知道 n 元线性方程组的解是一个 n 元有序数组。理解矩阵初等变换及矩阵等价的概念。会用初等行变换化矩阵为阶梯形或简化行阶梯形。掌握用矩阵初等行变换求解线性方程组的方法。

3.矩阵的运算及其运算规律，要求达到“综合应用”层次。

熟练掌握矩阵的线性运算（加法及数乘）、乘法、方阵的幂、转置等运算及其运算规律。特别应注意，矩阵乘法不满足交换律，以及 $AB = 0$ 时不一定有 $A = 0$ 或 $B = 0$。知道上（下）三角形矩阵、对角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵的定义及其简单运算性质。

4.分块矩阵及其运算，要求达到“识记”层次。

知道分块矩阵的定义。了解一般分块矩阵的运算。掌握分块对角矩阵的运算。

5.行列式的定义与性质，要求达到“识记”层次。

知道行列式的定义，牢记行列式的性质（证明不作要求）。能区分数乘矩阵与数乘行列式、矩阵相加与行列式相加、方阵相乘与行列式相乘的不同之处。知道方阵的初等变换对方阵行列式的值的影响。

6.行列式的展开法则，要求达到“领会”层次。

正确理解余子式与代数余子式的定义。

牢记下列公式：设方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则成立

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \begin{cases} \det(A), & \text{当 } k = i \\ 0, & \text{当 } k \neq i \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \begin{cases} \det(A), & \text{当 } k = j \\ 0, & \text{当 } k \neq j \end{cases}$$

7.行列式的计算，要求达到“简单应用”层次。

熟练掌握 2、3 阶行列式的计算方法。会计算简单的 n 阶列式。知道范德蒙行列式的计

算结果。

8. 逆矩阵的定义与性质,要求达到"领会"层次。

理解逆矩阵的定义与性质。理解 n 阶方阵 $A(n \geq 2)$ 的伴随矩阵 A^* 的定义。

牢记公式:$AA^* = A^*A = \det(A)E, \det(A^*) = \det(A)^{n-1}$

知道 $\det(A) \neq 0$ 是方阵 A 可逆的充要条件。

9. 逆矩阵的计算,要求达以"简单应用"层次。

会利用公式 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A^*$ 求逆矩阵.

会求可逆的分块对角矩阵的逆矩阵。

理解初等方阵的定义,知道初等方阵的逆矩阵。

知道初等方阵与矩阵初等变换之间的关系。

掌握用初等变换求逆矩阵的方法。

会求解矩阵方程。

10. Cramer 法则,要求达到"简单应用"层次。

掌握 Cramer 法则. 会用 Cramer 法则求解简单的线性方程组.

◎ 知识重点

(一) 矩阵的定义

矩阵:$m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m \quad j = 1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵,简记为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A = (a_{ij})$,当 $m = n$ 时,称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵.

(二) 矩阵相等

两个行数相同、列数相同的矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$,矩阵 A 与 B 称为同型矩阵.

若两个同型矩阵 A 与 B 的对应元素分别相等,即 $a_{ij} = b_{ij}(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(三) 单位矩阵

主对角线上的元素都是 1,而其它元素全为零的 n 阶方阵称为 n 阶单位矩阵,记为 E 或 I. 单位矩阵的形状如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

(四) 上(下) 三角矩阵

一个 n 阶方阵,如果它主对角线以下的元素全等于零($a_{ij}=0, i>j$),即

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则称 A 为上三角矩阵;同样,若 A 的主对角线以上元素全为零($a_{ij}=0, i<j$),则称 A 为下三角矩阵.

(五) 对角矩阵

一个 n 阶方阵,如果主对角线以外的元素全为零,则称此矩阵为对角矩阵.对角矩阵的形状为:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{n\times n},$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 时称 A 为数量矩阵,此时 $A=\lambda_1 E$.

(六) 矩阵的运算

1.矩阵的加减法运算

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{m\times n}$,定义 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}=A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$,并称 C 是 A 与 B 之和.

定义 $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$,显然 $A+(-A)=0$.

矩阵的减法定义为

$A-B=A+(-B)$.

矩阵的加法运算服从于以下几条法则:

1) 交换律 $A+B=B+A$;

2) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3) $O+A=A+O=A$.

2.矩阵的数乘运算

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,k 是一个实数,定义 k 与 A 的乘积为

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n},$$

即

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

矩阵的数乘运算服从于以下几条法则：

1) $k(A + B) = kA + kB$;

2) $(k + l)A = kA + lA$;

3) $(kl)A = k(lA)$;

4) $lA = A$;

5) $OA = O$.

3. 矩阵的乘法运算

设 $A = (a_{ij})_{m\times s}$, $B = (b_{ij})_{s\times n}$, 定义 $AB = C = (c_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}.$$

必须注意 A 和 B 只有在 A 的列数等于 B 的行数时才可以相乘. 一般来说, $AB \neq BA$.

矩阵乘法的运算服从于以下几条法则：

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$;

3) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, k 为一个实数.

由矩阵的乘法我们可以定义 n 阶方阵的幂

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k个}.$$

矩阵幂的运算服从于以下几条法则：

1) $A^kA^l = A^{k+l}$;

2) $(A^k)^l = A^{kl}$;

3) 对 $k > 1$, $(AB)^k \neq A^kB^k$; 只有当 $AB = BA$ 时,

$$(AB)^k = A^kB^k.$$

4. 矩阵的转置运算

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, n \times m \text{ 矩阵} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的转置矩阵, 简称 A 的转置, 记作 A' 或 A^T.

矩阵转置运算服从以下几条法则：

1) $(A')' = A$;

2) $(A + B)' = A' + B'$;

3) $(kA)' = kA'$, k 为一个实数;

4) $(AB)' = B'A'$.

一般来说 $A' \neq A$,但当 $A' = A$ 时,则称矩阵 A 是实对称矩阵;当 $A' = -A$ 时,则称 A 是反对称矩阵.

(七)分块矩阵

1. 将矩阵 A 按照行线或列线分成若干个子块,将 A 看成由若干个小矩阵块构成,称为分块矩阵.

2. 分块矩阵的运算

加法:分块法一致,对应块相加.

数乘:数乘各小矩阵块.

乘法:A 的列的分法和 B 的行的分法一致才能相乘,分块阵相乘同普通的矩阵乘法.

3. 转置

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \cdots & A_{1s}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{2s}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1}^T & A_{r2}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{bmatrix}.$$

4. 准对角矩阵

形如

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵($i = 1,2,\cdots,s$)

的矩阵称为准对角矩阵.此时,

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|.$$

若每一个 A_i 都可逆,则 A 也可逆,且

$$A^{-1} \begin{bmatrix} A_1{}^{-1} & & & \\ & A_2{}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s{}^{-1} \end{bmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$, $|B| \neq 0$, $|C| \neq 0$,则

$|A|=(-1)^{mn}|B||C|\neq 0$, B 是 n 阶方阵, C 是 m 阶方阵, A 是 $m+n$ 阶方阵. 且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & C^{-1}\\ B^{-1} & 0\end{bmatrix}.$$

6. $A=\begin{bmatrix}B & D\\ 0 & C\end{bmatrix}$, $|B|\neq 0$, $|C|\neq 0$, 则 $|A|=|B||C|\neq 0$, 且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{bmatrix}.$$

$A=\begin{bmatrix}B & 0\\ D & C\end{bmatrix}$, $|B|\neq 0$, $|C|\neq 0$, 则 $|A|=|B||C|\neq 0$, 且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & 0\\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1}\end{bmatrix}$$

(八) 行列式

1. n 阶行列式的定义

$$det(A)=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有 n 级排列求和, 故共有 $n!$ 项, $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 表示排列的逆序数. 由于行下标已顺排, 而列下标是任一个 n 元排列, 故每项由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积组成, 每项的符号决定于 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$, 即若列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$, 是奇排列时, 则附加负号, 否则附加正号.

2. 行列式的性质

(1) 行与列互换, 其行列式值不变;

(2) 两行(列) 互换位置, 行列式变号;

(3) 某行(列) 有公因子, 可提到行列式外面;

(4) 若有两行(列) 对应成比例, 其行列式为零;

(5) 将某行(列) 各元素乘以同一数加到另一行(列) 的对应元素上去, 行列式值不变;

(6) 行列式某行(列) 元素均是两元素之和, 则可拆开成两个行列式之和.

3. 行列式按行(列) 展开

设 D 为 n 阶行列式, 则有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\begin{cases}D, i=k\\ 0, i\neq k\end{cases}(i=1,2,\cdots,n);$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\begin{cases}D, j=k\\ 0, j\neq k\end{cases}(j=1,2,\cdots,n).$$

（九）逆矩阵

(1) 逆矩阵的定义

设 A 是一个 n 阶方阵，若存在一个 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则称 B 是 A 的逆矩阵，这时称 A 为可逆矩阵. 记 A 的逆矩阵为 A^{-1}，即 $A^{-1} = B$.

若矩阵 A 无逆矩阵，则称 A 为奇异矩阵；若 A 有逆矩阵，则称 A 为非奇异矩阵.

(2) 可逆矩阵的性质

1) 若 A 可逆，则 $(A^{-1})^{-1} = A$；

2) 若 A, B 是同阶可逆阵，则 AB 也可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

3) 若 A 可逆，$k \neq 0$，则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

4) 若 A 可逆，则 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$；

5) 若 A 可逆，则 $|A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$.

(3) 可逆矩阵的求法

设 A 是 n 阶方阵，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

若 A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式，则称矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵. 满足

$$AA^* = A^*A = |A| I_n.$$

当 $|A| \neq 0$ 时，$A \cdot \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} \cdot A = I_n$，

可见 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$，$A^* = |A| \cdot A^{-1}$.

(4) 方阵 A 可逆的充要条件

定理 1　矩阵 A 可逆的充要条件为其行列式 $|A| \neq 0$.

定理 2　矩阵 A 可逆的充要条件为存在矩阵 B 使得 $AB = I_n$ 或 $BA = I_n$.

（十）矩阵的初等变换与初等矩阵

(1) 矩阵的初等变换

1) 对矩阵施以下列三种变换，称为矩阵的初等变换：

· 对调矩阵中任意两行(列)的位置；

· 用一个非零数 k 乘矩阵的某一行(列);

· 将矩阵的某一行(列) 乘以数 k 后加到另一行(列) 上去.

2) 如果一个矩阵 A 经过若干次初等变换后变成矩阵 B,则称 A 与 B 是等价的,记为 $A \cong B$.

3) 一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$,经过有限次初等变换后必可化为下面形式的 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

其中 I_r 是一个 r 阶的单位矩阵,而其余各块都是零矩阵块.

4) 由单位矩阵 I 经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵. 初等矩阵有如下三种:

· 把单位矩阵 I 的第 i 行(列) 和第 j 行(列) 互换,得到的初等矩阵,即

$$P(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

· 用非零数 k 乘单位矩阵的第 i 行(列) 得到的初等矩阵,即

$$\begin{array}{cc} P(i(k)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \text{— 第 } i \text{ 行;} \\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

· 把 I 的第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去(或把 I 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上去),得到的初等矩阵,即