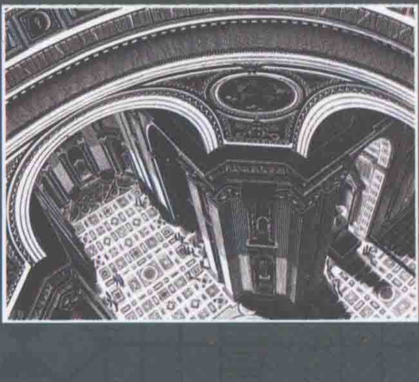
复变函数习题集
精品系列

超越普里瓦洛夫

数项级数卷

● 刘培杰数学工作室　编



普里瓦洛夫（Привалов,Иван　Иванович），苏联人。1891年2月11日生于别依津斯基。1913年毕业于莫斯科大学后，曾在萨拉托夫大学工作。1918年获数学物理学博士学位，并成为教授。1922年回到莫斯科，先后在莫斯科大学和航空学院任教。1939年成为苏联科学院通讯院士。1941年7月13日逝世。

普里瓦洛夫的研究工作主要涉及函数论与积分方程。有许多研究成果是他与鲁金共同取得的，他们用实变函数论的方法研究解析函数的边界特性与边界值问题。1918年他在学位论文《关于柯西积分》中，推广了鲁金－普里瓦洛夫唯一性定理，证明了柯西型积分的基本引理和奇异积分定理。他是苏联较早从事单值函数论研究的数学家之一，所谓黎曼－普里瓦洛夫问题就是他的研究成果之一。他还写了三角级数论及次调和函数论方面的著作。他发表了70多部专著和教科书，其中《复变函数引论》、《解析几何》都是多次重版的著作，并且被译成多种外文出版。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

CHAOYUE PULIWALUOFU — SHUXIANGJISHUJUAN

超越普里瓦洛夫

数项级数卷

● 刘培杰数学工作室　编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要由习题组成，全书共收录了303道习题及其详尽的解答. 全书通过用收录习题的形式来系统全面地介绍有关数项级数的知识，书中题型广泛、覆盖知识点全面. 方便读者在掌握基本知识点的同时，更能够灵活地运用和理解知识点.

本书适合于高等院校数学专业学生，数学爱好者及教练员作为学习或教学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

超越普里瓦洛夫. 数项级数卷/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5603-5405-7

Ⅰ.①超…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①级数　Ⅳ.①O1②O173

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114439号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　关虹玲
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张16　字数286千字
版　　次　2015年7月第1版　2015年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5405-7
定　　价　38.00元

复变函数论简介

复变函数论(theory of functions of a complex variable)是研究复变数的函数的性质及应用的一门学科,是分析学的一个重要分支.

形如 $x+\mathrm{i}y$(x,y 为实数,i 是虚数单位,满足 $\mathrm{i}^2=-1$) 的数称为复数.复数早在 16 世纪就已经出现,它起源于求代数方程的根.在相当长的一段时间内,复数不为人们所接受.直到 19 世纪,才阐明复数是从已知量确定出的数学实体.以复数为自变量的函数叫做复变函数.

对复变函数的研究是从18世纪开始的.18世纪三四十年代,欧拉曾利用幂级数详细讨论过初等复变函数的性质,并得出了著名的欧拉公式

$$e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$$

1752 年,达朗贝尔在论述流体力学的论文中,考虑复函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的导数存在的条件,导出了关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

欧拉在 1777 年提交圣彼得堡科学院的一篇论文中,利用实函数计算复函数的积分,也得到了关系式(1).因此,式(1) 有时被称为达朗贝尔—欧拉方程,但后来更多地被称为柯西—黎

曼方程.在这一时期,拉普拉斯也研究过复函数的积分.但是以上三人的工作都存在着本质上的局限性,因为他们把 $f(z)$ 的实部和虚部分开考虑,没有把它们看成一个基本实体.

复变函数论的全面发展是在 19 世纪.首先,柯西的工作为单复变函数论的发展奠定了基础.他从 1814 年开始致力于复变函数的研究,完成了一系列重要论著.他把一个复变函数 $f(z)$ 视作复变数 z 的一元函数来研究.他首先证明复数的代数运算与极限运算的合理性,引进了复函数连续性的概念,接着给出了复函数可导的充分必要条件(即柯西—黎曼方程).他定义了复函数的积分,得到复函数在无奇点的区域内积分值与积分路径无关的重要定理,从而导出著名的柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f(s)}{\zeta-z}\mathrm{d}s$$

柯西还给出了复函数在极点处的留数的定义,建立了计算留数的定理.他还研究了多值函数,为黎曼面的创立提供了理论依据.

紧接着,阿贝尔和雅可比创立了椭圆函数理论(1826 年),给复变函数论带来了新的生机.1851 年,黎曼的博士论文《单复变函数的一般理论基础》第一次给出单值解析函数的定义,指出实函数与复函数导数的基本差别.他把单值解析函数推广到多值解析函数,阐述了现称为黎曼面的概念,开辟了多值函数研究的方向.黎曼还建立了保形映射的基本定理,奠定了复变函数几何理论的基础.

维尔斯特拉斯与柯西、黎曼不同,他摆脱了复函数的几何直观,从研究幂级数出发,提出了复函数的解析开拓理论,引入完全解析函数的概念.他在椭圆函数论方面也有很重要的工作.

19 世纪后期,复变函数论得到迅速发展.在相当一段时间内,柯西、黎曼、维尔斯特拉斯这三位主要奠基人的工作被他们各自的追随者继续研究.后来,柯西和黎曼的思想被融合在一起,而维尔斯特拉斯的方法逐渐由柯西、黎曼的观点推导出来.人们发现,维尔斯特拉斯的研究途径不是本质的,因此不再强调从幂级数出发考虑问题,这是 20 世纪初的事.

20 世纪以来,复变函数论又有很大的发展,形成了一些专门的研究领域.在这方面做出较多工作的有瑞典数学家米塔·列夫勒,法国数学家庞加莱、皮卡、波莱尔,芬兰数学家奈望林纳,德国数学家毕波巴赫,以及前苏联数学家韦夸、拉夫连季耶夫等.

⊙普里瓦洛夫简介

普里瓦洛夫(Привалов, Иван Иванович),苏联人.1891年2月11日生于别依津斯基.1913年毕业于莫斯科大学后,曾在萨拉托夫大学工作.1918年获数学物理学博士学位,并成为教授.1922年回到莫斯科,先后在莫斯科大学和航空学院任教.1939年成为苏联科学院通讯院士.1941年7月23日逝世.

普里瓦洛夫的研究工作主要涉及函数论与积分方程.有许多研究成果是他与鲁金共同取得的,他们用实变函数论的方法研究解析函数的边界特性与边界值问题.1918年,他在学位论文《关于柯西积分》中,推广了鲁金—普里瓦洛夫唯一性定理,证明了柯西型积分的基本引理和奇异积分定理.他是苏联较早从事单值函数论研究的数学家之一,所谓黎曼—普里瓦洛夫问题就是他的研究成果之一.他还写了三角级数论及次调和函数论方面的著作.他发表了70多部专著和教科书,其中《复变函数引论》《解析几何》都是多次重版的著作,并被译成多种外文出版.

目录

题目及解答

1 求以下数列的上、下极限：

(1) $\{a_n\}=\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$；

(2) $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{n+1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{n+2}{n+1},\cdots\right\}$.

解 (1) 因为

$$a_{2k-1}=-\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1}\longrightarrow -e\quad(k\to\infty)$$

$$a_{2k}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}\longrightarrow e\quad(k\to\infty)$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=e,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=-e$$

(2) 令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}\{a_n\}=\lim_{k\to\infty}b_k$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k}\{a_n\}=\lim_{k\to\infty}c_k$$

这里

$$b_k=\sup_{n\geqslant k}\{a_n\},c_k=\inf_{n\geqslant k}\{a_n\}$$

由于 $a_n=\begin{cases}1\Big/\left(\dfrac{n+3}{2}\right), & n\text{ 为奇数}\\ \left(\dfrac{n}{2}+2\right)\Big/\left(\dfrac{n}{2}+1\right), & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，则

$$b_1=\sup\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{n+1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{n+2}{n+1},\cdots\right\}=\frac{3}{2}$$

$$b_2=\sup\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{4},\cdots,\frac{1}{n},\frac{n+1}{n},\frac{1}{n+1},\frac{n+2}{n+1},\cdots\right\}=\frac{3}{2}$$

$$\vdots$$

$$b_{2k-3}=\sup\left\{\frac{1}{k},\frac{k+1}{k},\frac{1}{k+1},\frac{k+2}{k+1},\cdots\right\}=\frac{k+1}{k}$$

$$b_{2k-2}=\sup\left\{\frac{k+1}{k},\frac{1}{k+1},\frac{k+2}{k+1},\cdots\right\}=\frac{k+1}{k}$$

$$\vdots$$

而

$$c_1=c_2=\cdots=c_k=\cdots=0$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=1,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=0$$

2 证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n$.

证法1 令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=A,\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=a$$

于是，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1 与 N_2，使当 $n>N_1$ 时，有 $a_n<A+\varepsilon$ 与 $n>N_2$ 时，有 $a_n>a-\varepsilon$.

故当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，有

$$a-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$$

即

$$a-2\varepsilon<A$$

由 ε 的任意性知

$$a\leqslant A$$

否则，若 $a>A$，令 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(a-A)$，则有 $a-2\varepsilon>A$，矛盾.

证法2 因为

$$A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}\{a_n\}=\lim_{k\to\infty}b_k$$

$$a=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n=\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geqslant k}\{a_n\}=\lim_{k\to\infty}c_k$$

所以对任给 $\varepsilon>0$，存在 N_1 与 N_2，使当 $k>N_1$ 时，有 $b_k<A+\varepsilon$ 与 $k>N_2$ 时，有 $a-\varepsilon<c_k$.

而 $b_k\geqslant c_k$，故当 $k>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，有 $a-\varepsilon<c_k\leqslant b_k<A+\varepsilon$，即 $a-2\varepsilon<A$，故 $a\leqslant A$.

3 证明：有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n$$

证 必要性. 若 $\{x_n\}$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>$

N 时,有

$$A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$$

于是

$$A-\varepsilon \leqslant \inf\{x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots\} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots\} \leqslant A+\varepsilon$$

即

$$A-\varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant A+\varepsilon$$

由 ε 的任意性知,$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

充分性. 若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则对任给 $\varepsilon > 0$,存在 N_1 与 N_2,使当 $n > N_1$ 时,有 $x_n > A-\varepsilon$ 与 $n > N_2$ 时,有 $x_n < A+\varepsilon$.

于是,当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时,有

$$A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon$$

4 **证明:若 $\{x_n\}$ 是有界数列,c 是任意实数,则:**

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} cx_n = \begin{cases} c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, c > 0 \\ 0, c=0 \\ c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, c < 0 \end{cases}$;

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} cx_n = \begin{cases} c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, c > 0 \\ 0, c=0 \\ c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, c < 0 \end{cases}$.

证 (1) 若 $c > 0$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty} cx_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{cx_n\} = \lim_{k\to\infty} c \sup_{n\geqslant k}\{x_n\} = c\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{x_n\} = c\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

若 $c=0$,显然 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} cx_n = 0$.

若 $c < 0$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty} cx_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{cx_n\} = \lim_{k\to\infty} c \inf_{n\geqslant k}\{x_n\} = c\lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k}\{x_n\} = c\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

(2) 同上可证.

5 证明:若$\{x_n\}$,$\{y_n\}$均是有界数列,则

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\left\{\begin{matrix}\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\end{matrix}\right\}\leqslant$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

证 (1) 由于

$$\inf_{n\geqslant k}\{x_n\}+\inf_{n\geqslant k}\{y_n\}\leqslant\inf_{n\geqslant k}\{x_n+y_n\}\leqslant\begin{cases}\inf\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}+\sup\limits_{n\geqslant k}\{y_n\}\\ \sup\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}+\inf\limits_{n\geqslant k}\{y_n\}\end{cases}\tag{*}$$

这是因为对任意的n,均有

$$x_n\geqslant\inf\{x_n\},y_n\geqslant\inf\{y_n\}$$

所以

$$x_n+y_n\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}$$

故

$$\inf\{x_n+y_n\}\geqslant\inf\{x_n\}+\inf\{y_n\}$$

又

$$x_n+y_n\geqslant\inf\{x_n+y_n\}$$

而

$$y_n\leqslant\sup\{y_n\}$$

于是

$$x_n\geqslant\inf\{x_n+y_n\}-\sup\{y_n\}$$

故

$$\inf\{x_n\}\geqslant\inf\{x_n+y_n\}-\sup\{y_n\}$$

即

$$\inf\{x_n+y_n\}\leqslant\inf\{x_n\}+\sup\{y_n\}$$

类似地,有

$$\inf\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\inf\{y_n\}$$

令$k\to\infty$,对式(*)取极限,即得

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\begin{cases}\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\end{cases}$$

(2) 类似(1)有

$$\sup_{n\geqslant k}\{x_n+y_n\}\leqslant \sup_{n\geqslant k}\{x_n\}+\sup_{n\geqslant k}\{y_n\} \qquad (**)$$

令 $k\to\infty$,对式(**)取极限,即得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

(3) 因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[(x_n+y_n)+(-x_n)]\leqslant$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)-\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad (\text{题 4 中(1)})$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$$

同理可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$$

综合(1),(2),(3)得证.

6 若数列$\{x_n\}$对任何数列$\{y_n\}$均有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

则$\{x_n\}$是收敛的.

证 因为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$ 对任何的数列$\{y_n\}$成立,特别地,令 $y_n=-x_n$,则有

$$0=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n-\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

由题 3 知$\{x_n\}$收敛.

7 设 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 证明

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{x_n}\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{x_n}\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

证 令$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,有$\frac{x_{n+1}}{x_n}>a-\varepsilon$,

即

$$\frac{x_{N+1}}{x_N}>a-\varepsilon,\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}>a-\varepsilon,\frac{x_{N+3}}{x_{N+2}}>a-\varepsilon,\cdots,\frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}}>a-\varepsilon$$

于是

$$\frac{x_{N+k}}{x_N}>(a-\varepsilon)^k,x_{N+k}>x_N(a-\varepsilon)^k$$

故

$$\sqrt[N+k]{x_{N+k}}>\sqrt[N+k]{x_N}\cdot\sqrt[N+k]{(a-\varepsilon)^k}$$

令 $k\to\infty$,上式两边取极限,并注意到$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[N+k]{x_N}=1$,而

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[N+k]{(a-\varepsilon)^k}=\lim_{k\to\infty}(a-\varepsilon)\sqrt[N+k]{\frac{1}{(a-\varepsilon)^N}}=a-\varepsilon$$

所以$\varliminf\limits_{k\to\infty}\sqrt[N+k]{x_{N+k}}\geqslant a-\varepsilon$,$\varepsilon$ 是任意的.故

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\geqslant a$$

即

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$$

同理,令

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=A$$

有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant A$$

于是

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

而

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$$

故

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

若 $a=-\infty$,$A=+\infty$ 结论显然成立.

注 题 5 与题 7 在讨论上、下极限时经常用到.

8 试计算和

$$S_1=1+a\cos x+a^2\cos 2x+\cdots+a^n\cos nx$$

$$S_2 = a\sin x + a^2\sin 2x + \cdots + a^n\sin nx$$

解 考虑几何级数

$$1 + az + a^2z^2 + \cdots + a^nz^n = \frac{a^{n+1}z^{n+1} - 1}{az - 1}$$

若设 $z = \cos x + \mathrm{i}\sin x$，则上式取形式

$$S_1 + \mathrm{i}S_2 = \frac{a^{n+1}z^{n+1} - 1}{az - 1}$$

计算该式的右端

$$\frac{a^{n+1}z^{n+1} - 1}{az - 1} = \frac{a^{n+1}\cos(n+1)x - 1 + \mathrm{i}a^{n+1}\sin(n+1)x}{a\cos x - 1 + \mathrm{i}a\sin x} =$$

$$\frac{[a^{n+1}\cos(n+1)x - 1 + \mathrm{i}a^{n+1}\sin(n+1)x](a\cos x - 1 - \mathrm{i}a\sin x)}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$

分出实虚部分，于是便得

$$S_1 = \frac{a^{n+2}\cos nx - a^{n+1}\cos(n+1)x - a\cos x + 1}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$

$$S_2 = \frac{a^{n+2}\sin nx - a^{n+1}\sin(n+1)x + a\sin x}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$

注 若 $|a| < 1$，则我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos nx = \frac{1 - a\cos x}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin nx = \frac{a\sin x}{a^2 - 2a\cos x + 1}$$

9 试计算和

$$S_1 = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

$$S_2 = \sin x + 2\sin 2x + \cdots + n\sin nx$$

解 考虑和

$$z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}$$

令 $z = \cos x + \mathrm{i}\sin x$，则有 $z^k = \cos kx + \mathrm{i}\sin kx$. 因而

$$S_1 + \mathrm{i}S_2 = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}$$

由于

$$z - 1 = \cos x - 1 + \mathrm{i}\sin x =$$

$$-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \mathrm{i}\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{nz^{n+1}}{z-1}=\frac{n[\cos(n+1)x+\mathrm{i}\sin(n+1)x]}{-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{x}{2}\right)}=$$

$$\frac{n}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\mathrm{i}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$z(z^n-1)=-2\sin\frac{nx}{2}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\left(\sin\frac{nx}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{nx}{2}\right)$$

$$(z-1)^2=\left[-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{x}{2}\right)\right]^2=$$

$$-4\sin^2\frac{x}{2}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)$$

$$\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}=\frac{\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{nx}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}-\mathrm{i}\sin nx}{4\sin\frac{x}{2}}$$

于是

$$S_1+\mathrm{i}S_2=\frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}+$$

$$\mathrm{i}\left(\frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)$$

由此即可得出 S_1 和 S_2 的表达式.

10 试计算和

$$A_1=\cos x+\mathrm{C}_n^1\cos 2x+\mathrm{C}_n^2\cos 3x+\cdots+\mathrm{C}_n^n\cos(n+1)x$$

$$A_2=\sin x+\mathrm{C}_n^1\sin 2x+\mathrm{C}_n^2\sin 3x+\cdots+\mathrm{C}_n^n\sin(n+1)x$$

解 由于

$$z+\mathrm{C}_n^1z^2+\mathrm{C}_n^2z^3+\cdots+\mathrm{C}_n^nz^{n+1}=z(1+z)^n$$

令 $z=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,则得

$$A_1+\mathrm{i}A_2=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)(\cos x+1+\mathrm{i}\sin x)^n$$

但

$$[(\cos x+1)+\mathrm{i}\sin x]^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{nx}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{nx}{2}\right]$$

因而

$$A_1+\mathrm{i}A_2=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left[\cos\frac{n+2}{2}x+\mathrm{i}\sin\frac{n+2}{2}x\right]$$

由此

$$A_1=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x$$

$$A_2=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x$$

11 计算成算术级数的弧的正弦与余弦的和

$$I_1=\cos a+\cos(a+h)+\cdots+\cos(a+nh)$$

$$I_2=\sin a+\sin(a+h)+\cdots+\sin(a+nh)$$

解 令 $z=\cos h+\mathrm{i}\sin h$,则有

$$(\cos a+\mathrm{i}\sin a)z^k=(\cos a+\mathrm{i}\sin a)(\cos kh+\mathrm{i}\sin kh)=\cos(a+kh)+\mathrm{i}\sin(a+kh)$$

从而有

$$I_1+\mathrm{i}I_2=(\cos a+\mathrm{i}\sin a)(1+z+\cdots+z^n)=(\cos a+\mathrm{i}\sin a)\frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

但是

$$\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\frac{\cos(n+1)h-1+\mathrm{i}\sin(n+1)h}{\cos h-1+\mathrm{i}\sin h}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{n+1}{2}h+\mathrm{i}\cos\frac{n+1}{2}h}{-\sin\frac{h}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{h}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}h+\mathrm{i}\sin\frac{n}{2}h\right)$$

因此

$$I_1+\mathrm{i}I_2=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)+$$

$$\mathrm{i}\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a+\frac{n}{2}h\right)$$

于是得

$$I_1=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(a+\frac{n}{2}h\right)$$

$$I_2=\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a+\frac{n}{2}h\right)$$

12 确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n}$.

解 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\mathrm{i}}{2^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\mathrm{i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故已知级数发散.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n}=-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\right)+\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$，实、虚部分级数收敛，故级数收敛.

13 讨论下列级数是收敛还是发散：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\mathrm{i})^{2n}}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+nb}$（$a$ 与 b 不同时为零）；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n}-\frac{b}{n+1}\right)$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}$.