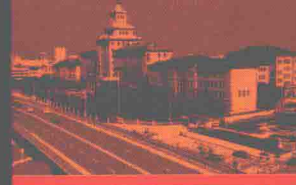

HIT

Theory of Functions

函数论

[英]蒂奇马什 著 刘培杰数学工作室 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世界数学名家精品译丛

函数论

Theory of Functions

[英]蒂奇马什 著

刘培杰数学工作室 译

由黑龍江省精品圖書出版工程專項資金資助出版

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书第一章着重叙述了二重极限的交换问题. 第二章至第九章为复变函数理论,内容包括:解析函数、围道积分、残数、零点理论、解析延拓、最大模定理、保角映射、具有有限收敛半径的幂级数、整函数、迪利克雷级数等. 第十章至第十三章为单元实变函数论,它总结了近代分析学工作者所必须具备的数学工具,如测度论、勒贝格积分与微分理论等,第十三章讨论傅里叶级数理论.

函数论/(英)蒂奇马什著;刘培杰数学工作室译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.11
书名原文:Theory of functions
ISBN 978 - 7 - 5603 - 4986 - 2

Ⅰ.①函… Ⅱ.①蒂… ②刘… Ⅲ.①函数论
Ⅳ.①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 257413 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李长波
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 26.75　字数 492 千字
版　　次　2014 年 11 月第 1 版　2014 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 4986 - 2
定　　价　78.00 元

◎第二版序

在本书第一版这次重印时,本书做了很多次要的修正和改进.作者谨向协助修订的许多同事表示感谢.本版唯一的主要变更是在第八章中添入了关于半纯函数理论的简短介绍.其所以能够这样做,是由于把第八章中若干比较次要的分节加以压缩,并把伽马函数的理论改编入第四章,其中现在包括了一个比较完整的关于斯特林(Stirling)公式的讨论.

E. C. 蒂奇马什

◎ 第一版序

本书系由作者最近几年在伦敦大学和利物浦大学所用讲稿发展而成. 它由一些不很连贯的关于实变数的及复变数的函数论各个分支的介绍所组成. 我想一般大学生对于这些问题的现有文献是感到浩如烟海的, 因此希望本书各章能在初等教科书与函数论的系统论著间起些桥梁作用.

作者假定读者已经具有初等分析的知识. 所谓初等分析大致是指哈代(Hardy)著的《纯粹数学教程》(*Course of Pure Mathematics*)一书包含的内容. 除此以外, 本书是自给自足的. 书中各章的次序安排在一定的程度上是随意的. 最后四章也可以放在第一章后面. 除了偶尔需要参考后面的内容外, 本书的前面部分与这几章是无关的; 但它们的内容, 正如比较古老的解析函数理论那样, 也是今日分析学工作者所必须具备的工具.

在每章末了都设有一些杂题. 其中有一些是正文的或多或少的直接应用, 余下的则是一些不宜列入正文的比较困难的定理. 它们都附有解答的提示并列出来源的参考文献.

当我起初打算将我的讲稿写成书的形式时, 哈代教授慷慨地表示, 他愿结合他在牛津的讲课将讲稿从头到尾处理一遍. 在这个过程中, 借助于他的讲稿我的讲稿得到了修订. 我从哈代教授的讲稿中, 采用了很多改进之处, 对他给我的帮助, 谨表示深深的谢意.

我也感谢哈斯拉姆－琼斯(U. S. Haslam-Jones)先生与威尔逊(B. M. Wilson)博士, 他们曾经阅读了校样, 并且提出了很多有益的建议.

E. C. 蒂奇马什

◎

目录

第一章　无穷级数、无穷乘积与积分

引　　言

在这开始的一章内,我们对读者已经掌握的初等分析做若干补充. 特别,我们将讨论各项都是单变函数的级数,讨论含有参数的积分以及在数学分析各个分支中时常遇到的各种二重极限问题. 正如序言中所说,我们将以哈代(G. H. Hardy)著的《纯粹数学教程》一书(在征引时,记为 P. M.)作为本书的出发点,并且将尽可能地征引它.

我们将采用以下一些记号,在任何讨论中,与主要变数无关的数称为常数,与任何变数都无关的数称为绝对常数. 我们用 A 表示绝对常数,但它每一次出现不一定都代表同一个数. 读者会看到这样的陈述:"$f(x)<A$,因而 $2f(x)<A$",开始时对此会有些不习惯,但不久以后,就会习以为常了. 与一个或多个参数有关的常数常以 K 表示之.

通常我们用 $f(x)=O\{\phi,x\}$ 表示"$|f(x)|<A\phi(x)$ 于 x 充分接近某给定极限时成立";特别,$O(1)$ 代表有界函数. 于是当 $x\to 0$ 时

$$\sin x = O(|x|),\quad (x+1)^2 = O(1)$$

而当 $x\to\infty$ 时

$$\sin x = O(1),\quad (x+1)^2 = O(x^2)$$

有时 $f(x)=O\{\phi(x)\}$ 被用来表示

$$|f(x)|<K\phi(x)$$

但通常只在所含参数非常明显时才这样用它.

$f(x)=o\{\phi(x)\}$ 的意义如下:"当 x 趋于某给定极限时,$f(x)/\phi(x)\to 0$",于是当 $x\to\infty$ 时

$$\sin x = o(x^2),\quad (x+1)^2 = o(x^3)$$

特别,$o(1)$ 表示趋于零的函数.

我们用 $f(x)\sim\phi(x)$ 表示"当 x 趋于某给定极限时,$f(x)/\phi(x)\to 1$".

我们用 ε 表示能取任意小数值的变量,因此可以把它想象得非常小.

$\max(a,b,\cdots)$ 表示 $a,b,\cdots$ 中的最大数,而 $\min(a,b,\cdots)$ 表示其中最小的数.

1.1 一致收敛

读者一定很熟悉收敛级数的概念[①]. 级数的标准表示是

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum u_n$$

除非另行规定,和的上下限常是$(1,\infty)$. 级数的第 n 部分和为

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

我们先回忆收敛的定义. 若对任何给定的正数 ε,不论它如何小,常能找到依赖于 ε 的数 n_0,使

$$|s - s_n| < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

成立,则称级数收敛于和 s. 换言之,当 n 趋向无穷时,s_n 趋于极限 s.

现在假定级数的每一项都是实变数 x 的函数. 通常都假定变数在某一闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上变动,但它的变动范围也可以是开区间 $a < x < b$,甚至可以是任何点集. 现在将级数记如

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots = \sum u_n(x)$$

而用 $s_n(x)$ 表它的第 n 部分和. 当然,这个级数可能在某些 x 上收敛而在另一些 x 上发散. 假如对于考虑的全体 x,它都收敛,那么它的和就是 x 的函数. 因函数在这些 x 上都有定义,我们用 $s(x)$ 表示之.

定义 若对任给的正数 ε,不论它如何小,常能找到一个只依赖于 ε 但与 x 无关的数 n_0,使对 $n > n_0$ 以及区间(a,b)中的每一 x,都有

$$|s(x) - s_n(x)| < s$$

则称级数 $\sum u_n(x)$ 在区间(a,b)中一致收敛.

显然,一致收敛蕴含了在区间中每一 x 上的收敛. 级数可能(我们将举例说明)在区间中每一 x 上都收敛,但却非一致收敛,因为可能发生这种情形. 对于每一对 x 与 ε,都有一 n_0 与之对应,使当 $n > n_0$ 时$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$;但可能在 x 趋近区间中某一点时,n_0 无限变大,此时级数就不能一致收敛了.

要注意的是:一致收敛是一个区间(或点集)相联系而不是与某单独的点相联系的性质.

1.11 一致收敛的检验法 正如对于常数项级数存在检验收敛的方法一样,对于函数项级数也有检验一致收敛的方法. 其中最简单的也是最有用的检验法是维尔斯特拉斯(Weierstrass)法. 它的叙述如下:

---

① 参考 P. M. §76.

设 $\sum a_n$ 是各项均为正常数的收敛级数，若它对于全体 n 与 (a,b) 中的全体 x，都有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n$$

则称级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 (a,b) 上一致收敛.

首先，由通常的比较定理（P. M. §167，§184），级数 $\sum u_n(x)$ 在每一 x 上都收敛，故对每一 x 都有和 $s(x)$. 又当 n 大于某一 n_0 时

$$|s(x)-s_n(x)| = |u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots| \leqslant a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots$$

小于给定的 ε. 因为 a_n 与 x 无关，所以 n_0 也与 x 无关，这就证明了定理.

请注意：假如 $|u_n(x)| \leqslant a_n$ 并非对全体 n 都成立，而是对全体充分大的 n 成立，则上述结果依然正确.

有时要用到另一个属于同一类型但更一般的结果. 若 $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$，又 $\sum v_n(x)$ 一致收敛，则 $\sum u_n(x)$ 也必一致收敛. 读者试自证之.

例题　（i）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上一致收敛，此处 $-1<a<b<1$.（取 a_n 为 $|a|^n$ 与 $|b|^n$ 中之较大者.）

（ii）三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

在任何区间上都一致收敛.

（iii）迪利克雷（Dirichlet）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 在 $a \leqslant s \leqslant b$ 上一致收敛，其中 $1<a<b$.（取 $a_n = n^{-a}$；参见 P. M. §175. 我们用 $\zeta(s)$ 表此重要级数的和.）

（iv）级数

$$\{1-(1-x^2)\}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x^2)^n$$

在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上一致收敛.

（v）对于通项为二元（或多元）函数的级数，如

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta$$

（变数为 r 与 θ），也可类似地定义一致收敛. 试证上面的级数在 $0 \leqslant r \leqslant b < 1$ 以及 θ 的任何取值上都一致收敛.

1.12　其他检验法　一般来说，任何检验收敛的方法都可成为检验一致收敛的方法，只要它的条件能够不依赖于 x 得到成立. 举例来说（P. M. §168），如果有小于 1 的数 r，使对全体 n 都有

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \leqslant r$$

则在此特殊 x 上，$\sum u_n(x)$ 收敛，使上式成立的 r 通常与 x 有关，假如对全体 x，能有同一个 r，使上面的条件成立，则当 $u_1(x)$ 有界时，级数一致收敛. 因若重复应用上面的不等式，将得

$$|u_n(x)| \leqslant r^{n-1}|u_1(x)| \leqslant Mr^{n-1}(\text{若}|u_1(x)| \leqslant M)$$

由比较检验法即得结果.

其他的收敛检验法也可同样地推广，例如对于迪利克雷检验法（P. M. §189），类似的一致收敛检验法如下：

设 ϕ_n 为 n 的正值函数，当 $n\to\infty$ 时，ϕ_n 单调地趋向于零，又若有常数 A，使

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \leqslant A$$

对全体 N 与 x 都成立，则级数

$$\sum \phi_n u_n(x)$$

一致收敛.

读者应该能够毫无困难地给出它的严格证明①.

例题 （ⅰ）设 a_n 为正数，且单调减少地趋向于零，则在任何不包含 2π 的整倍数的区间中，级数

$$\sum a_n \sin nx$$

一致收敛.（比较 P. M. 的习题 LXXIX，2. 利用恒等式

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x})$$

（ⅱ）在同样条件下，级数

$$\sum a_n x \sin nx$$

在一含有 $x=0$ 的区间中一致收敛.

1.13 一致收敛的充要条件 级数 $\sum u_n(x)$ 一致收敛的充要条件是：给定任何正数 ε，常能求得与 ε 有关但与 x 无关的数 n_0，使对大于 n_0 的全体 m 与 n 都成立.

这相当于常数项级数的"收敛的一般原则"（P. M. §83，§84）.

正如在常数项级数中那样，易见此条件为必要的，因为

① 见 Bromwich 的 *Infinite Series*（《无穷级数》），第二版，§44.

$$|s_m(x)-s_n(x)|\leqslant|s(x)-s_m(x)|+|s(x)-s_n(x)|$$

故当级数一致收敛时，上述条件自然满足. 对于常数项级数，充分性的证明比较困难. 但一旦“常数项”情形的困难被克服，“变数项”情形也就没有更多的困难了. 现在假定条件已经满足，于是由关于常数项级数的定理，级数 $\sum u_n(x)$ 在每一 x 上都收敛. 以 $s(x)$ 表示级数的和，给定 ε，并取 n_0 使

$$|s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon\quad(m>n_0,n>n_0)$$

固定 m，令 $n\to\infty$，于是由 $s_n(x)\to s(x)$ 推得：当 $m>n_0$ 时

$$|s_m(x)-s(x)|\leqslant\varepsilon$$

故级数一致收敛.

1.131　下面关于三角级数类的定理[①]是上述原则的一个很好例子.

设正数序列 b_n 单调减少，则级数

$$\sum b_n\sin nx$$

在任何区间上都一致收敛的充要条件是 $nb_n\to 0$.

先证条件的必要性. 取 $x=\pi/(2p)$ 与 $n=\left[\frac{1}{2}p+1\right]$[②]，则

$$\begin{aligned}&b_n\sin nx+b_{n+1}\sin(n+1)x+\cdots+b_p\sin px\\&>b_p(\sin nx+\cdots+\sin px)>b_p\left(\frac{1}{2}p-1\right)\sin\frac{1}{4}\pi\end{aligned}$$

最后一个不等式是因为在括号内至少含有 $\left(\frac{1}{2}p-1\right)$ 项，而对于每一项都有 $mx>\frac{1}{4}\pi$. 因为级数在一含有原点的区间中一致收敛，故当 $p\to\infty$ 时不等式的左方趋向于零，所以 $pb_p\to 0$.

在证明条件的充分性时，需要用到下面的结果，也就是所谓阿贝尔(Abel)引理：

设
$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$$

且对全体 n

$$m\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant M$$

则

$$b_1m\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1M$$

对全体 n 都成立.

命 $s_n=a_1+\cdots+a_n$，于是

---

① Chaundy 与 Jolliffe(1).

② $[x]$表示 x 的整数部分.

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=b_1s_1+b_2(s_2-s_1)+\cdots+b_n(s_n-s_{n-1})$$
$$=s_1(b_1-b_2)+s_2(b_2-b_3)+\cdots+s_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+s_nb_n$$[①]

因为各个括号内的数或者是正数,或者等于零,故将 s_m 换为 M 后,这个和的数值不会减少,由此得到

$$M(b_1-b_2)+M(b_2-b_3)+\cdots+Mb_n=Mb_1$$

这就是需要的上界. 类似地,可以求得需要的下界. 这样就证明了引理.

在所论的级数中,每一项都是奇的,且有周期 2π,所以只须考虑区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$上的情形. 现在研究和

$$s_{n,p}=b_n\sin nx+\cdots+b_p\sin px$$

其中 n 与 p 互相独立:命 $\mu_n=\max\limits_{m\geqslant n}(mb_m)$,则 $\mu_n\to 0$. 当 $x\geqslant\pi/n$ 时,我们应用阿贝尔引理,因为对全体 n 与 r,都有

$$|\sin nx+\cdots+\sin rx|=\left|\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(r+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}$$

又因$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$在 $0<\theta<\dfrac{1}{2}\pi$ 中单调减少

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}\leqslant\frac{\pi}{x}$$

所以

$$|s_{n,p}|\leqslant\frac{b_n\pi}{x}\leqslant nb_n\leqslant\mu_n$$

当 $x\leqslant\pi/p$ 时,因为 $\sin\theta<\theta$,故有

$$|s_{n,p}|\leqslant b_nnx+\cdots+b_ppx\leqslant p\mu_nx\leqslant\pi\mu_n$$

当 $\pi/p<x<\pi/n$ 时,把这两种方法结合起来应用,我们有

$$|s_{n,p}|\leqslant|s_{n,k}|+|s_{k+1,p}|$$

应用阿贝尔引理于第二部分,而将另一方法应用于第一部分,得到

$$|s_{n,p}|\leqslant k\mu_nx+b_{k+1}\pi/x\leqslant\mu_n[kx+\pi/\{(k+1)x\}]$$

取 $k=[\pi/x]$,就有

$$|s_{n,p}|\leqslant\mu_n(\pi+1)$$

因此不论何种情形

① 比较 P. M. §189.

$$|s_{n,p}| < A\mu_n$$

恒成立，又因 $\mu_n \to 0$，故得结果.

1.14　一致收敛性与连续性　直到目前为止，我们还没有提出研究一致收敛级数的任何原因. 有很多理由可以说明它是重要的，但不是所有的都能在本章中加以阐述，第一个理由就是下面的定理：

连续函数的一致收敛级数之和还是连续函数.

采用记号如前，并记

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

则 $r_n(x)$ 便是级数中 n 项以后的余项. 设 x 与 $x+h$ 为所论区间中的任何两点，则有

$$\begin{aligned}|s(x+h) - s(x)| = |s_n(x+h) - s_n(x)\\ + r_n(x+h) - r_n(x)| \leqslant |s_n(x+h) - s_n(x)|\\ + |r_n(x+h)| + |r_n(x)|\end{aligned}$$

给定 s 后，可取 n_0 使对全体 h 都有

$$|r_n(x+h)| < \varepsilon, \quad |r_n(x)| < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

现在固定一个适合此条件的 n. 在 n 固定以后，因为 $s_n(x)$ 是 n 个连续函数的和，所以它也是连续函数. 故能取 δ 很小，使

$$|\delta_n(x+h) - s_n(x)| < \varepsilon \quad (|h| < \delta)$$

成立，联合以上这些不等式就得

$$|s(x+h) - s(x)| < 3\varepsilon \quad (|h| < \delta)$$

这就证明了 $s(x)$ 的连续性.

需要注意，即使函数 $s_n(x)$ 只在点 x 上连续，结果还是正确. 因为我们用到的只是当 $h \to 0$ 时 $s_n(x+h) \to s_n(x)$ 的事实，其中 x 固定，因此我们能将结果叙述如下：

假如一致收敛的函数项级数的每一项都各趋于一极限，则级数的和的极限就是各项极限的和.

1.2　复项级数①、幂级数

一致收敛的理论可以扩展到形如

$$u_1(z) + u_2(z) + \cdots$$

的级数上去，其中通项 $u_n(x)$ 为复变数 z 的函数；而区间上的一致收敛将代之以在 z 平面的某区域如圆或正方形上的一致收敛. 读者应当能够毫无困难地将

① P. M. §190.

定义与检验法推广到这种情形. 由一致收敛级数的和的连续性定理也可立刻推广到复函数的级数中去.

例题 以 s 表复变数,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 在 $\mathbf{R}(s) \geqslant a > 1$ 中的任何有限区域上一致收敛.

由这个级数的和所定义的函数 $\zeta(s)$ 在区域 $\mathbf{R}(s) > 1$ 的每一点都连续.

[参照 §1.11 的例题(ⅲ)]

1.21 幂级数 最简单的一致收敛复项级数之一就是幂级数. 我们知道(P. M. §193)幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

有一收敛半径 R(它可能是零也可能是无穷). 级数在 $|z| < R$ 时收敛,而在 $|z| > R$时发散.

级数在 $|z| \leqslant R'$ 上一致收敛,此处 R' 为任何小于 R 的正数.

命 ρ 为一介于 R' 与 R 间的数. 因为级数在 $z=\rho$ 上收敛,故必有与 n 无关的常数 K,使 $|a_n\rho^n| < K$ 对全体 n 都成立. 因此当 $|z| \leqslant R'$时

$$|a_n z^n| = \left| a_n \rho^n \cdot \left(\frac{z}{\rho}\right)^n \right| < K\left(\frac{R'}{\rho}\right)^n$$

上式最后一项与 z 无关,且是一收敛几何级数的通项,因此级数一致收敛(利用与 §1.11 类似的关于复函数的检验方法).

我们已经证明,落在收敛圆内的任何圆都是一致收敛的区域,但收敛圆本身不一定是一致收敛的区域. 事实上,在这个圆的圆周上,级数甚至不一定收敛.

例题 级数 $\sum z^n/n^2$ 的收敛圆是一致收敛的区域.

1.22 阿贝尔定理 在上面的研究中,还有一个值得注意的可能情形没有讨论. 就最简单的情形来说,假定实幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

有收敛半径 1,又假定级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{2}$$

收敛,则在此情形中,一致收敛的区间能否向右一直扩展到 $x=1$? 对此回答是肯定的.

若级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$