



地理坐标系

计算机代数精密分析理论

■ 李厚朴 边少锋 钟斌 著

Dili Zuobiaoxi Jisuanji
Daishu Jingmi Fenxi Lilun



国防工业出版社

National Defense Industry Press

本书由国家自然科学基金项目(批准号:41201478、41274013)资助出版

地理坐标系计算机代数 精密分析理论

李厚朴 边少锋 钟斌 著



国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书将计算机代数数学分析方法应用于地理坐标系数学分析,借助具有强大符号运算功能的计算机代数系统,导出了一些理论上更为严密、形式上更为简单、精度上更为精确的符号形式的公式和算法,一定程度上革新了地理坐标系数学分析理论。

全书共分9章,第1章绪论介绍研究背景和全书主要内容;第2章介绍常用坐标系及其转换;第3章介绍常用纬度及其变换关系式;第4章介绍常用航线的数学分析和代数表示;第5章介绍常用正轴圆柱投影和正轴圆锥投影的直接变换;第6章介绍常用等角投影及其变换的复变函数表示;第7章介绍地球重力基准和正常重力场;第8章将 CGCS2000 与国内外主要坐标系进行比较分析;第9章对全书工作进行总结和展望。

本书可作为大地测量、地理信息系统、地图制图、导航、遥感等相关专业高等院校师生、科研人员、工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

地理坐标系计算机代数精密分析理论/李厚朴,边少锋,
钟斌著. —北京:国防工业出版社,2015.5
ISBN 978-7-118-10209-3

I. ①地... II. ①李... ②边... ③钟... III. ①地
理坐标系—计算机代数—数值分析 IV. ①P21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 106612 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11½ 字数 256 千字

2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 40.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前 言

地理坐标系是描述近地空间物体运动的重要参考系,广泛用作导航、定位和测量的基准。地理坐标系精密计算需要处理涉及椭球偏心率的幂级数展开、椭圆积分、隐函数高阶导数求取等大量的复杂数学分析问题。限于历史条件,以往主要依靠人工推导完成,导出的公式形式较为复杂繁琐;采取的近似处理影响了公式的精度;有的公式表现为具体的数值形式,仅适用于我国 1954 年北京坐标系和 1980 年西安坐标系下的解算,难以满足我国已经启用的三维地心坐标系——2000 国家大地坐标系下的计算需求。

本书将计算机代数数学分析方法系统地应用于地理坐标系数学分析,借助具有强大符号运算功能的计算机代数系统,深入研究了常用坐标系统及其转换、常用纬度、航线、地图投影及其变换和正常重力场的精确计算问题,导出了便于应用和记忆的符号形式的公式和算法,一定程度上革新了地理坐标系数学分析理论。

全书共 9 章,第 1 章绪论,介绍了地理坐标系的建设现状和分析研究概况;第 2 章常用坐标系及其转换,介绍了导航和测量中常用的坐标系,研究了不同坐标系之间的转换问题;第 3 章常用纬度及其变换关系式,推导了 6 类纬度及其变换的符号表达式,给出了适用于我国常用大地坐标系的实用公式;第 4 章常用航线的数学分析和代数表示,阐述了导航和测量中常用的航线,借助计算机代数系统对航线计算中的复杂数学问题进行了推导,完善了常用航线的计算体系;第 5 章正轴圆柱投影和正轴圆锥投影的直接变换,建立了正轴圆柱投影间、正轴圆锥投影间、正轴圆柱投影和正轴圆锥投影间的直接变换关系式,避免了过去“圆柱→椭球→圆锥”间接变换导致的误差;第 6 章常用等角投影及其变换的复变函数表示,以复变函数为基础,利用计算机代数数学分析手段建立了高斯投影、墨卡托投影和等角圆锥投影及其变换的复变函数表达式;第 7 章地球重力基准和正常重力场,阐述了地球重力场测量中的有关重力基准,研究了地球正常重力场的精确计算问题;第 8 章 CGCS2000 与国内外主要坐标系的比较分析,精确计算了 CGCS2000 的椭球参数,分析了 CGCS2000 与 WGS84、GRS80 的差异以及采用 CGCS2000 对我国现有参心坐标系下地图的影响;第 9 章对本书工作进行了总结和展望。

本书写作过程中,得到了海军工程大学导航工程系领导和同事的帮助与支持,特此表示真诚感谢。本书能够出版,还要特别感谢国家自然科学基金项目(批准号:41201478、41274013)的资助。

由于作者学识水平有限,书中难免有错误和不当之处,恳请各位读者同仁批评指正。我们的邮件地址是 lihoupu1985@126.com,作者将不胜感激。

作者

2015 年 4 月于海军工程大学

符号说明

a, b	参考椭球长半轴, 短半轴
f	参考椭球扁率
e, e'	参考椭球第一偏心率, 第二偏心率
M, N	子午圈曲率半径, 卯酉圈曲率半径
B, L, H	大地纬度, 大地经度, 大地高
ϕ, u	地心纬度, 归化纬度
ψ, φ, ϑ	等距离纬度, 等角纬度, 等面积纬度
X, q, F	子午线弧长, 等量纬度, 等面积纬度函数
S, σ	椭球面从赤道起算的大地线长, 球面从赤道起算的球面弧长
U_0, γ_0	水准椭球表面正常重力位, 正常重力
γ_e, γ_p	赤道正常重力, 两极正常重力
$m_2, m_4, m_6, m_8, m_{10}$	B 与 u, ϕ 与 u 之间展开式的系数
$n_2, n_4, n_6, n_8, n_{10}$	B 与 ϕ 之间展开式的系数
$K_2, K_4, K_6, K_8, K_{10}$	子午线弧长正解展开式的系数
$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}$	等距离纬度正解展开式的系数
$\beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_8, \beta_{10}$	等角纬度正解展开式的系数
$\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_8, \gamma_{10}$	等面积纬度正解展开式的系数
$a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$	等距离纬度反解展开式的系数
$b_2, b_4, b_6, b_8, b_{10}$	等角纬度反解展开式的系数
$c_2, c_4, c_6, c_8, c_{10}$	等面积纬度反解展开式的系数
f_0, f_2, f_4, f_6, f_8	大地线长 S 关于球面弧长 σ 展开式的系数
g_2, g_4, g_6, g_8	球面弧长 σ 关于大地线长 S 展开式的系数
h_0, h_2, h_4, h_6	椭球面经差 ΔL 关于球面经差 $\Delta \lambda$ 展开式的系数
i_0, i_2, i_4, i_6	地心纬度为变量的子午线弧长展开式的系数

$\xi_1, \xi_3, \xi_5, \xi_7, \xi_9,$

子午线弧长变换至等量纬度的直接展开式的系数

$j_0, j_2, j_4, j_6, j_8, j_{10}$

等量纬度变换至子午线弧长的直接展开式的系数

$\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_9, \varepsilon_{11}$

子午线弧长变换至等面积纬度函数的直接展开式的系数

$k_0, k_2, k_4, k_6, k_8, k_{10}$

等面积纬度函数变换至子午线弧长的直接展开式的系数

$\eta_1, \eta_3, \eta_5, \eta_7, \eta_9, \eta_{11}$

等量纬度变换至等面积纬度函数的直接展开式的系数

l_1, l_3, l_5, l_7, l_9

等面积纬度函数变换至等量纬度的直接展开式的系数

z, w

复数坐标, 复数等量纬度

B, Φ, Ψ

复数纬度, 复数等角纬度, 复数底点纬度

$\delta_2, \delta_4, \delta_6$

展至扁率 f 的三次项的正常重力公式系数

β_0, β_1

展至扁率 f 的平方项的正常重力公式系数

目 录

第1章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 地心坐标系的建设进展	3
1.3 计算机代数与计算机代数系统及其在测量中的应用概况	5
1.4 基于参考椭球面的地理坐标系数学分析研究概况	7
1.5 本书的主要内容	8
第2章 常用坐标系及其转换	11
2.1 常用坐标系	11
2.1.1 空间直角坐标系与大地坐标系	11
2.1.2 站心切平面坐标系	12
2.1.3 平面直角坐标系	13
2.1.4 椭球坐标系	13
2.2 我国常用的大地坐标系	14
2.2.1 1954年北京坐标系	14
2.2.2 1980年西安坐标系	15
2.2.3 WGS84坐标系	15
2.2.4 2000国家大地坐标系	16
2.3 坐标转换	17
2.3.1 大地坐标与空间直角坐标的相互转换	17
2.3.2 不同空间直角坐标的转换	19
2.3.3 不同大地坐标的转换	20
第3章 常用纬度及其变换关系式	24
3.1 大地纬度、地心纬度和归化纬度及其关系式	24
3.1.1 地心纬度和归化纬度的定义	24
3.1.2 大地纬度、地心纬度和归化纬度间的关系式	25
3.2 等距离纬度、等角纬度和等面积纬度正解展开式	28
3.2.1 等距离纬度正解展开式	29
3.2.2 等角纬度正解展开式	30
3.2.3 等面积纬度正解展开式	31
3.2.4 实用正解展开式及精度分析	33
3.3 等距离纬度、等角纬度和等面积纬度反解展开式	35
3.3.1 基于幂级数展开法的反解展开式	36

3.3.2	基于 Hermite 插值法的反解展开式	39
3.3.3	基于 Lagrange 级数法的反解展开式	43
3.3.4	实用反解展开式及精度分析	47
第 4 章	常用航线的数学分析与代数表示	50
4.1	大地主题解算	50
4.1.1	大地线的定义和性质	50
4.1.2	大地主题解算方法概述	51
4.2	Bessel 大地主题解算	53
4.2.1	基本原理	53
4.2.2	Bessel 微分方程的解	55
4.2.3	Bessel 大地主题正解	57
4.2.4	Bessel 大地主题反解	60
4.2.5	Bessel 大地主题正反解精度分析	64
4.3	导航使用的大地线长计算方法	68
4.3.1	Andoyer - Lambert 公式	68
4.3.2	计算大地线长的大椭圆法	70
4.3.3	Andoyer - Lambert 公式和大椭圆法的精度分析	72
4.3.4	顾及高程时两点间大地距离的计算	74
4.4	大圆航线和大椭圆航线	77
4.4.1	大圆航线	77
4.4.2	大椭圆航线	79
4.5	恒向线的航迹计算法	81
4.5.1	墨卡托航法	81
4.5.2	中分纬度航法	84
4.5.3	算例及误差分析	85
第 5 章	正轴圆柱投影和正轴圆锥投影的直接变换	87
5.1	地图投影的概念、分类及变换	87
5.1.1	地图投影的概念	87
5.1.2	地图投影的分类	88
5.1.3	地图投影变换	90
5.2	子午线弧长、等量纬度和等面积纬度函数间变换的直接展开式	92
5.2.1	子午线弧长和等量纬度间变换的直接展开式	92
5.2.2	子午线弧长和等面积纬度函数间变换的直接展开式	96
5.2.3	等量纬度和等面积纬度函数间变换的直接展开式	99
5.2.4	直接展开式的精度分析	101
5.3	正轴圆柱投影和正轴圆锥投影的直接变换关系式	103
5.3.1	正轴圆柱投影间的直接变换关系式	103
5.3.2	正轴圆锥投影间的直接变换关系式	105
5.3.3	正轴圆柱投影和正轴圆锥投影间的直接变换关系式	108

5.4	算例分析	112
第6章	常用等角投影及其变换的复变函数表示	114
6.1	高斯投影的复变函数表示	114
6.1.1	高斯投影的传统实数表示	114
6.1.2	高斯投影正反解的迭代复变函数表示	116
6.1.3	高斯投影正反解的非迭代复变函数表示	118
6.1.4	高斯投影尺度比和子午线收敛角的复变函数表示	120
6.1.5	高斯投影正反解精度分析	121
6.2	墨卡托投影和等角圆锥投影的复变函数表示	123
6.2.1	墨卡托投影的复变函数表示	123
6.2.2	等角圆锥投影的复变函数表示	124
6.3	高斯投影、墨卡托投影和等角圆锥投影间变换的复变函数表示	125
6.3.1	高斯投影和墨卡托投影间变换的复变函数表示	125
6.3.2	高斯投影和等角圆锥投影间变换的复变函数表示	126
6.3.3	等角圆锥投影和墨卡托投影间变换的复变函数表示	126
第7章	地球重力基准和正常重力场	128
7.1	重力基准	128
7.1.1	国际重力基准	128
7.1.2	我国重力基准	129
7.2	正常重力场	130
7.2.1	正常重力场的确定方法	130
7.2.2	水准椭球面和扁球体水准面的方程	131
7.2.3	扁球体水准面和水准椭球面的形状差异	134
7.3	正常重力公式	139
7.3.1	扁球体正常重力公式	139
7.3.2	水准椭球正常重力公式	140
第8章	CGCS2000 与国内外主要坐标系的比较分析	145
8.1	CGCS2000、GRS80 和 WGS84 椭球的比较分析	145
8.1.1	椭球基本常数的比较	145
8.1.2	不同椭球几何参数和物理参数的比较	145
8.1.3	不同椭球下大地坐标的比较	151
8.1.4	不同椭球下正常重力和正常重力垂直梯度的比较	153
8.2	采用 CGCS2000 对现有地图的影响分析	155
8.2.1	对 1980 年西安坐标系下地图的影响分析	156
8.2.2	对 1954 年北京坐标系下地图的影响分析	158
第9章	结论与展望	163
9.1	研究结论	163
9.2	展望	165
附录	Mathematica 计算机代数系统	166
参考文献		168

第1章 绪论

1.1 研究背景

确定物体的位置即定位是导航和测量的一项基本任务。由于物体在空间的位置和运动是相对一定的参考坐标系而言的,因此为获得物体的位置信息,需要建立合理的坐标系,用分析或解析几何的方法确定地面或空间点位及其几何关系^[1,2]。除导航和测量学科外,其他许多学科,尽管其研究的内容千差万别,但在很多情况下,研究对象都具有位置属性,都需要相关的位置信息。

地理坐标系,是使用三维球面来定义地球表面位置,以实现通过经纬度对地球表面点位引用的坐标系。地理坐标系事实上早已应用于早期的天文地理中,尽管受制于当时地域限制,人们的视野无法顾及到更远的地方,误差是不可避免的,但由此延伸出来的是,古人类对地理坐标还是有着相当系统的研究和认识。现今,随着卫星定位、航天遥感等勘测手段的进步,由此也引发了对地理坐标系的更精确定位。中国北斗卫星导航系统的建设与完善,就是当今各领域对地理坐标系的精确定位提出更高要求的产物。目前,地理坐标系已广泛服务于地理信息系统^[3-5]、航海导航^[6,7]、大地测量^[8-10]、地图制图^[11-13]、摄影测量与遥感^[14-16]、地球物理^[17]等领域,在经济、社会、科学的发展和国防建设中发挥着越来越重要的保障作用。

在大地测量学中,对于地理坐标系统中的经纬度有三种描述,即天文经纬度、大地经纬度和地心经纬度。大地坐标系是建立在一定的大地基准上的,用于表达地球表面空间位置及其相对关系的数学参照系。地面点的位置用大地经度、大地纬度和大地高度表示。大地坐标系的确立包括选择一个椭球、对椭球进行定位和确定大地起算数据。一个形状、大小和定位、定向都已确定的地球椭球叫参考椭球。参考椭球一旦确定,则标志着大地坐标系已经建立。大地坐标系是一种地理坐标系。

按坐标原点相对地球质心的位置,大地坐标系分为参心坐标系和地心坐标系。参心坐标系的原点偏离地心可能达到几十到几百米,而地心坐标系的原点理论上与地心重合,实际上与地心难免有些偏离。1954年北京坐标系和1980年西安坐标系是我国于20世纪建立的两种参心坐标系,在经济建设、国防建设和社会发展中曾发挥了巨大的作用,但由于当时科学技术的制约和其他历史原因,所采用的坐标系原点、坐标轴的方向均与采用现代科技手段测定的结果存在较大差异,其原点与地球质心有较大的偏差,坐标系下的大地控制点的相对精度仅为 10^{-6} ,而且只能提供二维的点位坐标,与高精度的卫星定位技术所确定的三维测量成果不能互相配适^[18]。

以地球质心为原点的地心坐标系下的大地控制点的相对精度为 $10^{-7} \sim 10^{-8}$,比现行参心坐标系下的精度提高10倍左右,使用地心坐标系可以快速获取精确的三维地心坐标。航天器的发射、轨道计算、轨道测控、远程武器的发射、制导、弹道测量都要求在地心

坐标系内操作,因此使用地心坐标系有助于航天技术与武器应用的发展。地心坐标系是卫星导航的基本坐标系,使用地心坐标系统将推动卫星导航产业,进而推动陆地、海洋和空中运输业的发展。高精度的地心坐标系是构建国家地理空间数据基础设施、在不同尺度监测地壳运动、监测海平面变化的参考框架。采用地心坐标系有利于地球空间信息产业及地球动力学、地球物理学和地震学的研究。目前利用空间技术所得到的定位和影像等成果,都是以地心坐标系为参照系。采用地心坐标系,可以更好地阐明地球上各种地理和物理现象特别是空间物体的运动,可以利用现代最新科技成果,为国家信息现代化服务。目前,采用地心坐标系的国家及地区有美国、加拿大、墨西哥、澳大利亚、新西兰、日本、韩国、菲律宾、印度尼西亚以及欧洲和南美的一些国家等。

为充分享用空间技术的成果,更好地保障和促进国防建设和国家经济社会发展,在国家测绘局和总参测绘局的领导下,我国建立了地心坐标系——2000 国家大地坐标系 (China Geodetic Coordinate System 2000, CGCS2000)。我军自 2007 年 8 月 1 日、我国自 2008 年 7 月 1 日起已经启用 2000 国家大地坐标系,该坐标系与原有国家大地坐标系转换、衔接的过渡期为 10 年。

大地坐标系的定义包括坐标系的原点、3 个坐标轴的指向、尺度以及地球参考椭球基本常数的定义。参考椭球面既是地球表面的数学参考面,又是地球正常重力场的参考面。在惯性导航不同坐标系的变换、无线电导航距离的解算以及远程武器的精确打击中,为提高计算精度,需要选择参考椭球作为地球的数学模型,以提供精确的点位信息。

地球重力场是地球最重要的物理场之一,它反映了地球物质的空间分布、运动和变化,并制约着在该行星上及其邻近空间所发生的一切物理事件^[9]。精密的地球重力场模型和地面点的重力场参量在军事科学中发挥着重要作用。研究表明,弹道导弹、巡航导弹、洲际导弹等远程打击武器命中精度提高 2 倍,相当于弹头 TNT 当量提高 8 倍。随着武器系统技术的不断完善,地球重力场误差成为限制进一步提高武器命中精度的重要因素。影响洲际导弹落点精度的主要因素是扰动重力场,包括扰动重力和垂线偏差。扰动重力对 1000 ~ 15000km 射程可产生 1 ~ 2km 落点偏差,对 3000 ~ 5000km 的中远程导弹可产生 200 ~ 500m 的落点偏差,发射点垂线偏差在这一射程上也可产生 1km 左右的落点偏差。因此,全面掌握发射首区重力场的精细结构,建立发射首区详细的重力场模型,可以提高远程打击武器的制导精度,显著增长武器威力。此外,高精度高分辨率的地球重力场信息可为航天器轨道设计和确定^[19]、水下航行器重力匹配导航^[20-23]的实现等提供重要的数据保障。

大地坐标系计算主要研究椭球面上各类坐标系的建立与转换、各类几何量(如常用纬度和航线)的计算、地图投影及其变换和地球正常重力场的精确计算等,涉及与参考椭球有关的内容相当广泛的数学分析和数值计算过程。传统的分析方法和演算过程是借助于笔、纸和参考书,经过演算者大脑的综合性分析和创造性思维去得出新的公式和算法。限于问题本身的复杂性,完全靠人工推导,不仅费时费力,而且导出公式的形式复杂繁琐,使用时计算效率不高;特别是人为采取的近似处理使得导出公式有可能隐含一些小的不易发现的偏差,影响了公式的精度;并且有的公式为具体的数值形式,仅适用于我国 1954 年北京坐标系和 1980 年西安坐标系下的解算,通用性不强,当前我国已经启用 2000 国家大地坐标系,今后的计算将以此为基准,给出该基准下的计算公式是非常有必要的。

随着计算机科学技术的发展,计算机代数系统应运而生。计算机代数系统是计算机科学与数学分析和代数推理相结合的产物。计算机代数系统的优越性主要在于它能够进行大规模的代数运算,在一定程度上可以使科学研究和工程技术人员从枯燥繁琐的数学分析和代数推理中解脱出来,从而有效地提高工作效率。借助计算机代数系统,研究人员的注意力可着重放在解决问题的本质方面,并且计算机代数系统强大的可视化功能还会使枯燥的数学分析问题变得生动有趣,从而使研究人员更容易发现大量数据背后隐藏的规律。

有鉴于此,针对大地坐标系计算中存在的与参考椭球有关的各类复杂数学分析问题,本书将引入先进的计算机代数系统,借助该系统强大的符号运算功能完成推导,从而不仅可以使已有的近似分析精确化,提高计算精度,而且可以简化已有算法的复杂形式,提高计算效率;并且更重要和更有意义的是,依托计算机代数系统强大的数学演绎能力,完全可以导出一些前人想到但限于当时条件未能完成的算法;在此基础上,系统地给出适用于我国地心坐标系 CGCS2000 的精密计算公式,满足导航和测量等相关学科的应用需求。

1.2 地心坐标系的建设进展

20 世纪 80 年代以来,由于全球定位系统 GPS(Global Positioning System)、人卫激光测距 SLR(Satellite Laser Ranging)、甚长基线干涉 VLBI(Very Long Baseline Interferament)等空间大地测量技术的迅速发展,世界各国都在更新和完善各自的大地坐标系统和它相应的坐标框架。为迎接 21 世纪经济和社会的持续发展、提供信息化社会发展的基础地理平台、更科学地描述动态的地球,近年来一些国家和地区都对本国或本地区的大地基准进行了更新和现代化。地心坐标系统及其框架正在逐渐取代传统的非地心大地坐标系统及其框架,采用地心坐标系成为坐标系统发展的总趋势。

北美、南美、欧洲等发达国家和地区都相继建成了地心坐标系。北美早在 1986 年就完成了北美大地坐标系 NAD83 的建立,对遍布美国、加拿大、墨西哥以及中美地区的 26 万余个大地点进行了整体平差,获得了 26 万余点的地心坐标^[24]。NAD83 采用 GRS80 参考椭球,参考椭球的原点与地球质心重合。北美 NAD83 第 2 版增加了 GPS、VLBI 和 SLR 观测信息,统一处理后 NAD83 地心坐标系与地球质心的重合度大约为 2m,空间坐标轴定向为 0.03",网的尺度达到 0.871×10^{-6} ,大地高的精度提高到 0.6m。1994 年出台了第 3 版 NAD83,它考虑到了 1989 年国际地球参考框架 ITRF89 的观测成果。在 GPS 技术强有力的支持下,美国不断更新地心坐标的精度。1984 年建立了世界大地坐标系 WGS84;1996 年做了改进,标以 WGS84(G873),历元为 1997.0, WGS84(G873)与 ITRF2000 的符合程度在 0.5cm。2001 年美国又对 WGS84 进行了再次精化,取名为 WGS84(G1150)。WGS84(G1150)与 2000 年国际地球参考框架(ITRF2000)的符合程度在 1cm。1995 年南美洲 11 个国家开展了近 58 个点的 GPS 会战(即 SIRGAS 计划),建立了南美地心坐标框架^[25]。SIRGAS 与 ITRF94 在历元 1995.4 一致,坐标外部符合精度为 3cm,坐标分量的内部精度为 4mm。南美许多国家在 SIRGAS 的基础上,也建立了各自的地心参考框架,地心坐标内部精度约为 2cm。自 1987 年以来,几乎所有欧洲国家都积极参与了建立欧洲参考框架 EUREF(European Reference Frame)的工作^[26]。框架的空间坐标部分由 EUREF 永久

站网中各种不同的高精度 GPS 网组成。到目前为止,EUREF 永久站网根据统一定义的标准和指南,吸纳了欧洲的 GPS 连续跟踪站。这些永久性跟踪站网对维持欧洲地面坐标框架和国际地心坐标框架有很大帮助。欧洲参考系固联于欧洲板块的稳定部分,相应的欧洲参考框架分为 3 级:A 级相对于 ITRF89 框架的精度达 1cm,B 级在给定历元的坐标精度达 1cm,C 级相对于 ITRF89 的精度达 5cm。

非洲地心坐标参考框架 AFREF(African Reference Frame)最早以“非洲多普勒测量 ADOS(Africa Doppler Survey)”开始,GPS 的广泛应用使之成为现实^[27]。AEREF 网的主要目标是:定义一个非洲大陆坐标系统,它和 ITRF 全球坐标框架相一致,为建立非洲国家级的三维坐标框架提供支持;建立间距约 1000km 连续的永久的 GPS 跟踪站;实现统一的非洲垂直基准并支持建立非洲精密大地水准面。鉴于共有 54 个非洲国家参与该项目,实施难度较大,因此该网拟先从区域性坐标框架建起,即首先建成北非参考网、西非参考网、东非参考网、中非参考网以及南非参考网,之后再合并构成非洲大陆统一的大地测量坐标框架。虽然非洲坐标框架工作于 1999 年至 2003 年之间取得了一定的成果,但由于非洲国家众多,国情不同,要全部完成非洲坐标框架的建造还要花相当长的时间。

我国周边国家地心坐标系的建设也取得了长足进展。澳大利亚从 1994 年起,采用了新的地心基准 GDA94,取代了原来的非地心基准 AGD66 和 AGD84^[28,29];新西兰从 1998 年起采用了新的地心参考基准 NZGD2000,参考历元为 2000.0,相应坐标框架中的点位及其变动完全依靠卫星定位技术(如 GPS 等)进行测定^[30];日本从 2002 年 4 月 1 日起正式启用 2000 日本大地基准 JGD2000,取代使用了近百年的 1918 东京基准(TD1918),JGD2000 采用国际地面参考系统 ITRS(International Terrain Reference System)的定义,历元为 1997.0^[31];蒙古建立了新的国家地心三维坐标框架 MONREF97,取代了原来的蒙古国家二维平面坐标系统 MSK42,MONREF97 的大地坐标系统和 WGS84 保持一致^[32];韩国 1994 年建成了该国的大地控制网,但由此确定的坐标系和空间技术特别是和卫星定位的结果所对应的坐标系不一致,因此韩国于 1998 年推出了一个完全新型的国家三维地心大地坐标系统 KGD2000,取代了 PPGN 所定义的坐标系统,KGD2000 以 ITRF97 为参照,历元为 2000.0^[33];马来西亚也采用了国家三维地心大地坐标系统 NGRF2000,同样以 ITRF97 为参照,历元为 2000.0^[34];苏联从 20 世纪 70 年代起决定改用全球地心坐标系,1988 年俄罗斯军方开始实施新的统一地心坐标系 CK-90,并规定 CK-90 与 CK-42 并用,在民用方面,俄罗斯从 1995 年起改用 CK-95 新系统,之后俄罗斯国防部又推出了更精确的地心坐标系 PZ-90,精度为 1~2m,控制点的相对精度为 0.2~0.3m,2007 年俄罗斯统一采用国家地心坐标系 PZ-90^[35]。

20 世纪 60 年代末期,我国空间科学和武器技术的发展对地心坐标的要求日益迫切,建立地心坐标系成为当时摆在大地测量工作者面前的重要任务^[36]。当时确定的建立方案是:首先用“公共点”坐标,求定局部坐标系与地心坐标系之间的转换参数,然后利用求出的转换参数将局部坐标系转换至地心坐标系。因此,求定坐标转换参数就成为建立地心坐标系的关键。20 世纪七八十年代,我国先后建立了“DX-1”(地心一号)和“DX-2”(地心二号)两组转换参数。“DX-1”于 20 世纪 70 年代后期颁布实施,是从 1954 年北京坐标系转换到地心坐标系的转换参数,只有 3 个平移参数而不包含旋转参数和尺度变化参数,仅表示 1954 年北京坐标系椭球中心相对于地球质心的位置,忽略了坐标轴向的不

平行,“DX-1”转换参数转换的坐标精度仅在15m左右。“DX-2”于20世纪80年代后期颁布实施,是由1980年国家大地坐标系或由新1954年北京坐标系转换到地心坐标系的转换参数,由3个平移参数、3个旋转参数和1个尺度参数组成,用“DX-2”转换得到的地心坐标的中误差约在5m左右。由于我国地面大地控制网采用逐级控制,地面网点坐标的累积误差较大,无论采用何种坐标转换模型,均不可避免地带来误差,小则分米级,大则数十米级,因此不能将坐标转换等同于建立地心坐标系,不能将坐标转换参数当作坐标系。“DX-1”和“DX-2”仅是一组转换参数,毕竟不能代表一个地心坐标系。

中国大地测量学家如陈俊勇^[37,38]、魏子卿^[39,40]、杨元喜^[41]、程鹏飞^[42]等对我国新一代地心坐标系的建立一直给予高度关注,充分分析了原有参心大地坐标系存在的问题,详细研究和描述了建立我国新一代地心坐标系的必要性、可行性和方法。总参测绘局、国家测绘局和中国地震局等有关单位为建立我国新一代大地坐标系做了大量的基础性工作,先后建成了全国GPS一、二级网,国家GPS A、B级网和全国GPS地壳运动监测网等三个全国性GPS网,共计2600多点。由于这三个GPS网的成果及其精度,包括同名点的坐标值之间存在差异,为此,总参测绘局与国家测绘局采用先进的数据处理理论和方法,对上述三个网进行了基准的统一,建立了我国统一的、可靠的、高精度的2000国家GPS大地网,它的国内GPS网点为2542个,提供的地心坐标精度平均优于 $\pm 3\text{cm}$ 。考虑到2000国家GPS大地网精度高、现势性好,但密度较低,将它和全国天文大地网进行联合平差,由此获得了我国近5万地面点的三维地心坐标,初步建立了2000国家大地坐标系的坐标框架。在我国测绘部门进行的充分技术准备基础上,我国政府决定采用地心三维大地坐标系,即从2008年7月1日正式启用2000国家大地坐标系,该坐标系与迄今为止比较符合客观实际的国际通用地面参考系统ITRS的定义在原则上保持一致。

1.3 计算机代数与计算机代数系统及其在测量中的应用概况

科学计算可分为两类:一类是纯数值的计算,例如求函数的值、方程的数值解;另一类计算是符号计算,又称代数运算,这是一种智能化的计算,处理的是符号。人们把这种研究可代数化的数学对象的计算理论与方法的学科,或者说符号计算与代数计算的学科称为计算机代数。简而言之,计算机代数是计算机科学与数学交叉融合的产物,是符号、代数算法的设计、分析、实现和应用的学科。

计算机代数技术的出现要晚于计算机数值计算技术。20世纪40年代中期,出现了电子计算机,它的迅速发展,极大地推动了多个领域的进步。首先表现在数值计算方面,可以大大提高运算速度,这是人们早已熟知的事实。近几十年来,计算机科学技术的飞速发展对数学科学产生了巨大的影响,各种高性能的算法日益得到重视和发展。由于设计计算机时用到了数学中的数理逻辑,所以人们希望应用它为数学推理研究服务。从60年代开始,人们研究计算机符号计算,逐步形成计算机代数,相继出现的计算机数学系统有MACSYMA、REDUCE、Mathematica和Maple等。计算机代数是不同于数值计算的另一类数学演算,必须根据有关的数学理论、应用有关的数学公式才能完成符号表达式的各种运算,这类重要的数学演示称为符号代数演算,这里“符号”强调求解数学问题的最终目的是把问题的答案用解析的公式和符号来表示。“代数”强调运算是根据代数规则精确实

现,而不是利用浮点数来实现的。现代科学技术中的理论推导、应用工程设计中都不可避免地会出现这类数学演算,而这种精确解析的公式推导运算往往非常复杂,人工难以完成,人们从而考虑该类计算能否用计算机完成。答案是肯定的,和数值运算不同,这类系统的最主要用途是完成符号的运算,即从公式到公式的解析运算,它们的运算对象是符号,而不必赋给每个符号具体的数值,它能够推导数学公式,所以计算机代数学已经成为科学研究的重要工具。计算机代数的内容又分为两大部分,一部分是计算机代数系统(语言)学;另一部分是计算机代数算法。前者属于计算机范畴,后者属于数学范畴。在计算机科学内它涉及到算法设计、数据结构、计算机语言和编译理论等领域。计算机代数算法又分成两类:一类是精确算法,另一类是人工智能专家系统算法。符号代数算法以软件系统的形式在计算机上实现,允许输入和输出符号表达式,其基本功能的扩充能解决众多学科中复杂的公式推导问题,从而计算机代数备受科技工作者重视。如果将计算机的数值计算称作计算机应用的算术阶段,那么计算机的公式推导可以称为计算机应用的代数阶段。

计算机代数系统与一般的计算机程序设计语言有一定的联系,但两者的应用领域不同。计算机程序设计语言只适合于数值计算和软件开发,而 Mathematica、Maple 等计算机代数系统则可以直接用于数学分析、代数运算、数据分析和拟合、科学计算可视化等方面。

Mathematica 是目前国内外较流行的一个计算机代数系统,广泛应用于各种基础研究、应用基础研究和工程技术各领域。Mathematica 计算机代数系统办有专门的学术刊物,发表和交流用这种系统解决各类数学分析问题的学术论文,且每年召开一次世界性的 Mathematica 学术大会。国际上,从 20 世纪 90 年代起,计算机代数系统就在大地测量界得到了普遍的应用。国际上许多大地测量学者在大地测量数学分析过程中都普遍使用计算机代数系统作为辅助的工具,以提高工作效率。德国 Stuttgart 大学大地测量学者 Grafarend 教授和他的学生日本学者 Awang 博士曾用 Mathematica 计算机代数系统对大地测量涉及的许多非线性问题,如后方交会、GPS 伪距定位、摄影测量定位进行了深入研究^[43-48],2005 年出版了专著 *Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics*,2010 年出版了第二版 *Algebraic Geodesy and Geoinformatics*,这些基于计算机代数给出的解法是无需近似的非迭代解,具有很高的计算精度。总的来看,Grafarend 等大地测量学者将侧重点放在计算机代数的“代数”功能上,导出了许多大地测量中新的代数算法,但对利用计算机代数系统强大的数学分析功能解决大地测量复杂数学分析问题研究较少。

近年来,计算机代数系统在国内各领域得到了较广泛的应用,如关于计算机代数系统 Mathematica、Maple 操作和应用方面的书籍很多^[49-51],在大地测量界也得到了一定的应用。

国内中国地震局分析预报中心郗钦文研究员首先用计算机代数演绎方法研究了引潮位问题,并取得了国际领先的研究成果^[52,53]。引潮位是指天体引起的位函数,它的展开涉及地球自转与公转、日地运动、天体位置、行星摄动、岁差、章动、地球参考系以及时间维等现代大地动力学问题。自杜德森(Doodson)1921 年发表引潮位展开以来,一直不断更新和发展。郗钦文在引潮位展开中引入计算机代数演绎,并多次改进,最后得到日月引起的潮波 3070 项,这项研究在国外被称为“Xi(郗)引潮位展开”,得到了国外同行的高度评

价,经国外多位学者检验、比较,作为完全调和展开,无论在频域或时域都具有最高精度,充分显示了计算机代数无与伦比的超级数学分析能力。

海军工程大学边少锋教授较系统地研究了计算机代数技术在大地测量的各分支学科(如椭球大地测量、物理大地测量、空间大地测量)中的应用,在椭圆函数反函数的级数展开、高斯投影的复变函数表示、复杂形体引力的积分计算和人造地球卫星轨道摄动分析等方面取得了较好的效果^[54-59],2004年在国防工业出版社出版了专著《计算机代数系统与大地测量数学分析》,较系统地总结了有关研究成果,并得到了较好的反响,充分表明计算机代数和计算机代数系统在解决大地测量复杂数学分析问题方面有广阔的应用前景。

1.4 基于参考椭球面的地理坐标系数学分析研究概况

导航和测量是在地球自然表面上进行的,但这个表面高低起伏不平,是一个相当不规则的曲面,无数学规律可言,不能直接用于计算。因此,为处理有关成果,需要选择与地球形体极为接近的、可用简单数学公式表示的、且能确定其与地球相关位置的表面作为基准面。经过长期的实践,人们逐渐认识到适当选择的旋转椭球面符合上述要求,可以作为导航和测量计算的基准面。各个国家和地区通常根据局部的天文、大地和重力测量资料,确定一个可以在一定范围内与地球相当接近的椭球,以表示地球的大小,这样的椭球叫做参考椭球。参考椭球面是代表地球的数学曲面,对导航距离解算、坐标系统数据归算和地图投影具有不可或缺的重要意义。国内外学者对基于参考椭球面的地理坐标系数学分析进行了大量的研究,取得了一批显著的成果。

在椭球面上的坐标转换和几何量的计算方面,Bowring 导出了空间直角坐标转换为大地坐标的直接公式,研究了短距离大地主题正反算问题^[60-62];朱华统阐述了建立大地坐标系的基本理论,推导出了不同空间直角坐标系和不同大地坐标系的变换公式^[63,64];陈俊勇给出了椭球参数的精密计算公式,推导出了远中距离大地主题正算和长距离大地主题反算的直接公式^[65-67];James 提出了一种用大椭圆计算大地线长度的方法^[68];熊介总结了椭球面上的测量计算理论,论述了地球椭球和大地坐标系的建立方法^[69]。

在地图投影及其变换理论研究方面,Adams 推导出了测量和制图中常用的等距离纬度、等角纬度和等面积纬度的正反解展开式,并编制了计算用表^[70];美国学者 Snyder 在其专著 *Map Projections—A Working Manual* 中系统地给出了圆柱投影、圆锥投影、方位投影等各类投影的表达式^[71,72];我国已故著名地图学家杨启和教授深入研究了地图投影变换的理论和方法^[73,74],从解析变换到数值变换,从正解变换到反解变换,以及其他变换,取得了令国内外同行瞩目的成果,于 1989 年出版了中文专著《地图投影变换原理与方法》,之后与 Snyder 合作,于 2000 年出版了英文专著 *Map Projection Transformation: Principles and Applications*,使这个研究领域大大前进一步;华荣从航海的角度出发,详细论述了海图常用投影及其变换问题^[75];任留成研究了空间投影及其变换理论和方法,并探讨了空间地图投影理论在遥感图像制图方面的应用^[76,77];金立新针对目前长大线状工程勘测、设计、施工测量中遇到的技术问题,提出了法截面子午线椭球高斯投影理论和坐标变换理论,有效克服了传统投影方法中存在的投影分带过窄、分带变换频繁、信息表达要素表达零散等不足^[78,79]。

上述问题在处理时不可避免地会遇到大量的椭球偏心率幂级数展开、隐函数高阶导数求取和复变函数运算等一系列繁琐的符号推导过程。限于当时的历史条件,计算机代数系统尚未得到充分使用,完全靠人工推导这些问题,既费时费力,又非常繁琐、冗长,很容易出错,并且随着展开阶数的增高,展开式的复杂性会呈几何级数增加,变得人工几乎不可能推导。

以在测量计算中经常用到的子午线弧长正解公式为例,它涉及的内容有:

(1) 椭圆积分无分析解,当按二项式定理展开时,需要记住其每一项的展开系数和展开项;

(2) 展开后,为积分方便又需要按有关公式化正弦幂函数为倍角函数;

(3) 合并同类项并对正弦函数逐项积分。

这些过程人工处理起来,至少需要半天的时间,还未必能保证推导的结果就一定正确;而如果借助于计算机代数系统,只需要两三条指令,几秒钟就可以非常圆满地解决,起到事半功倍的效果^[57]。

地球重力场的计算涉及较多的数学分析过程,正常重力位的确定要用到复杂的共焦椭球坐标系、勒让德特殊函数展开以及大量的积分运算^[80];研究重力、重力梯度的表示涉及非常复杂的求导运算以及球坐标与三维直角坐标的转换^[81-84];解决各种球外边值问题,需要用到复杂的球函数和特殊函数展开^[85]。这些问题,人工推导苦不堪言,且相当枯燥和繁琐,非常有必要引入计算机代数系统,简化推导过程,提高推导效率。

总的看来,过去一些理论和算法中的许多繁琐的数学分析过程主要由人工推导完成,前人为此付出了很大的努力,解决了很多问题,但限于计算手段和问题本身的复杂性,有些问题解决得并非完美,如由于人为采取的近似处理,导出的公式有时隐含有一些小的不易发现的偏差,而有的公式则表现为具体的数值形式,对于不同的参考椭球需要重新计算系数,不便于推广使用。因此,地图投影变换的理论体系有待进一步完善。

随着空间技术和信息技术的不断进步,特别是遥感(Remote Sensing, RS)与全球定位系统(Global Positioning System, GPS)技术的飞速发展,人们不断获得大范围的、多分辨率的、海量的地理空间数据,为满足计算机处理海量数据的变换需求,迫切需要研究方程简、精度高、适用范围广的地理坐标系精密算法。在这种背景下,引入计算机代数和计算机代数系统对地理坐标系计算中的数学分析问题进行深入研究,不仅可以显著提高工作效率,而且其程序设计可以保证导出公式的准确性,提高计算精度;尤其是借助计算机代数系统强大的符号运算功能,完全有可能导出一些前人想到但限于当时条件未能完成的公式和算法,实现地理坐标系分析和个别理论及应用方面较大的突破和创新;同时在实用上可大幅度提高地图投影变换的计算精度和计算效率,满足计算机处理海量数据变换的需要。

1.5 本书的主要内容

本书紧密结合我国最新启用的地心坐标系 CGCS2000,从地球的几何特性和物理特性出发,深入研究了常用坐标系统及其转换、常用纬度及其变换、常用航线的数学分析与代数表示、地图投影及其变换和正常重力场的精确计算问题,分析了 CGCS2000 与国内外主要坐标系的差异,针对以往人工推导存在既费时费力又容易出错的问题,广泛采用先进