高等工程专科教育
高等职业技术教育 适用教材

高等数学

天津理工学院 孟祥发 主编

机械工业出版社
China Machine Press

高等工程专科教育
高等职业技术教育 适用教材

高 等 数 学

主 编 孟祥发

参 编 韩 雁 王福良
张凤敏 马仲立
许敏慧 刘玉瑄
寿津莹

主 审 毛云英

机 械 工 业 出 版 社

本书系根据原国家教委高等学校工程专科基础课“高等数学”教学基本要求，并兼顾高等职业技术教育的特点编写而成，内容包括一元函数微积分、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、级数。

本书侧重于高等数学的应用，适当降低了理论深度。文字叙述通俗易懂、深入浅出，并配有数量较多、难度适中的例题和习题。为便于自学，每章编有内容小结，书末附有习题答案。

本书可供高等工程专科学校、成人高等教育、高等职业技术院校作为教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/孟祥发主编．—北京：机械工业出版社，2000.4
高等工程专科教育·高等职业技术教育适用教材
ISBN 7-111-07626-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．孟…　Ⅲ．高等数学-高等教育：技术教育-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 02263 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：冯　铁　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：李雨桥　责任印制：路　琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2000 年 5 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16·28.75 印张·705 千字
0 001—5 000 册
定价：36.00 元

前　言

本书参照原国家教委工程专科学校基础课程教学基本要求，并兼顾高等职业技术教育的特点编写而成。

本书侧重于高等数学的应用，略去了一些定理的较繁的证明，但仍注意了全书整体上的严密性。对一些重要的基本概念，力图做到叙述详尽、深入浅出、通俗易懂。本书配备有丰富的例题，努力做到题型多样，并注意解题方法的技巧性和灵活性。每节后的习题分为A、B两组，A组题是读者必须掌握的，B组题有一定难度，供学有余力的读者使用。每章后编有内容小结，包括基本要求和学习要点，并配有复习题。打*号的章节可供有关专业选用。打*号的例题已超出本书要求，可供有兴趣的读者参考。

本书的出版得到了编者所在单位和机械工业出版社教材编辑室的热情支持与帮助，在此谨表诚挚谢意。

天津大学数学系毛云英教授主审了本书全稿，并提出了许多宝贵意见，一并表示感谢。

参加编写人员及分工如下：中国民用航空学院韩雁执笔第一章，王福良执笔第二、三章；天津理工学院张凤敏执笔第四章及附录，马仲立执笔第五、六章，许敏慧执笔第七章，刘玉瑄执笔第八章，孟祥发执笔第九、十二章，寿津莹执笔第十、十一章。全书由孟祥发任主编。

限于编者的学识和水平，书中的缺点和错误在所难免，诚请读者与专家赐教。

编者

1999年10月

目　录

前言

第一章　函数　极限　连续 …… 1

第一节　函数 …… 1

习题 1-1 …… 8

第二节　数列的极限 …… 10

习题 1-2 …… 14

第三节　函数的极限 …… 14

习题 1-3 …… 18

第四节　无穷小量与无穷大量 …… 19

习题 1-4 …… 20

第五节　极限的运算 …… 21

习题 1-5 …… 28

第六节　无穷小的比较 …… 29

习题 1-6 …… 31

第七节　函数的连续性 …… 31

习题 1-7 …… 37

小结 …… 39

复习题一 …… 40

第二章　导数与微分 …… 43

第一节　导数的概念 …… 43

习题 2-1 …… 49

第二节　函数的微分法 …… 50

习题 2-2 …… 57

第三节　函数的微分及其应用 …… 59

习题 2-3 …… 64

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的微分法 …… 64

习题 2-4 …… 68

第五节　高阶导数 …… 69

习题 2-5 …… 72

小结 …… 73

复习题二 …… 74

第三章　导数的应用 …… 76

第一节　微分中值定理　罗必塔法则 …… 76

习题 3-1 …… 83

第二节　函数的单调性及其极值 …… 85

习题 3-2 …… 89

第三节　函数的最大值和最小值 …… 91

习题 3-3 …… 93

第四节　曲线的凹凸性与拐点　函数图形的描绘 …… 94

习题 3-4 …… 98

第五节　曲率 …… 99

习题 3-5 …… 103

*第六节　方程的近似解 …… 104

*习题 3-6 …… 106

小结 …… 107

复习题三 …… 107

第四章　不定积分 …… 110

第一节　不定积分的概念与性质 …… 110

习题 4-1 …… 117

第二节　换元积分法 …… 118

习题 4-2 …… 127

第三节　分部积分法 …… 129

习题 4-3 …… 133

第四节　有理函数及三角函数有理式的积分举例 …… 133

习题 4-4 …… 138

第五节　积分表的使用 …… 139

习题 4-5 …… 140

小结 …… 140

复习题四 …… 141

第五章　定积分 …… 143

第一节　定积分的概念 …… 143

习题 5-1 …… 148

第二节　定积分的性质 …… 149

习题 5-2 …… 152

第三节　微积分的基本公式 …… 152

习题 5-3 …… 157

第四节　定积分的换元积分法 …… 158

习题 5-4 …… 162

第五节　定积分的分部积分法 …… 162

习题 5-5 …… 165

第六节　定积分的近似计算 …… 165

习题 5-6 …… 168
第七节 广义积分 …… 168
习题 5-7 …… 172
小结 …… 172
复习题五 …… 173
第六章 定积分的应用 …… 175
第一节 定积分的元素法 …… 175
第二节 平面图形的面积 …… 176
习题 6-2 …… 179
第三节 体积 …… 180
习题 6-3 …… 182
第四节 平面曲线的弧长 …… 183
习题 6-4 …… 184
第五节 定积分在物理方面的应用 …… 185
习题 6-5 …… 186
小结 …… 186
复习题六 …… 187
第七章 常微分方程 …… 188
第一节 微分方程的基本概念 …… 188
习题 7-1 …… 190
第二节 可分离变量的一阶微分方程 …… 191
习题 7-2 …… 196
第三节 一阶线性微分方程 …… 197
习题 7-3 …… 201
第四节 一阶微分方程应用举例 …… 202
习题 7-4 …… 206
第五节 可降阶的高阶微分方程 …… 207
习题 7-5 …… 212
第六节 二阶线性微分方程解的结构 …… 212
习题 7-6 …… 215
第七节 二阶常系数线性微分方程的解法 …… 216
习题 7-7 …… 221
小结 …… 222
复习题七 …… 224
第八章 向量代数与空间解析几何 …… 225
第一节 行列式 空间直角坐标系 …… 225
习题 8-1 …… 229
第二节 向量 …… 230
习题 8-2 …… 235
第三节 数量积 向量积 …… 236
习题 8-3 …… 242
第四节 平面及其方程 …… 242
习题 8-4 …… 247
第五节 空间直线方程 …… 247
习题 8-5 …… 252
第六节 二次曲面 …… 253
习题 8-6 …… 259
第七节 空间曲线 …… 259
习题 8-7 …… 262
小结 …… 262
复习题八 …… 263
第九章 多元函数微分学 …… 266
第一节 多元函数的基本概念 …… 266
习题 9-1 …… 271
第二节 偏导数 …… 272
习题 9-2 …… 276
第三节 全微分及其应用 …… 277
习题 9-3 …… 280
第四节 多元复合函数与隐函数的微分法 …… 281
习题 9-4 …… 286
*第五节 方向导数与梯度 …… 287
*习题 9-5 …… 291
第六节 偏导数在几何上的应用 …… 291
习题 9-6 …… 296
第七节 多元函数的极值 …… 296
习题 9-7 …… 301
小结 …… 301
复习题九 …… 302
第十章 重积分 …… 304
第一节 二重积分的概念及性质 …… 304
习题 10-1 …… 307
第二节 二重积分计算 …… 308
习题 10-2 …… 315
第三节 二重积分的应用 …… 317
习题 10-3 …… 320
*第四节 三重积分 …… 320
*习题 10-4 …… 324
小结 …… 325
复习题十 …… 326
第十一章 曲线积分与曲面积分 …… 327
*第一节 对弧长的曲线积分 …… 327
*习题 11-1 …… 330

第二节　对坐标的曲线积分 …………………… 330
习题 11-2 ……………………………………… 334
第三节　格林公式　平面曲线积分与路径无关的条件 ……………………………… 334
习题 11-3 ……………………………………… 341
*第四节　曲面积分 ………………………… 343
*习题 11-4 …………………………………… 347
小结 …………………………………………… 348
复习题十一 …………………………………… 350
第十二章　无穷级数 ……………………… 351
第一节　常数项级数的概念与性质 ………… 351
习题 12-1 ……………………………………… 355
第二节　正项级数的审敛法 ………………… 356
习题 12-2 ……………………………………… 362
第三节　任意项级数的审敛法 ……………… 363
习题 12-3 ……………………………………… 367
第四节　幂级数 ……………………………… 368
习题 12-4 ……………………………………… 373
第五节　函数的幂级数展开 ………………… 374
习题 12-5 ……………………………………… 379
第六节　函数的幂级数展开式的应用 ……… 380
习题 12-6 ……………………………………… 384
*第七节　傅里叶级数 ……………………… 384
*习题 12-7 …………………………………… 388
*第八节　正弦级数和余弦级数 …………… 388
*习题 12-8 …………………………………… 391
*第九节　周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数 ………………………………………… 391
*习题 12-9 …………………………………… 395
小结 …………………………………………… 395
复习题十二 …………………………………… 397
附录 ………………………………………… 399
附录 A　几种常用的曲线 …………………… 399
附录 B　积分表 ……………………………… 401
习题答案 …………………………………… 411
参考文献 …………………………………… 453

第一章　函数　极限　连续

函数是高等数学研究的主要对象；极限理论在高等数学中占有重要的地位，它是这门课程不可缺少的理论工具；连续则是高等数学中与极限概念相关的另一个重要概念。

本章先复习函数的有关内容，并作一些必要的补充，在此基础上，重点介绍极限的基本概念和主要计算方法，并讨论函数的连续性，为后面的学习打基础。

第一节　函　　数

在中学数学课程里，已学过有关集合、区间、函数的一些基本内容，现将主要内容——函数作一下复习，并对有关内容进行必要的补充。如果没有特别声明，以后提到的数都是实数，变量都是实变量，数集都是某些实数构成的集合。

为了后面叙述及书写的方便，先介绍两个逻辑符号：

$\forall$　全称量词，表示“对任给的”“对所有的”或“对每一个”等。$\forall$ 是英文 Any 或 All 的字头 A 的倒写。

$\exists$　存在量词，表示“存在”“有”。$\exists$ 是英文 Exist 的字头 E 的反写。

一、函数的概念

定义 1　设 D 是一个非空数集，x 和 y 是两个变量，若 $\forall\ x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x)$$

D 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 又称为**因变量**。$x_0\in D$ 所对应的因变量的值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$f(x_0),\ y|_{x=x_0},\ 或\ f(x)|_{x=x_0}$$

集合

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**。

应当指出，如果 $\forall\ x\in D$，变量 y 按照一定的法则仅有唯一的值与 x 对应，则称 y 是 x 的**单值函数**，若有两个或两个以上的值与 x 对应，则称 y 是 x 的**多值函数**。对于多值函数，可以通过限制 y 的值域使之成为单值函数。本书仅讨论单值函数。

函数是由定义域和对应法则所确定的，这也是函数的两要素。因此，给定两个函数，只要它们的定义域和对应法则都分别相同，则把它们看成是同一个函数，而与自变量和因变量用什么字母表示无关。例如，$y=\sqrt{x}$ 与 $u=\sqrt{t}$ 表示的是同一个函数。又如，$f(x)=\ln x$，其定义域 $D_1=(0,+\infty)$，$g(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$，其定义域 $D_2=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D_1\neq D_2$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个不同的函数。

一般地，用抽象的算式表示的函数，规定其定义域为使算式有意义的自变量所能取值的

全体构成的数集；在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的。例如，真空中的自由落体运动规律

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

确定了下落的距离 s 与时间 t 的一个函数关系，若假定物体着地的时刻为 T，则这个函数的定义域 $D=[0, T]$。但当不考虑实际意义时，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域应为 $(-\infty, +\infty)$。

对应法则是因变量与自变量之间函数关系的具体体现，它的表示方法有三种：公式法、表格法和图示法。这方面知识读者已很熟悉，这里不再重述。理论研究和计算中常用公式法，$y=f(x)$是函数的抽象记号，对应的法则 f 也可用其他字母表示，如 g、φ、F 等。但是，对于同一个问题中的不同函数，应该采用不同的字母，以免混淆。

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2x+1}$；(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}+\dfrac{\lg(x-1)}{x-2}$。

解 (1) 要使算式有意义，只要满足：$2x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -\frac{1}{2}$，所以函数的定义域 $D=\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$，或用集合表示为 $D=\left\{x \mid x\geqslant -\frac{1}{2}\right\}$。

(2) 要使算式有意义，只要满足不等式组

$$\begin{cases} 3+2x-x^2>0 \\ x-1>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

得其解为 $1<x<2$ 和 $2<x<3$，所以函数的定义域 $D=(1, 2)\cup(2, 3)$，或用集合表示为 $D=\{x \mid 1<x<2$ 或 $2<x<3\}$。

在高等数学中还经常出现一种函数——**分段函数**，即在自变量的取值范围内，分别用几个不同的数学式子表示的函数。下面给出几个分段函数的例子。

例 2 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$，其图形如图 1-1 所示。

例 3 取整函数

$$y=[x]$$

它表示不超过 x 的最大整数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为一切整数，图形如图 1-2 所示。如，$[1.1]=1$，$[-\sqrt{2}]=-2$，$\left[\frac{3}{4}\right]=0$ 等。

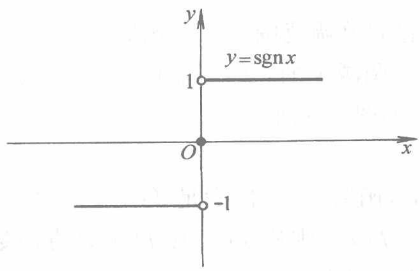

图 1-1

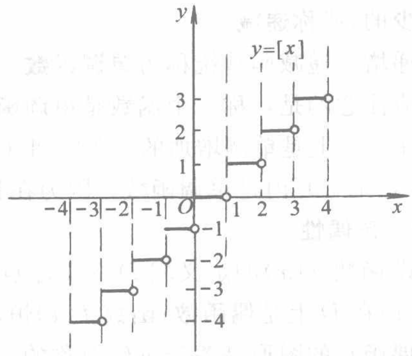

图 1-2

例 4　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

其定义域和值域均为（$-\infty$，$+\infty$），图形如图 1-3 所示。

例 5　在电子技术中，脉冲发生器产生一个如图 1-4 所示的三角波，试写出电压 u 与时间 t 的函数关系式。

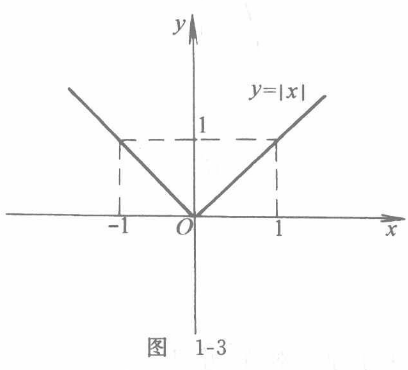

图 1-3

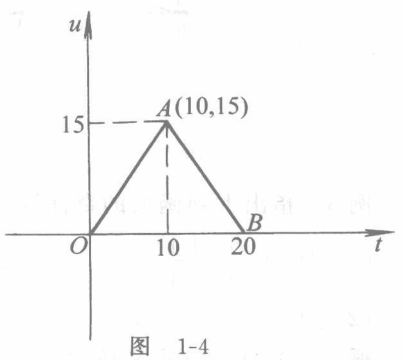

图 1-4

解　当 $t \in [0, 10]$ 时，函数的图形是直线段 OA

$$u = \frac{3}{2}t$$

当 $t \in (10, 20]$ 时，函数的图形是直线段 AB

$$u = -\frac{3}{2}(t - 20) = 30 - \frac{3}{2}t$$

所以电压 u 与时间 t 的关系式为

$$u = \begin{cases} \frac{3}{2}t & 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 30 - \frac{3}{2}t & 10 < t \leqslant 20 \end{cases}$$

二、函数的几种特性

1. 单调性

设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，$\forall\, x_1, x_2 \in X$，当 $x_1 < x_2$ 时，若恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称

函数 $f(x)$在 X 上是**单调增加**的，或称**递增**；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 X 上是**单调减少**的，或称**递减**。

递增、递减函数统称为**单调函数**。

应注意的是，称一个函数是单调函数，应当指出它的单调范围。如，函数 $y=x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的，但不能称 $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调函数，因为在其上有增有减，如图 1-5 所示。

2. **奇偶性**

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，若$\forall\ x\in D$，函数 $f(x)$恒满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$在 D 上是**偶函数**；函数 $f(x)$恒满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$在 D 上是**奇函数**。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的。如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数；函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数，如图 1-6 所示。

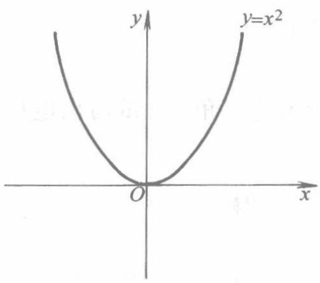

图 1-5

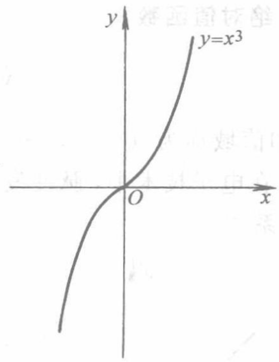

图 1-6

例 6 指出下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ $(a>0, a\neq 1$ 实数$)$；

(2) $g(x)=x^2+\sin x$。

解 (1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，并且

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$是奇函数。

(2) $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，并且

$$g(-x)=(-x)^2+\sin(-x)=x^2-\sin x$$

它既不等于 $g(x)$，又不等于$-g(x)$，所以 $g(x)$是非奇非偶函数。

3. **周期性**

设函数 $f(x)$的定义域为数集 D，若存在一个正数 T，使得$\forall\ x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f(x)$是**周期函数**，T 称为 $f(x)$的**周期**。通常周期是指最小正周期。但也有例外，也就是说，不是任何周期函数都有最小正周期的。

比较熟悉的正弦函数 $y=\sin x$ 是一个以 2π 为周期的周期函数，其图形只要画出一个周期 $[0, 2\pi]$ 内的图，其余部分即可重复给出，如图 1-7 所示。

4. **有界性**

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，若 $\exists\ M>0$，使得 $\forall\ x\in X$，都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**有界函数**，或称 $f(x)$ 在 X 上**有界**；否则称函数 $f(x)$ 在 X 上是**无界函数**，或称 $f(x)$ 在 X 上**无界**。

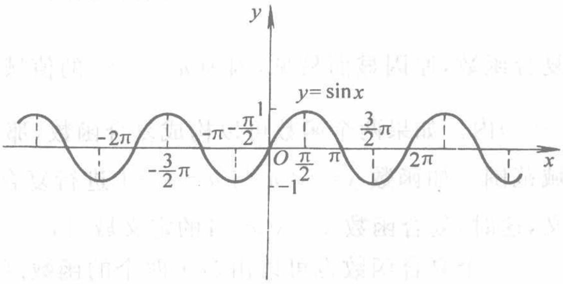

图 1-7

特别要强调的是，一个函数在它的定义域内，可能在部分范围有界，在部分范围无界。如函数 $y=\dfrac{1}{x}$，其定义域是 $x\neq 0$ 的全体实数集，它在区间 $[1,2]$ 上有界，在区间 $(0,1]$ 上无界，当然它在其定义域内也是无界的。因此，说一个函数是否有界，应指出其自变量的相应范围。

三、反函数与复合函数

1. **反函数**

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，值域为数集 W，若 $\forall\ y\in W$，通过 $y=f(x)$，有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，则称这样确定的函数 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**。习惯上也记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$，其定义域为 W，值域为 D。

根据上述对反函数的定义，可知函数 $y=f(x)$ 不是均存在反函数的。如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内解出 $x=\pm\sqrt{y}$，与 y 对应的 x 值不唯一，应该说，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数。当然只要限制 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0]$（或 $[0,+\infty)$），则它就存在反函数 $x=-\sqrt{y}$（或 $x=\sqrt{y}$）。那末在什么条件下保证反函数一定存在呢？下面给出反函数存在定理。

定理 1 若函数 $f(x)$ 在某个区间上是单调函数，则它的反函数必存在，且也是单调函数。

证略。

例如正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上为单调增函数，其反函数存在，为 $y=\arcsin x$，它的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，函数 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数。类似地，其他三角函数，也可通过单调区间的限制来得到它们的反函数。

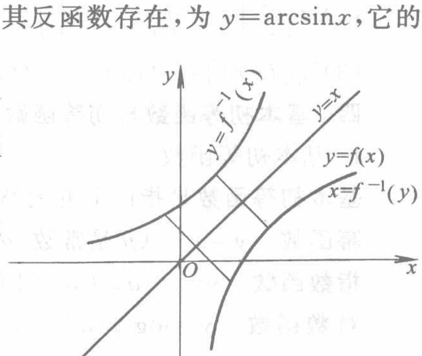

图 1-8

在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是相同的，而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。如图 1-8 所示。

2. **复合函数**

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 W_2，且 $W_2\subseteq D_1$，则变量 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，称这个函数为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量。

请注意,不是任何两个函数都能构成复合函数的。如函数 $y=\frac{1}{\sqrt{u}}$ 与 $u=-x^2$ 就不能构成复合函数,原因显而易见,因为 $u=-x^2$ 的值域 $W=(-\infty,0]$ 不在 $y=\frac{1}{\sqrt{u}}$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$ 内。如果两个函数可以构成复合函数,那末复合函数的定义域应不超出内层函数的定义域范围。如函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x-1$ 进行复合,依定义,只有当 $x\in[1,+\infty)$ 时,复合才有意义,这时,复合函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域 $[1,+\infty)$ 是内层函数 $u=x-1$ 定义域的一部分。

一个复合函数也可以由多于两个的函数复合而成,只要每一步的复合过程满足定义要求即可。

例 7 写出下列函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt{\sin 2x}$;(2) $y=2^{\cos^2\frac{1}{x}}$。

解 (1) 令 $u=\sin v, v=2x$,则 $y=\sqrt{\sin 2x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=2x$ 复合而成。

(2) 令 $u=v^2, v=\cos w, w=\frac{1}{x}$,则 $y=2^{\cos^2\frac{1}{x}}$ 是由 $y=2^u$, $u=v^2$, $v=\cos w$, $w=\frac{1}{x}$ 复合而成。

例 8 已知 $f(x+1)=x^2-2x-3$,求:

(1) $f(x)$; (2) $f\left(\frac{1}{x}\right)$; (3) $f[f(x)]$。

解 (1) 求 $f(x)$ 可以有两种方法:

方法一 将等式右边变形,使之成为关于 $(x+1)$ 的表达式,由于

$$f(x+1)=(x+1)^2-4(x+1)$$

则
$$f(x)=x^2-4x$$

方法二 作变量替换,相当于引进中间变量,令 $u=x+1$,则 $x=u-1$,于是

$$f(u)=(u-1)^2-2(u-1)-3=u^2-4u$$

则
$$f(x)=x^2-4x$$

(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-4x}{x^2}$

(3) $f[f(x)]=[f(x)]^2-4f(x)=(x^2-4x)^2-4(x^2-4x)=x^4-8x^3+12x^2+16x$

四、基本初等函数与初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指以下五大类函数:

幂函数 $y=x^\mu$ (μ 是常数,$\mu\neq 0$)。

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$,其中常用的有 $y=e^x$。

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$,其中常用的有 $y=\lg x$(常用对数)和 $y=\ln x$(自然对数)。

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$。

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$。

2. 初等函数

所谓**初等函数**，是指由基本初等函数及常数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算，并且可以用一个数学式子表达的函数。如

$$y=\sin(5x+2)-\ln(\sqrt{x^2+1}+4)$$

$$y=\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x+\mathrm{e}^{-x}}$$

等等，均为初等函数。

上述两个函数可以写出它们细致的分解过程。如第一个函数是三角函数与对数函数的差，而三角函数是由 $\sin u$ 与 $u=5x+2$ 复合而成的；对数函数是由 $\ln v,v=w+4,w=\sqrt{t},t=x^2+1$ 复合而成的。

但要注意非初等函数是存在的，如

$$y=\begin{cases}x+1 & x>0\\ \mathrm{e}^x & x\leqslant 0\end{cases}$$

就是非初等函数。

在工程技术中常遇到一类初等函数，它们是由 e^x 和 e^{-x} 构成的。

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的奇函数（见图 1-9）。

双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，是偶函数（见图 1-9）。

双曲正切 $\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的奇函数。

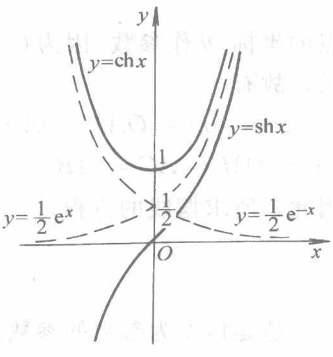

图 1-9

上述这几种函数又统称为**双曲函数**。

双曲函数的反函数分别为

反双曲正弦 $\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\quad x\in(-\infty,+\infty)$

反双曲余弦 $\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad x\in[1,+\infty)$

反双曲正切 $\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad x\in(-1,1)$

注意到这里的反双曲余弦只取了函数值为正值的部分，事实上双曲余弦的反函数是双值的。

五、建立函数关系举例

利用数学工具可以解决许多实际问题，但往往要建立变量之间的函数关系。这种将实际问题转化为数学表达式的问题是很重要的。下面举两个具体例子来说明如何建立函数关系。

例 9 火车站收取旅客携带行李费规定如下：不超过 20kg 的物品免费，超过 20kg 但不超过 50kg 的部分每千克收费 0.30 元，超过 50kg 的部分按每千克 0.50 元收费，试求收取的行李费与携带物品重量的函数关系。

解 设携带物品重量为 $x$kg，收取行李费为 y 元，依照题意，应有三种情形：

第一种情形，当重量不超过 20kg，即 $x\in[0,20]$ 时，$y=0$；

第二种情形，当重量超过 20kg 但不超过 50kg，即 $x\in(20,50]$ 时，$y=(x-20)\times0.3$；

第三种情形，当重量超过 50kg，即 $x\in(50,+\infty)$ 时，$y=(50-20)\times0.3+(x-50)\times0.5$

所以，所求函数为

$$y=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 0.3(x-20) & 20<x\leqslant 50\\ 9+0.5(x-50) & 50<x<+\infty\end{cases}$$

例 10 一个圆沿着一条定直线无滑动地滚动时，圆周上的一个定点 M 的轨迹叫做摆线（旋轮线），求摆线方程。

解 设圆的半径为 a，取圆滚动所沿的直线为 x 轴，圆上定点 M 落在直线上的一个位置为原点，建立直角坐标系，如图 1-10 所示。圆滚动 θ 角后圆心在 B 点，用 (x,y) 表示 M 点的坐标，θ 作参数，因为 OA 的长等于 $\overset{\frown}{MA}$ 的长，故有

$$x=OD=OA-DA=a\theta-a\sin\theta$$

$$y=DM=AC=AB-CB=a-a\cos\theta$$

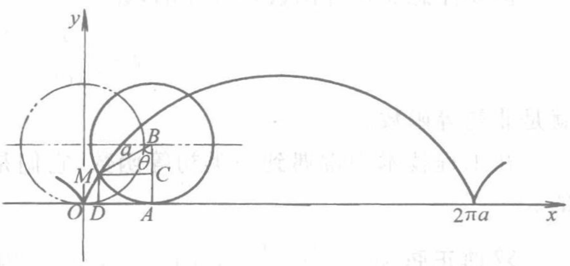

图 1-10

因此，所求摆线的方程是

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

这是以 θ 为参数的参数方程，通过 θ 也可认为 y 是 x 的函数。

习 题 1-1

A 组

1. 下列各组函数是否表示同一个函数？为什么？

(1) $f(x)=2x^3+1$ 与 $g(u)=2u^3+1$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ 与 $g(x)=x+2$

(3) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(x)=1$

(4) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2x}$ 与 $g(x)=\cos x$

2. 求函数的定义域：

(1) $\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}$　　(2) $\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

(3) $\lg\dfrac{x}{x-2}$　　(4) $\dfrac{\lg\lg x}{\sqrt{4-x^2}}$

3. 求函数值：

(1) 若 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$，求 $f(-3)$，$f(a+1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$ ($a\neq0$ 常数)

(2) 若 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f(0.7)$，$f(2)$

4. 指出下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2-3\cos 2x$　　(2) $y=\sin x+4$

(3) $y=x^2(0<x<+\infty)$　　(4) $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$

5. 求反函数，并指出其定义域和值域：

(1) $y=4x+2$　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$

6. 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{3x+1}$　　(2) $y=e^{\arctan x}$

(3) $y=\lg\sin^2 2x$　　(4) $y=\cos\sqrt{2-x^2}$

7. 描绘下列函数的图形，并指出在定义域内函数是否有界？是否单调？

(1) $y=\dfrac{1}{x}+1$　　(2) $y=2\cos 3x$

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\leqslant x<0\\ x^2+1 & 0<x\leqslant 1\end{cases}$　　(4) $y=|x-1|$

8. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$ $(x\neq 0)$，求 $f(x)$。

9. 在直角三角形 ABC 中（见图 1-11），$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，动点 M 在 AB 上移动，变量 y 与变量 x 之间的函数关系是什么？

10. 某产品年产量为 x 台，每台售价 2000 元。当年产量在 5000 台以内时，可以全部售出；当年产量超过 5000 台时，经广告宣传后又可再多售出 2000 台，每台平均广告费 200 元；生产再多，本年就售不出去了。试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数。

11. 直梁 OAB 由两段不同的材料接合而成，OA 长 1 单位，其线密度为 2，AB 长 2 单位，而线密度为 $\dfrac{1}{2}$，设 M 为梁上的任一点，试写出 OM 一段的质量 m 与 OM 的长度 x 之间的函数关系。

12. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（见图 1-12）。当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L $(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系，并说明定义域。

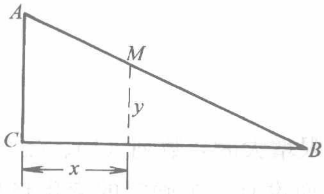

图 1-11

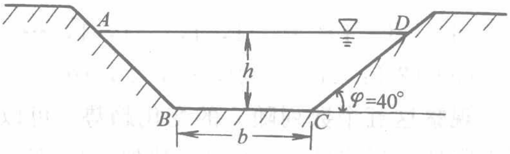

图 1-12

B　组

13. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$

14. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(\lg x)$ 的定义域。

15. 已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$。

16. 验证函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$ 的反函数就是其本身。

17. 设 $f(x)=\begin{cases}2+x & x\leqslant 0\\ 2^x & x>0\end{cases}$，写出 $\Delta y=f(\Delta x)-f(0)$ 的表达式。

18. 设 $f(x)=\begin{cases}x & 0<x\leqslant 2\\ \sqrt{1+x^2} & 2<x\leqslant 4\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，试求 $f(x+1)$，$f[g(x)]$。

19. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f[f(x)]$，并证明 $\underbrace{f\{f[f\cdots f(x)]\}}_{n\text{重}}=\begin{cases}f(x) & n\text{ 为奇数}\\ x & n\text{ 为偶数}\end{cases}$ $(x\neq 1)$。

20. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是奇函数，证明：$f(x)+g(x)$ 是奇函数，$f(x)g(x)$ 是偶函数。

第二节　数列的极限

极限概念是高等数学中一个最基本的概念。极限方法是数学中最重要的一种思想方法。这里先介绍数列极限，它也是学习后面知识的基础。

一、数列极限的概念

所谓**数列**，就是按照确定的次序（一般以自然数大小顺序）排列起来的一列数。如

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为一个数列，可简记为 $\{x_n\}$，x_n 称为第 n 项，也称为通项或一般项。按照函数关系，也可以将数列视为自变量为正整数的函数，那末数列 $\{x_n\}$ 可以写为

$$x_n = f(n) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

也称它为整标函数。

数列的极限问题，是研究数列这一列数，随着项数 n 的增大，它的变化趋势如何。

不妨先看下面几个具体例子：

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$：$1$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，…，$\dfrac{1}{n}$，…；

(2) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$：$0$，$1$，$0$，$\dfrac{1}{2}$，…，$\dfrac{1+(-1)^n}{n}$，…；

(3) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，…，$\dfrac{n}{n+1}$，…；

(4) $\{(-1)^n\}$：-1，1，-1，1，…，$(-1)^n$，…；

(5) $\{2^n\}$：2，2^2，2^3，…，2^n，…。

观察这五个数列随 n 的变化趋势，可以发现，当 n 无限增大时，数列（1）、（2）、（3）分别无限地接近定值 0、0、1；数列（4）随 n 的无限增大，而没有一个确定的变化趋势，时而趋于 -1，时而趋于 1；数列（5）则随 n 的无限增大而无限地增大。数列（1）～（3）随 n 增大有确定变化趋势的称为有极限的数列，0、0、1 分别称为它们的极限。

一般地，如果当数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大时，它的一般项 x_n 无限接近于某个确定的常数 a，则称数列 $\{x_n\}$ 有极限 a，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a。否则称数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或称为发散的。

上述这种凭直观来描述极限的定义方法，在某种程度上显得比较粗糙，甚至对有些数列来讲，凭直观未必能判断出其极限存在与否。下面看一看如何更精确地描述极限的定义，也就是说，如何精确地描述“无限增大”，“无限接近”的含义。

以 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 为例，当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ 无限地接近于 0，具体地：

若取 $n=100$；$x_{100}=\dfrac{1}{100}=0.01$，这时 $|x_{100}-0|=0.01$；

若取 $n=1000$；$x_{1000}=0.001$，这时 $|x_{1000}-0|=0.001$；