《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

无理性的判定

——从一道2014年"北约"自主招生试题谈起

刘培杰数学工作室 编

◎实数的定义

实数的表示法与计算

代数数与超越数

实数域R的连续性等价命题

平面几何中的"三大难题"

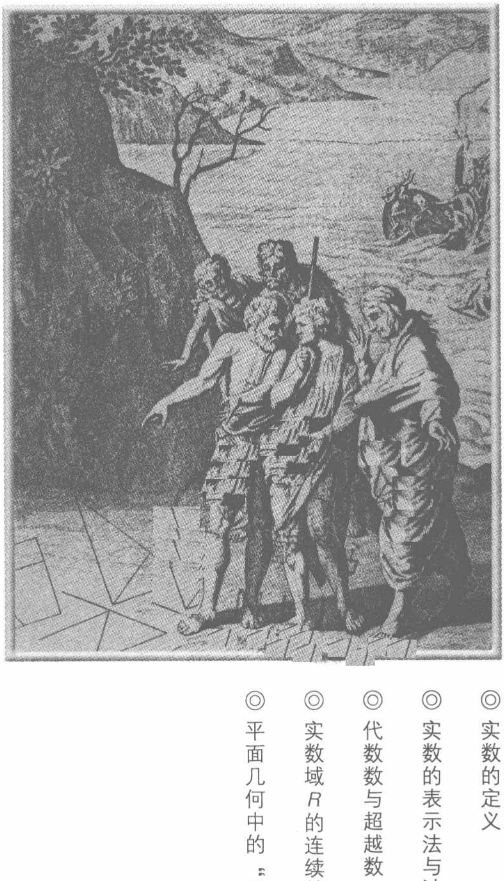
HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第四辑）

无理性的判定

——从一道2014年“北约”自主招生试题谈起

刘培杰数学工作室 编



◎实数的定义

◎实数的表示法与计算

◎代数数与超越数

◎实数域R的连续性等价命题

◎平面几何中的“三大难题”

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍了实数的定义，实数的表示法与计算，代数数与超越数，实数域 R 的连续性等价命题，实数集 $\mathbf{R}$ 的不可数性，实数系 R 的真扩充——超实数系 R^*.

本书适合于高等院校数学与应用数学专业学生学习，也可供数学爱好者及教练员作为参考.

图书在版编目(CIP)数据

无理性的判定：从一道 2014 年“北约”自主招生试题谈起/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5603-5090-5

Ⅰ.①无… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①实数-普及读物
Ⅳ.①O122-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 298364 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 17.75　字数 182 千字
版　　次　2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5090-5
定　　价　38.00 元

目录

第 0 章　引言　//1
§1　从一道"北约"自主招生试题谈起　//1
§2　有理数与无理数的判定　//4
第 1 章　实数的定义　//20
§1　有理数域 Q　//20
§2　用基本列定义实数　//24
§3　数列极限的例题　//32
§4　有理数列的极限　//35
§5　基本有理数列　//42
§6　无理数的定义　//52
§7　实数的四则运算·实数体　//55
§8　实数的大小关系·实数集是具有阿基米德性质的有序体　//57
§9　线段的度量与直线的性质　//60
§10　实数的定义　//69
§11　实数系 R 的基本性质　//74
§12　实数的四则运算　//88

§ 13　实数集的稠密性　//115
§ 14　作为有理数列极限的实数——实数的第二种表示法　//117
§ 15　方根、幂、对数的存在性·基本初等函数的存在性与单值性　//123
**第 2 章　实数的表示法与计算　**//132
§ 1　用十进小数表示实数　//132
§ 2　用级数表示实数及无理数的近似计算　//136
§ 3　用连分数表示实数　//151
§ 4　实数理论是微积分学理论的基础　//165
**第 3 章　代数数与超越数　**//173
§ 1　π,e 的无理性　//173
§ 2　代数数与超越数　//181
§ 3　e 的超越性　//183
**第 4 章　实数域 R 的连续性等价命题　**//190
§ 1　实数域 R 的连续性命题及其等价性　//190
§ 2　实数的几种定义　//205
**第 5 章　实数集 R 的不可数性　**//213
§ 1　集的对等、势　//213
§ 2　实数集 **R** 的不可数性,无理数集的势　//219
**第 6 章　实数系 R 的真扩充——超实数系 R^*　**//226
§ 1　超实数系 R^*　//226
§ 2　R^* 的代数结构　//230
§ 3　解公理及其应用举例　//234
**部分练习题提示和答案　**//243
**附录　平面几何中的“三大难题”　**//249
**编辑手记　**//257

引　言

第0章

§1　从一道“北约”自主招生试题谈起

2014年“北约”自主招生数学试题中有一题为求证 $\tan 3°$ 是无理数. 本题证法较多,但以反证法尤为突出. 只要运用“有理数的四则运算结果仍然是有理数”就可以完成证明,即 $a\in\mathbf{Q}$, $b\in\mathbf{Q}$, 则 $\frac{a+b}{1-ab}\in\mathbf{Q}$. 假设 $\tan 3°\in\mathbf{Q}$, 则 $\tan 6°\in\mathbf{Q}$, $\tan 12°\in\mathbf{Q}$, $\tan 24°\in\mathbf{Q}$, 从而 $\tan 30°\in\mathbf{Q}$, 这与“$\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 为无理数”矛盾;或者得出“$\tan 15°=2-\sqrt{3}$ 为无理数”矛盾,等等.

本题命制的背景为 $\tan\frac{m}{n}\pi(n\neq 0)$ 的值是有理数或无理数的问题. 该试题

可推广为:

命题 1 若$\frac{\theta}{\pi}$与 $\tan\theta$ 都是有理数,则 $\tan\theta$ 只能取 $0,1,-1$ 之一.

预备定理 设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{Z}[x]$, $n\geqslant 1$, $a_na_0\neq 0$,且$(a_n,\cdots,a_0)=1$. 若$\frac{b}{c}$是$f(x)$的一个有理根,这里整数 b 与 c 互素,则 $c\mid a_n$, $b\mid a_0$. 特别地,首项系数为 ± 1 的整系数多项式的有理根必是整数.

命题 2 若$\frac{\theta}{\pi}$与 $\cos\theta$ 都是有理数,则 $\cos\theta$ 只能取 $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-1$ 之一.

证明 令$\frac{\theta}{\pi}=\frac{m}{n}$($m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$,且 $n>0$),则

$$\cos n\theta=\cos m\pi=(-1)^m \tag{1}$$

对于任意正整数 n, $2\cos n\theta$ 可以表示为 $2\cos\theta$ 的 n 次整系数多项式,且首项系数为 1,即

$$2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_1(2\cos\theta)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(2\cos\theta)+a_n \tag{2}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是整数.

运用归纳法容易证明式(2):当 $n=1$ 时, $2\cos\theta=2\cos\theta$;当 $n=2$ 时, $2\cos 2\theta=(2\cos\theta)^2-2$. 假设式(2)对 n 及 $n+1$ 已成立,则

$$2\cos[(n+2)\theta]=2\cos\theta\cdot 2\cos[(n+1)\theta]-2\cos n\theta$$

这表明式(2)对于 $n+2$ 也成立.

由式(1),式(2)及已知条件可知, $x=2\cos\theta$ 是方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n-2(-1)^m=0 \tag{3}$$

的有理根. 因为方程(3)具有整数系数,且首项系数为1,根据预备定理可知,$2\cos\theta$ 是整数,并且考虑 $\cos\theta$ 的有界性,得 $2\cos\theta$ 必须是 $0,1,-1,2,-2$ 之一,即 $\cos\theta$ 只能取 $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-1$ 之一.

下面证明命题1:

证明　令 $\frac{\theta}{\pi}=\frac{m}{n}$($m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$,且 $n>0$),即 $\theta=\frac{m\pi}{n}$. 设 $\tan\frac{m\pi}{n}=\lambda$($\lambda$ 为有理数),则

$$\lambda^2=\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

从而

$$\lambda^2=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

得

$$\cos^2\theta=\frac{1}{\lambda^2+1}$$

于是

$$\cos 2\theta=\frac{2}{\lambda^2+1}-1$$

要使 $\cos 2\theta$ 为有理数,由命题2可知,$\cos 2\theta$ 为 $0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-1$ 之一,即 $\cos\theta$ 只能取 $0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1,-1$,与这些值相对应的 $\sin\theta$ 只能取 $1,-1,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0$. 欲使 $\lambda=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 是有理数,只有 $\cos\theta$ 取 $1,-1,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$,对应地,

只有当 $\tan\theta$ 取 $0,1,-1$ 时，λ 才可能是有理数.

由命题 1 可以知道"为什么在正切函数表里只有 $\tan 0=0,\tan\frac{\pi}{4}=1$ 这两个准确值，其余都是无理数近似值"的真正原因了.

§1　有理数与无理数的判定

例 1　是否存在实数 x 使得 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 均为有理数？

（北京大学，2009 年）

解　若存在实数 x 使得 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 均为有理数，则可设

$$\tan x+\sqrt{3}=\frac{n}{m}\quad(m,n\in\mathbf{Z},\text{且}(m,n)=1)$$

$$\cot x+\sqrt{3}=\frac{q}{p}\quad(p,q\in\mathbf{Z},\text{且}(p,q)=1)$$

所以

$$\tan x=\frac{n}{m}-\sqrt{3}$$

$$\cot x=\frac{q}{p}-\sqrt{3}$$

因此

$$\left(\frac{n}{m}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{q}{p}-\sqrt{3}\right)=1$$

$$\Rightarrow\frac{n}{m}\cdot\frac{q}{p}-\sqrt{3}\left(\frac{n}{m}+\frac{q}{p}\right)+2=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{n}{m}+\dfrac{q}{p}=0 & (1)\\[2ex] \dfrac{n}{m}\cdot\dfrac{q}{p}+2=0 & (2)\end{cases}$$

由式(1)得$\dfrac{n}{m}=-\dfrac{q}{p}$,代入式(2)得

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2=2\Rightarrow\frac{n}{m}=\pm\sqrt{2}$$

矛盾.

因此,不存在实数 x 使得 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 均为有理数.

例2 证明:当 p,q 均为奇数时,曲线 $y=x^2-2px+2q$ 与 x 轴的交点横坐标为无理数.

(清华大学2009年,匈牙利1907年竞赛题)

解 由

$$x^2-2px+2q=0\Rightarrow x=p\pm\sqrt{p^2-2q}$$

用反证法. 若

$$x\in\mathbf{Q}\Rightarrow\sqrt{p^2-2q}\in\mathbf{Q}$$

不妨设$\sqrt{p^2-2q}=\dfrac{n}{m}$,其中$(m,n)=1,m\neq1$,则

$$m^2(p^2-2q)=n^2 \tag{3}$$

设 $p^2-2q=r^2\cdot p_1\cdot\cdots\cdot p_s$,$p_i$ 为素数($i=1,2,\cdots,s$),则

$$p_i\mid n^2\Rightarrow p_i\mid n\Rightarrow n=lp_i$$

代入式(3)得

$$m^2(p^2-2q)=l^2p_i^2$$

$$\Rightarrow m^2\cdot r^2\cdot p_1\cdot\cdots\cdot p_{i-1}\cdot p_i\cdot p_{i+1}\cdot\cdots\cdot p_s=l^2p_i^2$$

$$\Rightarrow m^2\cdot r^2\cdot p_1\cdot\cdots\cdot p_{i-1}\cdot p_{i+1}\cdot\cdots\cdot p_s=l^2p_i$$

$$\Rightarrow p_i \mid m^2 \Rightarrow p_i \mid m \Rightarrow m = sp_i$$

这与$(m,n)=1$矛盾,所以$\sqrt{p^2-2q}\in \mathbf{N}_+$. 由$p,q$均为奇数,可设$p=2t-1$, $\sqrt{p^2-2q}=2k-1$,其中$t,k\in \mathbf{Z}$,解得$q=2(t^2-t+k-k^2)$是偶数,矛盾.

例3 求证:$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$是无理数.

证明 若不然,设$\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$,其中$(p,q)=1$, $p\in \mathbf{N}, q\in \mathbf{N}$,则

$$\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3}$$

上式两端取立方得

$$2=\frac{p^3}{q^3}-3\sqrt{3}\cdot\frac{p^2}{q^2}+9\cdot\frac{p}{q}-3\sqrt{3}$$

即

$$\sqrt{3}=\frac{p^3+9pq^2-2q^3}{3q(p^2+q^2)}$$

是有理数,矛盾.

例4 证明:如果x,y,z及$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$都是有理数,那么$\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{z}$也都是有理数.

证明 设有理数$w=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$,则

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=w-\sqrt{z}$$

上式两边平方并整理得

$$2\sqrt{xy}=w^2+z-x-y-2w\sqrt{z} \tag{4}$$

将式(4)两边平方得

$$4w(w^2+z-x-y)\sqrt{z}=(w^2+z-x-y)^2+4w^2z-4xy \tag{5}$$

所以,当$w(w^2+z-x-y)\neq 0$时,由式(5)得

$$\sqrt{z}=\frac{(w^2+z-x-y)^2+4w^2z-4xy}{4w(w^2+z-x-y)}$$

此时,显然 $\sqrt{z}\in\mathbf{Q}$.

当 $w(w^2+z-x-y)=0$ 时,有以下两种情形:

若 $w=0$,则

$$\sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{z}=0$$

若 $w\neq0$,则

$$w^2+z-x-y=0$$

由等式(4)得

$$2\sqrt{xy}=-2w\sqrt{z}$$

因为 $2\sqrt{xy}$ 和 $2w\sqrt{z}$ 非负,于是 $2w\sqrt{z}=0$,但 $w\neq0$,所以 $\sqrt{z}=0$. 总之,$\sqrt{z}\in\mathbf{Q}$. 同理可证 $\sqrt{y},\sqrt{z}\in\mathbf{Q}$.

例5 设 c 为固定的有理数,且 $\sqrt[3]{c}$ 为无理数,记 $A=\{a+b\sqrt[3]{c}\mid a,b$ 为有理数$\}$,证明:A 关于普通乘法运算不封闭.

证明 假设不然,因 $\sqrt[3]{c}\in A$,有 $\sqrt[3]{c^2}=\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{c}\in A$.

故有

$$\sqrt[3]{c^2}=a+b\sqrt[3]{c}\quad(a,b\text{ 为有理数})$$

$$a=\sqrt[3]{c^2}-b\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{c}-b)=\frac{\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{c^2}-b^2)}{\sqrt[3]{c}+b}=\frac{c-b^2\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c}+b}$$

$$c-ab=(a+b^2)\sqrt[3]{c}$$

若 $a+b^2\neq0$,则与 $\sqrt[3]{c}$ 为无理数矛盾;若 $a+b^2=0$,则 $c=ab$,即 $c=-b^3$,$\sqrt[3]{c}=-b$ 仍得矛盾.

例6 $a,b\in\mathbf{R}-\{0\}$ 满足等式

$$a^2b^2(a^2b^2+4)=2(a^6+b^6)$$

试证:a 与 b 中至少有一个无理数.

（全俄中学生数学奥林匹克，1999～2000 年）

证明 将所给的等式改写为

$$(a^4-2b^2)(b^4-2a^2)=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2}{b}\right)^2=2\text{ 或}\left(\frac{b^2}{a}\right)^2=2$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b}=\pm\sqrt{2}\text{或}\frac{b^2}{a}=\pm\sqrt{2}$$

故题中断言成立.

例 7 设$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$是等差数列$\{a_n\}$中的两项，试证：此数列中的每一项都不是有理数.

证明 用反证法. 设$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$与有理数 α 分别为首项是 a_1，公差为 d 的等差数列的第 l,m,n 项，即

$$\sqrt{2}=a_1+(l-1)d$$

$$\sqrt{3}=a_1+(m-1)d$$

$$\alpha=a_1+(n-1)d$$

消去 a_1,d 得

$$\frac{\sqrt{3}-\alpha}{m-n}=\frac{\sqrt{2}-\alpha}{l-n}$$

因为 $\alpha\in\mathbf{Q}$，故有

$$\sqrt{3}=\sqrt{2}r_1+r_2\quad(r_i\in\mathbf{Q},i=1,2)$$

上式两边平方得

$$3=2r_1^2+2\sqrt{2}r_1r_2+r_2^2$$

于是

$$\sqrt{2}=\frac{3-2r_1^2-r_2^2}{2r_1r_2}\in\mathbf{Q}$$

矛盾. 故$\{a_n\}$中不能有有理数.

例 8 设等差数列$\{a_n\}$$(n\geqslant1)$包含 1 和$\sqrt{2}$，证明：

$\{a_n\}$中的任意3项均不构成等比数列.

证明　设等差数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的公差为$r$,则存在正整数$k,l$使得$a_k=1,a_l=\sqrt{2}$,于是

$$\sqrt{2}-1=a_l-a_k=(l-k)r$$

即

$$r=\frac{\sqrt{2}-1}{l-k}$$

假设a_m,a_n,a_p是等比数列,为方便起见,设

$$\frac{m-k}{l-k}=M,\frac{n-k}{l-k}=N,\frac{p-k}{l-k}=P$$

则

$$a_m=a_k+(m-k)r=1+M(\sqrt{2}-1)$$

$$a_n=a_k+(n-k)r=1+N(\sqrt{2}-1)$$

$$a_p=a_k+(p-k)r=1+P(\sqrt{2}-1)$$

由$a_n^2=a_ma_p$,得

$$(1-N+N\sqrt{2})^2=(1-M+M\sqrt{2})(1-P+P\sqrt{2})$$

即

$$(1-N)^2+2N^2+2\sqrt{2}N(1-N)$$
$$=(1-M)(1-P)+2MP+\sqrt{2}[M(1-P)+P(1-M)]$$

由于$M,N,P\in\mathbf{Q}$,则有

$$3N^2-2N=3MP-M-P \tag{6}$$

$$2N-2N^2=M+P-2MP$$

以上两式相加得

$$N^2=MP$$

代入式(6)得

$$2N=M+P$$

从而

$$(M+P)^2=4MP\Rightarrow(M-P)^2=0$$

因此

$$M=P=N$$

于是可得 $m=n=p$,矛盾.

例 9 试证:表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$是无理数.

证明 这个表达式的幂指数组成数列

$$-1,-4,-8,-13,-19,-26,\cdots$$

它相邻两项之差每一步增加 1. 如果把这个表达式用六进制写出,那么就得到一个无限不循环小数

$$0.100\ 100\ 010\ 000\ 100\ 000\ 1\cdots$$

它显然是一个无理数.

例 10 证明:ln 2 是无理数.

证明 假设 ln 2 是有理数. 显然 $\ln 2\neq0$.

因此

$$\ln 2=\frac{p}{q}$$

其中 q 和 p 都是整数,$p>0$,$q\neq0$. 于是

$$e^{\frac{p}{q}}=2,e^p=2^q$$

这表明 e 满足代数方程

$$x^p-2^q=0$$

但这是不可能的,因为 e 是超越数(即不是任何一个有理系数多项式的根).

例 11 求证:如果一个圆的外切凸多边形的边数是奇数,它的每边长度都是有理数,那么各边被切点分成的每条线段长度也是有理数.

证明 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次是这个多边形各边的长,x_i 为 a_i 边上第一个顶点与切点间的线段长度,$i=$

$1,2,\cdots,n$. 因为 a_n 边上的第二段线段等于 a_1 边上的第一段线段，所以

$$\begin{aligned}x_1 &= a_n - x_n\\ &= a_n - (a_{n-1} - x_{n-1})\\ &= a_n - a_{n-1} + x_{n-1}\\ &= a_n - a_{n-1} + (a_{n-2} - x_{n-2})\\ &= a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + a_1 - x_1\end{aligned}$$

由此得

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots + a_1)$$

因此，x_1 是有理数. 上述讨论对所有的线段都是适用的，所以所有线段的长度都是有理数.

利用数学归纳法求解下列各题：

例 12 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为有理数，求证：对任意的正整数 n，$\cos nA$ 都是有理数.

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，由于 $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 为有理数，则 $a^2,b^2,c^2,2bc\in\mathbf{Q}$. 因此

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\in\mathbf{Q}$$

当 $n=2$ 时，由于 $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1\in\mathbf{Q}$，结论成立.

假设当 $n=k-1,k$（其中整数 $k\geqslant 2$）时结论成立，即 $\cos(k-1)A\in\mathbf{Q}$，$\cos kA\in\mathbf{Q}$，那么当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}\cos(k+1)A &= \cos kA\cos A - \sin kA\sin A\\ &= \cos kA\cos A + \frac{1}{2}[\cos(kA+A) - \\ &\quad \cos(kA-A)]\end{aligned}$$

则

$$\cos(k+1)A = 2\cos kA\cos A - \cos(k-1)A$$

因为 $\cos A\in\mathbf{Q},\cos kA\in\mathbf{Q},\cos(k-1)A\in\mathbf{Q}$,所以

$$\cos(k+1)A\in\mathbf{Q}$$

即当 $n=k+1$ 时结论也成立.

综上可知,对于任意正整数 $n,\cos nA$ 都是有理数. 证毕.

例 13 证明

$$\sqrt{1\ 001^2+1}+\sqrt{1\ 002^2+1}+\cdots+\sqrt{2\ 000^2+1}$$

是无理数.

证明 我们将证明分为两步:首先,证明问题中的和不是整数;其次,证明它是一个首一多项式(首项系数为 1 的多项式)的根.

先证明第一步. 容易知道如果 $n>1$,那么 $n<\sqrt{n^2+1}<n+\frac{1}{n}$. 左边的不等式是显然的,右边的不等式由 $n^2+1<n^2+2<(n+\frac{1}{n})^2$ 得到.

记

$$S=\sqrt{1\ 001^2+1}+\sqrt{1\ 002^2+1}+\cdots+\sqrt{2\ 000^2+1}$$

那么

$$S=1\ 001+\theta_1+1\ 002+\theta_2+\cdots+2\ 000+\theta_{1\ 000}$$

其中,每个 θ_i 都处于 0 和$\frac{1}{1\ 001}$之间. 因此

$$0<\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{1\ 001}<1$$

所以 S 不是一个整数.

接着证明 S 是一个首一多项式的根. 更一般地,我们可以证明对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}$$

是一个首一多项式的根. 如果每个 a_i 都是整数,但不