智能教育丛书

理科

智能数学高考特训教程

（问中学与例中学）

齐智华　齐　新／著

智能数学　挑战高考

世界图书出版公司

智能教育丛书

理科

智能数学高考特训教程

(问中学与例中学)

齐智华　齐　新/著

智能数学一二三

一个中心:数学思想方法

两个基本点:

1. 基础知识傻瓜化
2. 解题方法明确化

三步学:学会自我总结,摧毁题海战术

S1　问中学(总结基础秘诀与数学方法)

S2　例中学(范例评注)

S3　做中学与用中学(自我检测)

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

图书在版编目(CIP)数据

智能数学高考特训教程. 理科 / 齐智华，齐新著. —北京：世界图书出版公司北京公司，2013.8(2014.8 重印)
(智能教育丛书)
ISBN 978-7-5100-6854-6

Ⅰ. ①智… Ⅱ. ①齐… ②齐… Ⅲ. ①中学数学课–高中–升学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 197579 号

智能教育丛书·智能数学高考特训教程(理科)

著　　者：齐智华　齐　新
责任编辑：夏　丹　翟　蕾
装帧设计：中公教育图书设计中心

出　　版：世界图书出版公司北京公司
出 版 人：张跃明
发　　行：世界图书出版公司北京公司
(地址：北京朝内大街 137 号　邮编：100010　电话：64077922)
销　　售：各地新华书店
印　　刷：三河市海新印务有限公司

开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：16.5
字　　数：256 千
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5100-6854-6　　**定　价：**48.00 元

前言
PREFACE

读懂并研究下列各问:

问1 什么是智能数学? 智能数学的新思想新方法是什么?

解 从国家的领袖,直到广大的学生家长,在教育与学习的领域中最憎恨的是什么?最憎恨的就是中小学的题海战术! 这是国家发展中的大问题, 它捆绑着中国人追赶并超越先进世界的脚步. 这也是现代素质教育的最大问题, 是压在青少年头上的一座大山. 究其根源, 是传统数学造成的!

传统数学(美国人称为"机械数学")是以"基础知识加题海"为中心的三步学习:

S1 死记硬背 (机械记忆)

S2 照猫画虎 (机械模仿)

S3 题海战术 (机械练习)

时至今日的新社会 (信息社会), 我国仍有很多学校, 更有很多重点高中和课外辅导机构, 他们留恋传统数学, 热衷于操作这种落后于时代的老办法, 题海战术愈炒愈烈, 致使风华正茂的少年天天演解无数的烂题和没有实际价值的人造难题, 沉溺题海, 成绩低下, 苦不堪言. 对此严重危害我国向前发展的考试逆流, 我们就针锋相对, 就创立适合新社会的新数学——**智能数学**. 那么, 什么是智能数学?

智能数学是以"数学思想方法"为中心的三步学习:

S1 提出问题

S2 探究解题

S3 自我总结, 摧毁题海战术

智能数学对传统数学的主要变革是:第一,转变学习的中心;第二,抓住学习的基本点;第三,改造学习方法,摧毁题海战术. 我们将智能数学这三个方面的新思想新方法概括为:

智能数学一二三

一个中心： 以数学思想方法为中心开发解题智慧

两个基本点：

1. 总结基础秘诀,使基础知识系统化,傻瓜化（简称“基础知识傻瓜化”）
2. 总结解题技术,使数学方法系统化,明确化（简称“解题方法明确化”）

三步学：学会自我总结——摧毁题海战术

S1 问中学(总结基础秘诀与数学方法)

S2 例中学(范例评注)

S3 做中学与用中学(自我检测)

智能数学的新理念就是国际上最大研究课题“**问题解决**”的新思想，新方法，这是对传统数学在思维领域中的一场深刻革命. 本书将智能数学的新思想，新方法应用于高考，使你茅塞顿开，高考解题发生天翻地覆的变化，数学成绩飞速提高. 随之,你也就快乐起来,聪明起来,整个身心洋溢着大智慧!

●请注意:“智能数学”不是新的数学学科，而是数学教育与数学学习的新概念新思想新方法，为了便于传播，我们简称为“**智能数学**”，它是针对**旧数学教育(“传统数学”)**的变革而命名的.

问 2 怎样领悟智能数学关于学习的四个关键语?

解 智能数学强调关于学习的四个关键语是

1. 智能数学的学习中心是“数学思想方法”:普遍认为高考问题解决的中心是数学能力. 但在我看来，能力说法有两个弊端:第一，能力过于抽象,难以操作;第二，能力的种种说法是学究式的行话赘语,留于表层,只是空喊口号而已. 因为数学能力的中心是数学思想方法,所以“以能力为中心”改为“以思想方法为中心”不仅人人明白,并且可以深入操作，所以本书认为高考问题解决的中心是数学思想方法，而不要空喊能力为中心的口号了!

我们将旧数学的“以基础知识为中心”转变为“以数学思想方法为中心”. 这里，又特别注意:智能数学强调“数学思想方法为中心”，并不是不要基础知识，而是对基础知识的要求更强更透更高! 我们要盖一座世界上最高的智能摩天大厦，你想，它对基础的要求会是怎样?

2. 基础知识傻瓜化:“傻瓜化”是人类文化与现代科技发展的新的里程碑!傻瓜化不是空喊口号，更不是“真傻”，而是“智能傻瓜”. 达到傻瓜化是艰难的，需要努力研究和用力气总结.

傻瓜化有两个层面:

(1) 大众傻瓜:连傻子都会用的快捷方式，想错都难，就像傻瓜相机一样. 其实中国人很早就搞傻瓜化，如小学的“九九表”，大学的“积分表”等等. 科学家在发明一项专利技术之后,为了大众共享,扩大市场,首要任务就是把他的技术傻瓜化,他才能创造财富,对人类

作出更大的贡献.

(2) 创造傻瓜:这是傻瓜化的高级模式. 高等数学的最大特征就是傻瓜化,程式化. 谁都想成为发明家,但发明家只有少数人,而且这一技术的发明家却是另一技术的傻瓜. 在高考数学中,每个同学都要学会自我总结基础秘诀,发明"傻瓜". 这也是人生尝试发明的乐趣和良机. 本书帮你建构一套少而精、最好用的傻瓜公式和傻瓜法则,请你特别注意将这些"傻瓜"宝贝收入囊中,它们是高速解题的法宝,是发明新思想新方法的基础.

3. 解题方法明确化:

普遍认为"数学思想只能是渗透", 与此相反,本书并不认同"数学思想渗透式",主张**数学思想方法明确化和系统化**(当然是相对的和开放的). 我们不能模模糊糊地解题,应使解题方法明确化. 为此,本书特别给出高中与大学基础阶段的**"六种数学思想方法表"**. 这张表是"解题小词典", 是高考复习的中心和突破高分的法宝. 请同学们结合各章节的问题解决,刻苦地研究,领悟和总结. 达到解题方法明确化是艰难的,就开发大脑而言,必须经历两个认识发展过程:第一过程是由"小巧"到 "中巧",再到"大巧";达到"大巧"境界之人就会反过来进入第二过程,运用"大巧"(比较全面的掌握了各种数学思想方法)以不变应万变,无招胜有招,高速而轻巧地解决问题. (见数学家张景中之论: 小巧一题一法,中巧一法解决一类问题,大巧法无定法)

4. 自我总结是摧毁题海战术的法宝.

"题海战术" 是高考复习的大敌, 无数考生淹没在题海中. 当代世界著名的问题解决专家舍费尔德(A. Schoenfeld)教授说:

我希望教给学生 25 个题, 学生就会解决 500 个题;
不希望教给学生 500 个题, 学生却解不出 25 个题!

"反对题海战术,快乐高考"是本书的主要特征与乐趣, 我们与人挑战的是"看谁解题少,又要成绩好!". 智能数学深刻地揭露了"摧毁题海战术的法宝是自我总结". 于是本书精选范例,每一问题,每一例题,每一章节都要自我总结. 学过本书之后,你将进一步领悟到:人的一生,总得不断地总结经验,有所发现,有所发明,有所创造,有所前进. 自我总结是人生走向成功的法宝, 是人类进步的阶梯! 为什么每天半夜 12 点还做不完作业呢? 就是因为没有学会自我总结,无法解决老师发来的题海.

问 3 最好的学习方法是什么? 怎样学习本书?

解 最好的学习方法就是智能数学的"三步学":

第一步问中学:总结基础秘诀和解题方法;

第二步例中学:范例评注;

第三步做中学与用中学:自我检测与自我总结. 自我总结什么呢? 总结三点:(1)基础傻瓜化了吗? (2)解题方法明确化了吗? (3)有没有新发现,新结论,新方法?

这个"三步学"不但是学习数学的最好方法, 也是学习各门学科的最好方法. 请同学们试试看, 应用"三步学"去学习物理, 化学等其他学科吧!

下面说说怎样应用"三步学"学习本书?

本书《智能数学高考特训教程》分为正本和副本两册.

正本是“问中学与例中学”:作者站在老师的地位上，向你讲授高考两个基本点:(1)基础傻瓜化;(2)解题方法明确化. 在每章之首都写明该章的高考基本点和学习中心,这就是本章的最高学习目标. “问中学”和“例中学”以老师为主导,但读者要夺取主动权,即自我独立作答问 1,问 2,…,自我独立作答例 1,例 2,…,然后对照和研究本书的解答和讲解. (独立思考的小技巧:读书前做一个 20 cm×10 cm 的硬纸卡,读书时先用硬纸卡盖上书中的解答,自我充分作答后再看解答)

副本是“做中学与用中学”,书名叫《自我检测问题集》. 正本和副本必须同步配套学习. 副本,读者是主角了. 读者要同步地独立地像考试一样地完成检测,然后对照副本的答案和讲解,进行自我评注与总结,使每一节的学习都达到“基础傻瓜化”“解题方法明确化”!

欢迎同学们跨进智能数学的新世界,打开我的书,我就把你带入智能数学的乐园. 在我们这里,没有滥题,没有题海,没有忧愁,没有绝望. 有的是精题范例,有的是傻瓜宝贝,有的是精良的数学思想方法和高端的解题技术. 让我们充满快乐,充满信心,共同创造人间的数学奇迹!

我们的解题口号是:

推理最高!　解决最快!　表述最简!

本书为中国梦而写，希望中国青年:

人人学习智能数学，奋力征服新世界，为复兴中华而奋斗.

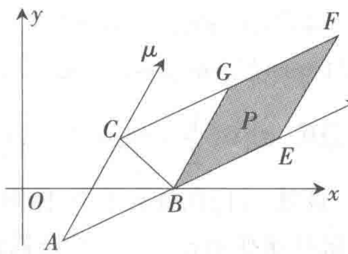
齐智华　齐　新　2013 年 6 月

高考新题解法示例

前言各问务必读懂，最好是加以研究. 下面用高考范例加以评注，你就会深入地领悟前言了. 高考复习的硬道理是快速提分. **智能数学提分的法宝是两个基本点："基础傻瓜化"和"解题方法明确化"**. 下面选解高考最新真题，深度地说明这两个基本点在高考解题中的决定性作用.

例 1（北京文小轴题） 向量 $A(1,-1)$, $B(3,0)$, $C(2,1)$, 若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ $(1\leqslant\lambda\leqslant2, 0\leqslant\mu\leqslant1)$ 的点 P 组成，则 D 的面积为________.

解 （广义坐标系——基底法）



取基底 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$, 建立斜坐标系 $A-\lambda\mu$, 则点 P 的区域 D 显然是 $\square BEFG$,

D 的面积为 $S_D=2S_{\Delta ABC}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\3&0&1\\2&1&1\end{vmatrix}=3$. 答

评注 本题是小轴题，难题. 特别注意：

(1) 解法明确为基底法，解题时间 $t<1$ 分钟，甚至秒杀！本题的傻解是用直角坐标法：多数考生都是用 λ,μ, 表示点 $P(x,y)$ 的坐标，再解出 λ,μ, 代入 $1\leqslant\lambda\leqslant2, 0\leqslant\mu\leqslant1$ 中，获得点 P 的可行域 D 的线性约束，再计算 D 的面积. 这种线性规划解法的工作量是上述解法的 5 倍，真是又傻又慢!

(2) 计算 $S_{\Delta ABC}$ 的行列式公式，意在指引解题高等化. 如果你不会行列式，就用下法，也很快：

$$\cos A=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2\times1+1\times2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin A=\frac{3}{5},$$

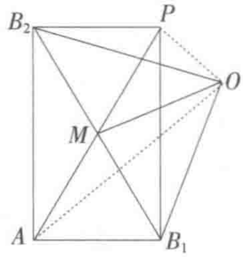
$$\therefore 2S_{\Delta ABC}=|AB||AC|\sin A=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=3.$$

例 2（重庆小轴题） 在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$, $|\overrightarrow{OB_1}|=|\overrightarrow{OB_2}|=1$, $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$. 若 $|\overrightarrow{OP}|<\frac{1}{2}$, 则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是

A. $(0,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　　　B. $(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}]$

C. $(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　　　D. $(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}]$

解法 1 （几何法/ 秒杀） 重庆的小轴题竟能秒杀？却看解法：



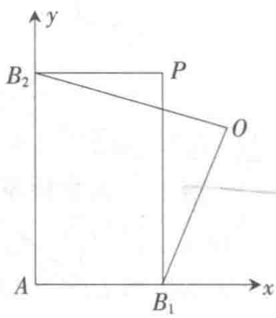
由已知推出 AB_1PB_2 是矩形,其对角线相交于 M，由 M 是两条对角线的中点及**“平行四边形等式”**推出

$$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{2}[(2|OM|)^2+|AP|)^2]=\frac{1}{2}[(2|OM|)^2+|B_1B_2|)^2]$$

$$=|OB_1|^2+|OB_2|^2=2,$$

$\therefore |\overrightarrow{OA}|^2=2-|\overrightarrow{OP}|^2\in(\frac{7}{4},2]\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|\in(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}]$. 故选 D.

解法 2 （坐标法） 取坐标系 $A\text{-}xy$ 如图. 设 $O(a,b)$,圆 O 的方程为 $\begin{cases}x=a+\cos\varphi\\y=b+\sin\varphi\end{cases}$，$\varphi$ 为参数,再设



$B_1(a+\cos\alpha,\ b+\sin\alpha)$,$B_2(a+\cos\beta,\ b+\sin\beta)$,

则 $b+\sin\alpha=0,\ a+\cos\beta=0\Rightarrow b=-\sin\alpha,\ a=-\cos\beta,$

$\Rightarrow P(a+\cos\alpha,\ b+\sin\beta)$.

$\therefore OA^2=a^2+b^2=\cos^2\beta+\sin^2\alpha=2-(\cos^2\alpha+\sin^2\beta)=2-OP^2$.

由 $|\overrightarrow{OP}|\in[0,\frac{1}{2})\Rightarrow|\overrightarrow{OA}|\in(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}]$. 故选 D.

评注 (1)在解法 1 中,你知道**“平行四边形等式”**吗？这就是基础傻瓜化问题. 你若没有傻瓜化,解题想快似比登天! **平行四边形等式**：平行四边形两条对角线的平方和等于四边平方和.

(2)很多高手解答本题几乎都用坐标法,有的很麻烦,没有解法 2 简捷. 但解法 1 更胜一筹,解法 1 是精明几何演绎,出神入画. 这个解题故事忠告我们,遇到几何问题必须首先想好：是用坐标法,还是几何法？并非总是坐标法好，数形结合才是最好. “2012 年天津解析几何压轴题”也发生了同样的故事,**见本书 10.3 节例 8.**

例 3 （山东小轴题） 设正实数 x,y,z 满足 $x^2-3xy+4y^2-z=0$,则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为

A. 0　　　　B. 1　　　　C. $\frac{9}{4}$　　　　D. 3

解 （奇妙猜想）

条件 $x^2-\frac{3}{2}x(2y)+(2y)^2-z=0$, $\frac{xy}{z}=\frac{x(2y)}{2z}$ 和目标 $u=\frac{2}{x}+\frac{2}{(2y)}-\frac{2}{z}$,它们都是关于正实数 x 和 $2y$ 的轮换对称式,猜想 $x=2y$ 时目标取得最值,此时 $z=(2y)^2-3(2y)y+4y^2=2y^2$,则当 $(\frac{xy}{z})_{\max}=\frac{(2y)y}{2y^2}=1$ 时,令 $\frac{1}{y}=t$,目标 $u=\frac{2}{2y}+\frac{1}{y}-\frac{2}{2y^2}=2t-t^2\leqslant1$($t=1$,即 $y=1$ 时取得最值). 故选 B.

评注 **本书 1.4 节例 4** 将此题型的解法明确为**“特殊化猜想——考察极端”**:当多个正变量轮换对称时,则当它们相等时目标函数取得最值. 这是均值不等式的极端情形,故称**考察极端**. 解题时间 $t<1$ 分钟,甚至秒杀! 本题型属于小轴题难题,近年各省试题雷同出现,多数考生不会猜想,都用演绎慢法,解题时间 $t>4$ 分钟,还会出错.

例 4 **(新课标全国Ⅰ文.小轴题)** 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$, 若 $f(x)$存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0>0$, 则 a 的取值范围是

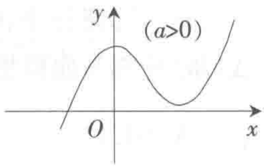
A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-1)$

解法 1 **(检验特值)** (1) 检验 $a=-2$, 则 $f(x)=-2x^3-3x^2+1$. 由 $f(-1)=0$ 知 $f(x)$有零点 -1, 所以 $a\neq-2$, 故排除 D.

(2) 检验 $a=3$, 则 $f(x)=3x^3-3x^2+1$. 由 $f(-1)\times f(0)=(-5)\times1<0$知 $f(x)$在区间$(-1,0)$内有零点, 所以 $a\neq3$, 故排除 A 和 B. 由(1)和(2)故选 C.

评注 解法 1 叫特殊化猜想——检验特值, 要注意根据选项选取恰当的特值, 可 1 分钟解完.

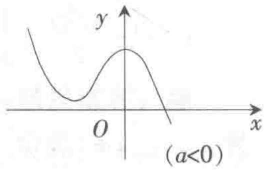
解法 2 **(零点个数判别法——极值点法)** 显然 $a\neq0$,
否则 $f(x)$有两个零点, 不合题意.



由 $f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\dfrac{2}{a}\right)$, 知 $f(x)$有两个极值点 $x_1=0$, $x_2=\dfrac{2}{a}$,

所以 $f(x)$有唯一零点 $\Rightarrow f(0)\times f\left(\dfrac{2}{a}\right)>0\Rightarrow a>2$ 或 $a<-2$.

由图可知 $a>2$ 时, $f(x)$的零点为负, 故舍去; $a<-2$ 是解, 故选 C.



评注 解法 2 要求考生的基础知识达到高度的傻瓜化. 本书在**“4.2 导数的应用/ 问 4”**中将三次函数的图象和性质傻瓜化. 用此傻瓜解答本题易如反掌, 可 1 分钟解完. 由此解法可见: 本题出的相当的好,把三次函数的图象和性质考得深透而美妙,区分度很大: 高手可以秒杀, 低者难以得分.

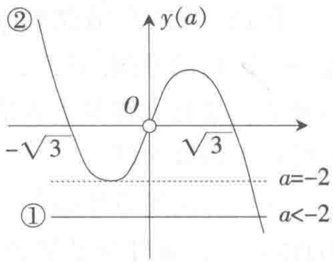
本题解到这里,完全可以住手,但我解题还要追求最高最好,所以再给出两个解法,使你领悟“解题方法明确化”是发现解题思路和快速解题的法宝.

解法 3 **(反解法——两函数图解法)**

$ax^3-3x^2+1=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$,

令 $t=\dfrac{1}{x}\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 则

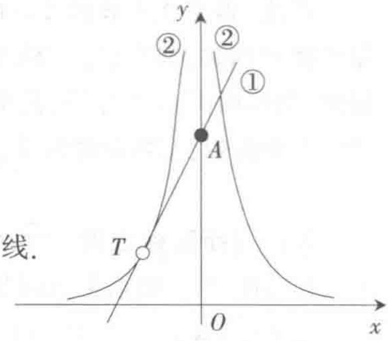
$$a=3t-t^3\Leftrightarrow\begin{cases}y=a, & \text{—①}\\ y=g(t)=3t-t^3. & \text{—②}\end{cases}$$



$g'(t)=3-3t^2=-3(t+1)(t-1)$, 所以 $g(t)_{极小}=g(-1)=-2$.

画出动直线①与三次曲线 $y=g(t)=-t(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})$(零点式)的图象②, 如图. 由图可知, 当 $a\in(-\infty,-2)$时, 方程 $a=g(t)$有唯一的正零点, 故选 C.

解法 4（两函数图解法）



方程 $ax^3-3x^2+1=0 \Leftrightarrow 3-ax=\dfrac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-ax, & —① \\ y=\dfrac{1}{x^2}. & —② \end{cases}$

作直线①和曲线②如图，直线①是过定点 $A(0,3)$ 的动直线.

设直线①和曲线②相切于点 $T(t,\ \dfrac{1}{t^2})$，$t<0$.

函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 的导数为 $y'=-\dfrac{2}{x^3}$，于是切点 T 满足 $\begin{cases} -\dfrac{2}{t^3}=-a, \\ \dfrac{1}{t^2}=3-at\ (t<0). \end{cases}$

解得 $\begin{cases} t=-1, \\ a=-2. \end{cases}$

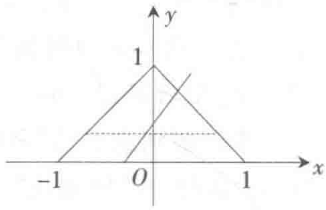
由图可知，直线①绕定点 $A(0,3)$ 从切线开始逆时针旋转，即得两曲线有唯一交点 $(x_0,\ y_0)(x_0>0) \Leftrightarrow -a>2 \Leftrightarrow a<-2$，故选 C.

例 5（课标全国Ⅱ.小轴题）已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$，直线 $y=ax+b\ (a>0)$ 将 ΔABC 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是

A. $(0,1)$　　　　B. $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2})$

C. $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3}]$　　　　D. $[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$

解（齐新猜想——考察极端／秒杀） 截距 b 的取值由参数 $a\in(0,+\infty)$ 确定.



如图，当 a 取值由 $0(a\neq0)$ 到 $a\to+\infty$ 时，b 取值的变化，可知 b 的取值范围是开区间(左右双开)，所以排除选项 C，D；

当 $a=0$ 时，存在截距 $b_0\in(0,1)$，使 $\forall b>b_0$，所以又排除 A，故选 B.

评注 这道小轴题很厉害！命题者独具匠心，但露出破绽——区间的开闭. 针此，解法 1 考察极端，即考察区间的端点是开还是闭，猜而不算，迎刃秒杀！这是大智慧直觉猜想. 本书把数学猜想(合情推理)明确为五大猜想(**见 1.4 节**)，学会后可以轻取本题.

所给解法要猜证结合，又都要数形结合. 本书认为猜证结合与数形结合是各种数学思想的首脑，它们能打开思路，统帅和调节各种数学思想方法，正确而高速地解题. 数学思想是数学学习的中心，而猜证结合与数形结合又是中心的中心，你必须抓住这个中心.

例 6 (课标全国Ⅰ.小轴题) 设 $\Delta A_nB_nC_n$ 的三边长分别为 a_n,b_n,c_n, $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 $S_n, n=1,2,3,\cdots$ 若 $b_1>c_1, b_1+c_1=2a_1, a_{n+1}=a_n, b_{n+1}=\dfrac{c_n+a_n}{2}, c_{n+1}=\dfrac{b_n+a_n}{2}$,则

A. $\{S_n\}$为递减数列

B. $\{S_n\}$为递增数列

C. $\{S_{2n-1}\}$为递增数列, $\{S_{2n}\}$为递减数列

D. $\{S_{2n-1}\}$为递减数列, $\{S_{2n}\}$为递增数列

解 (特殊化猜想 / 秒杀) 不妨令 $a_1=5, b_1=7, c_1=3$, $\Delta A_nB_nC_n$ 的三边长记为$(a_n,b_n,c_n,)$, $n=1,2,3,\cdots$,则由递推式计算各三角形的三边长,依次为

(5, 7, 3), (5, 4, 6), (5, 5.5, 4.5), (5, 4.75, 5.25), ……

它们的周长皆为 15,且 $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 比 $\Delta A_nB_nC_n$ 更接近正三角形,根据等周原理猜想 $S_n<S_{n+1}$,故选 B.

评注 这个解法是奇妙猜想,是本题的最快解法. 本题是 2006 年高考题“5 根木棒围成三角形问题”的卷土重来(**见本书 1.3 节例 7**). 当年齐新给出“等周猜想”的秒杀解法,轰动北京. 七年后再见本题,凡深悟齐新解法者均可七步答 B. 这就是**高端解题方法——精明演绎和奇妙猜想**.

例 7 (浙江文.16) 设 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $x\geqslant0$ 时恒有 $0\leqslant x^4-x^3+ax+b\leqslant(x^2-1)^2$,则 ab 等于________.

解 (猜必要 / 夹逼 / 秒杀)

令 $f(x)=x^4-x^3+ax+b$, $x\in[0,+\infty)$.

$\forall x\in[0,+\infty)$, $0\leqslant f(x)\leqslant(x^2-1)^2$. 令 $x=1$,夹逼得 $f(1)=0\Rightarrow f(x)|_{\text{极小值}}=f(1)\Rightarrow f'(1)=0$.

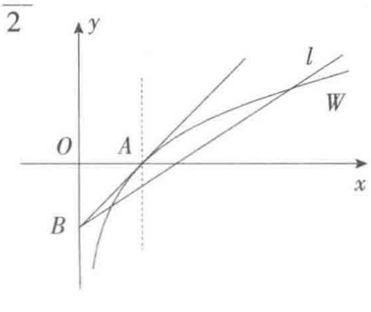
由 $\begin{cases}f(1)=0\\f'(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\(4x^3-3x^2+a)|_{x=1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\a=-1\end{cases}\Rightarrow ab=-1$. 答

评注 为求两个未知数 a,b,需猜测两个必要条件. 用“夹逼法”猜出 $f(x)$的两个性质:$f(1)=0$, $f'(1)=0$,问题迎刃秒杀! 请你回答:为什么 $f(1)=f(x)|_{\text{最小值}}\Rightarrow f(1)=f(x)|_{\text{极小值}}$? (回答是:连续函数 $f(x)=x^4-x^3+ax+b$ 的非端点的最值点必是极值点.)

例 8 (湖北小轴题) 已知 a 为常数,函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则

A. $f(x_1)>0$, $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$　　B. $f(x_1)<0$, $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$

C. $f(x_1)>0$, $f(x_2)<-\dfrac{1}{2}$　　D. $f(x_1)<0$, $f(x_2)>-\dfrac{1}{2}$



解 $f(x)=x(\ln x-ax)$, $x>0$

$f'(x)=(\ln x)-(2ax-1)$,

$\therefore f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=2ax-1$. ——①

由题意知方程①有二根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,所以曲线 W:$y=\ln x$ 与直线 l:$y=2ax-1$ 应有两个交点,如图.

将 l 绕定点 $B(0,1)$ 逆时针旋转，使 l 与 W 相切，这时，

切点为 $A(0,1)$，$a=\frac{1}{2}$. 由图 $\Rightarrow 0<x_1<1<x_2$.

再由图，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，曲线 W 在直线 l 的上方，所以 $f'(x)=(\ln x)-(2ax-1)>0$，

于是，$f(x_1)<f(1)<f(x_2)\Rightarrow f(x_1)<-\frac{1}{2}<f(x_2)$，故选 D.

评注 这是导数难题之最，难在极值点 x_1,x_2 无法求出. 本题的最佳解法是图解法——两曲线位置关系法. 本题改成大题，也是很有水平，难度较大的压轴题. 我赞赏很多省市最后压轴题考查导数的应用，而不考哪些没有实用价值的人造难题. 导数的应用是最有价值的数学，英国人说得好，他说：21 世纪的文盲是不懂微积分. 请研究**本书 4.2 节的例 8，例 9，例 10 及本题**.

例 9（四川小轴题） 设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数）. 若曲线 $y=\sin x$ 上存在点 (x_0,y_0) 使得 $f(f(y_0))=y_0$，则 a 的取值范围是

A. $[1,e]$　　B. $[e^{-1}-1,1]$　　C. $[1,e+1]$　　D. $[e^{-1}-1,e+1]$

解(因果猜想与反证法) 显然，$f(y_0)=y_0\Rightarrow f(f(y_0))=y_0$ 成立；反过来，猜想：由已知 $f(f(y_0))=y_0\Rightarrow f(y_0)=y_0$ 也成立. 怎么证明呢？立即想起用反证法证明：假设 $f(y_0)\neq y_0$，

若 $f(y_0)>y_0$，因为 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$ 是单调递增函数，所以 $f(f(y_0))>f(y_0)>y_0$ 这与 $f(f(y_0))=y_0$ 矛盾；若 $f(y_0)<y_0$，同理也与 $f(f(y_0))=y_0$ 矛盾. 故证得 $f(y_0)=y_0$.

因为 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，所以 $\exists y_0=\sin x_0, f(f(y_0))=y_0 \Leftarrow \exists t\in[0,1], f(t)=t$.

由 $f(t)=t\Leftrightarrow\sqrt{e^t+t-a}=t\Leftrightarrow a=e^t+t-t^2$.

令 $a=g(t)=e^t+t-t^2, t\in[0,1]$. $g'(t)=e^t+1-2t=(e^t-t)+(1-t)>0\ (t\in[0,1])$，

所以 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增 $\Rightarrow a\in[1,e]$，故选 A.

评注 本题解法分两步：第一步，用因果关系猜想 $f(y_0)=y_0$，这一步很难. **"先猜想，后用反证法证明"是大巧**，正难则反是高级的化归方法，值得深思；第二步，用导数法求函数 $a=g(t), t\in[0,1]$ 的值域.

例 10（辽宁小轴题） 为了考察某校各班参加课外书法小组的人数，在全校随机抽取 5 个班级，把每个班级参加该小组的人数作为样本数据. 已知样本平均数为 7，样本方差为 4，且样本数据互不相同，则样本数据中的最大值为________.

探路 设 5 个数据及其大小为 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5, a_i\in\mathbf{N}$，则

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35,\\(a_1-7)^2+(a_2-7)^2+(a_3-7)^2+(a_4-7)^2+(a_5-7)^2=20.\end{cases}$$

令 $a_i-7=x_i, i=1,2,3,4,5$，则

所求问题化为：求 x_5 的最大值，约束条件是

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=20.\end{cases}\text{且 } x_i\neq x_j(i\neq j), x_i\in\mathbf{Z}.$$

解法 1（华罗庚猜想 / 秒杀） 5 维球与 5 维平面相交，其 x_5 的最大值当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时取得，于是 $\begin{cases}4x_1+x_5=0,\\4x_1^2+x_5^2=20.\end{cases}\Rightarrow x_5\leqslant 4$，但数据 x_i 互不相同，且 $x_5\in\mathbf{Z}\Rightarrow x_5\leqslant 3\Rightarrow a_5\leqslant 3+7=10$. 答

评注 当我看到本题时，立刻想起华罗庚解答美国数学竞赛题的方法：华老师把“5 维球与 5 维平面相交”类比于“3 维空间的球与平面相交”，几秒内神奇地猜出结果. 而今我就用**华罗庚猜想**将本题**秒杀**！这个“华罗庚猜想”包括两个要点：第一是数形结合，代数问题几何化；第二是类比猜想，高维类比低维. 本例精彩地表明：猜证结合与数形结合是各种数学思想方法之首，是本书提倡的数学学习中心的中心.

解法 2（柯西不等式）

$(-x_5)^2=(x_1\cdot 1+x_2\cdot 1+x_3\cdot 1+x_4\cdot 1)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(1^2+1^2+1^2+1^2)$

$\Leftrightarrow x_5^2\leqslant 4(20-x_5^2)\Leftrightarrow x_5^2\leqslant 16\Leftrightarrow x_5\leqslant 4$，取等号$\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=x_4$，

但数据 x_i 互不相同，且 $x_5\in\mathbf{Z}\Rightarrow x_5\leqslant 3\Rightarrow a_5\leqslant 3+7=10$. 故答样本数据中的最大值为 10.

解法 3（大众解法：方程的整数解） 设 5 个数据及其大小为 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$, $a_i\in\mathbf{N}$, 则

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=35,\\(a_1-7)^2+(a_2-7)^2+(a_3-7)^2+(a_4-7)^2+(a_5-7)^2=20.\end{cases}$$

检验方程 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=20$ 的整数解：由整数平方的个位数特征，只有

$(-3)^2+(-1)^2+0^2+1^2+3^2=20$,

所以 $a_5=3+7=10$. 故答样本数据中的最大值为 10.

例 11 (北京小轴题) 学生的语文、数学成绩均被评定为三个等级, 依次为“优秀”“合格”“不合格”. 若学生甲的语文、数学成绩都不低于学生乙,且其中至少有一门成绩高于乙,则称“学生甲比学生乙成绩好”. 如果一组学生中没有哪位学生比另一位学生成绩好, 并且不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生,那么这组学生最多有

A. 2 人　　B. 3 人

C. 4 人　　D. 5 人

解法 1 (计数的一般步骤与间接法) 一个事件是一个学生的成绩单: (语文成绩, 数学成绩), 所求的学生组还要同时满足两个条件:

(1) 没有哪位学生比另一位学生成绩好;

(2) 不存在语文成绩相同、数学成绩也相同的两位学生.

我们先求只满足条件(2)的学生组人数: 分两步填写一个学生的成绩, 第一步填写语文成绩有 3 种方法, 第二步填写数学成绩有 3 种方法, 根据乘法原理, 成绩互不相同的学生总数为 3×3=9 人, 列出这 9 人的成绩是:

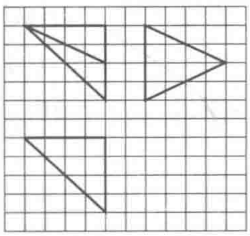
(优, 优), (优, 及), (优, 不), (及, 优), (及, 及), (及, 不), (不, 优), (不, 及), (不, 不).

所求的学生组还要满足条件(1), 经过一一检验, 在 9 人中满足条件(1)的学生只有 3 人: (优, 不), (及, 及), (不, 优). 故选 B.

解法 2 (直奔结果) 我们用哲学的大思维来解题: “一位学生比另一位学生成绩好”叫做“不平衡”, 相反的“没有哪位学生比另一位学生成绩好”叫做“平衡”. 本题所求的是“平衡”状态的学生人数, 于是我们直奔结果: 立刻写出“成绩平衡”的 3 人: (及, 及), (优, 不), (不, 优), 然后不论怎样修改成绩,填加新人都会出现“成绩不平衡”,所以满足条件的学生只有 3 人, 故选 B.

评注 平常的计数教学只讲“特殊元”“特殊位”“捆绑”“插空”等经验方法,教者不讲或不会讲”计数的一般步骤”, 因此面对本题,许多考生束手无策. 这就是北京小轴题的艰难与精彩之处,恰好考查计数的一般步骤和基本原理. 见本书 7.1 节的问 2.

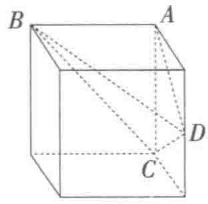
例 12 (新课标全国Ⅰ.小轴题) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的各条棱中, 最长的棱的长度为



A.　　B. 6

C.　　D. 4

解 (辅助体法) 这是不规则的多面体的三视图问题,很难, 因而成为小轴题. 观察三个视图分别在三个正方形之中, 所以用棱长为 4 的正方体作为辅助体. 先画正方体, 再用三视图的规则画出多面体的直观图: 三棱锥 $A-BCD$, 如图. 最长的棱为 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}$ $=\sqrt{4^2+(4^2+2^2)}=6$. 故选 B.



评注 (1) 把考查"立体化归"(三视图)作为小轴题是正确的命题走向. 辅助体法是立体化归的高级方法,务必深度领悟. 见本书 9.3 节的例 2, 例 5, 例 6.

(2) 用网格纸画三视图是工程师画图的好方法,省略了繁杂的尺寸线.

例 13 (湖北) 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$, 则椭圆和双曲线的离心率的倒数之和的最大值为

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 3　　D. 2

解法 1 (三角换元法) 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $e=\frac{c}{a}$; 双曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $e_1=\frac{c}{a_1}$. 由椭圆和双曲线的焦点三角形面积公式,得

$S_{\Delta F1PF2}=b^2\tan 30°=b_1^2\cot 30°\Rightarrow b^2=3b_1^2\Rightarrow a^2-c^2=3(c^2-a_1^2)\Rightarrow a^2+3a_1^2=4c^2$, 两边除以 c^2 得

$$\frac{1}{e^2}+\frac{3}{e_1^2}=4\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{e}=2\cos\theta,\\ \frac{\sqrt{3}}{e_1}=2\sin\theta,\end{cases}\theta\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

所以$\frac{1}{e}+\frac{1}{e_1}=2\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\leqslant 2\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$(能取等号), 故选 A.

解法 2 (柯西不等式) 同解法 1, 得$\frac{1}{e^2}+\frac{3}{e_1^2}=4$. 由柯西不等式, 得

$\frac{1}{e}+\frac{1}{e_1}=\frac{1}{e}\times 1+\frac{\sqrt{3}}{e_1}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{e^2}+\frac{3}{e_1^2}}\times\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

评注 这两个解法都用了"圆锥曲线的小秘密": 椭圆和双曲线的焦点三角形面积公式, 见本书 10.2 节的例 2. 这就是"基础傻瓜化", 可使本题"1 分钟解完"!

例 14 (辽宁小轴题) 对于 $c>0$, 当非零实数 a, b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$, 且使 $|2a+b|$ 最大时, $\frac{3}{a}-\frac{4}{b}+\frac{5}{c}$的最小值为________.

解法 1 (柯西不等式) 由已知得$\frac{c}{4}=a^2-\frac{1}{2}ab+b^2=(a-\frac{b}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}}{4}b)^2$, 为应用柯西不等式求$|2a+b|$取得最大的条件, 取向量$(a-\frac{b}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}b)$和$(x, y)$, 设此二向量的数量积为

$(a-\frac{b}{4})x+\frac{\sqrt{15}}{4}by=2a+b$, 解得$(x, y)=(2, \frac{6}{\sqrt{15}})$. 于是由柯西不等式得

$[(a-\frac{b}{4})^2+(\frac{\sqrt{15}}{4}b)^2][2^2+(\frac{6}{\sqrt{15}})^2]\geqslant[(a-\frac{b}{4})\times 2+(\frac{\sqrt{15}}{4}b)(\frac{6}{\sqrt{15}})]^2=(2a+b)^2$,

故当 $|2a+b|$ 最大时，有 $\dfrac{a-\frac{b}{4}}{2}=\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{4}b}{\frac{6}{\sqrt{15}}}$，即得 $a=1.5b$，$c=10b^2$.

所以 $\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}=\dfrac{3}{1.5b}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{10b^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}-2\right)^2-2$，故当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值为 -2.

评注 本题是 2014 年各省高考题的最难小轴题，但用构造向量的方法很易突破，由此可见用向量的数量积掌握柯西不等式是最好记最好用的方法.

解法 2（构造方程与构造函数：以 b 为基本量） 设 $2a+b=t$，则 $2a=t-b$.

由已知 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$ 消去 a，并对 b 整理得 $6b^2-3tb+t^2-c=0$，——①

因为存在实数 b，所以判别式 $\Delta_b=9t^2-4\times6(t^2-c)\geqslant0\Leftrightarrow|t|\leqslant\sqrt{\dfrac{8c}{5}}\Rightarrow|t|_{\max}=\sqrt{\dfrac{8c}{5}}$.

把 $t=\pm\sqrt{\dfrac{8c}{5}}$ 代入①，得 $b=\dfrac{t}{4}$. 下面注意：以 b 为自变量，不必代入 $t=\pm\sqrt{\dfrac{8c}{5}}$.

由 $2a=t-b$ 得 $a=\dfrac{3}{2}b$，$c=4a^2-2ab+4b^2=10b^2$.

所以 $\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}=f(b)=\dfrac{2}{b}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{10b^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}-2\right)^2-2$，故当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{5}{c}$ 的最小值为 -2.

评注 解法 2 要明确两个方法，第一，构造方程法：求 b 为何值时 $|2a+b|$ 最大，为此设 $2a+b=t$，构造了关于 b 的二次方程①，并用判别式法求得 $b=\dfrac{t}{4}$. 第二，构造函数法：以 b 为自变量，构造函数 $f(b)$，问题迎刃而解. 解法 2 的灵魂是基本量方法，全程以 b 为基本量，将 a，c 和目标都用 b 表示. 总之，解法 2 凸现了函数与方程的数学思想方法，值得回味.

例 15（北京解答题 19）已知 A,B,C 是椭圆 W：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的三个点，O 是坐标原点.

（1）当点 B 是 W 的右顶点，且四边形 $OABC$ 为菱形时，求此菱形的面积.

（2）当点 B 不是 W 的顶点时，判断四边形 $OABC$ 是否可能为菱形，并说明理由.

解（1）答案： 菱形的面积为 $\sqrt{3}$.

（2）解法 1（点差法） 假设四边形 $OABC$ 为菱形，则设

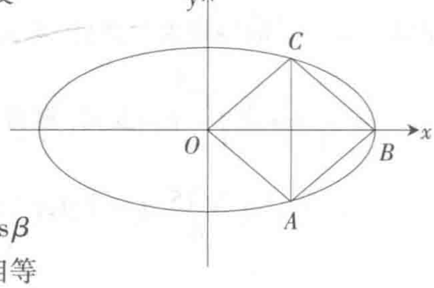
$A(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$，$C(r\cos\beta,r\sin\beta)$，$(r=|OA|=|OC|)$

代入椭圆方程 $x^2+4y^2=4$ 中，得

$(r\cos\alpha)^2+4(r\sin\alpha)^2=4$，——①

$(r\cos\beta)^2+4(r\sin\beta)^2=4$，——②

①-②，注意 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，得 $\cos^2\alpha=\cos^2\beta\Rightarrow\cos\alpha=\pm\cos\beta$



所以 $A(r\cos\alpha,r\sin\alpha)$，$C(r\cos\beta,r\sin\beta)$ 两点的横坐标相等或互为相反数，点 B 必是 W 的顶点.