数学奥林匹克辅导讲座

（供初中学生用）

广东数学奥林匹克业余学校主编

广东教育出版社

数学奥林匹克辅导讲座

（供初中学生用）

广东数学奥林匹克业余学校主编

广东教育出版社

数学奥林匹克辅导讲座
（供初中学生用）
广东数学奥林匹克业余学校主编
广东教育出版社出版
广东省新华书店发行
广东番禺印刷厂印刷

•

787×1092毫米 32开本 7.5印张 172,000字
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷
印数 1—30,000册
ISBN 7—5406—0733—5/G·732
定价 2.10元

前　言

开展课外活动是培养优质人才的一个重要环节．基础教育的课堂教学只是向每个人提供最低限度的共有的知识，而科学技术、生产和文化的不断发展要求最大限度地发展个人的才能．要使学生在学校里能在自己最感兴趣的学科领域得到更广泛、更深刻的知识，在智力和能力上得到更大的发展，就要另辟途径．只有这样，才能培养出更多的优质人才．因此，在教学计划中，不仅安排了必修课程，还安排了课外活动的内容．正是体现了这种精神，许多学校和教师为学生组织了数学课外活动，希望能通过课外活动，启发学生的学习兴趣，挖掘学生的创造力．我们编写的这套书，正是适应这种需要，为广大中学师生开展数学课外活动提供的辅导材料．

数学是学习科学的基础，是训练思维的体操．数学课外活动，不是要求学生学习高深的数学知识，而是着重通过数学训练，培养学生敏捷、灵活的思维，发展学生的理解力和想象力．这样做，不仅对学生将来学习数学有好处，而且可以为学习其他科学打下良好的基础．数学竞赛是通过解题的形式进行智力和能力的竞赛，参赛者要以扎实的基本功，灵活的思维，敏捷的反应取胜．数学竞赛与体育竞赛相似，是对抗性很强的比试．从1959年在罗马尼亚的布加勒斯特举行第一届国际数学奥林匹克即现在流行的简称 *IMO* (*In Lernational Malhematical Qlympiacl*) 开始，数学竞赛已成

为国际性的比赛项目.此后每年一次，至今已进行了第29届.我国于1985年第一次派两名中学生参加竞赛活动以来，引起了广大数学教育工作者和青少年数学爱好者的关注.

为了在课外活动中，有目的、有计划地开展数学训练，激发学生学习数学的兴趣，在这基础上培养和选拔数学竞赛选手，我们在1986年建立了广东数学奥林匹克业余学校，聘请广东数学学会理事长、中山大学梁之舜教授，副理事长、华南师大钟集教授为名誉校长，聘请中国数学会普及委员会主任裘宗沪（中国科学院系统研究所副研究员），中国科技大学数学研究所常庚哲教授为顾问，并建立了以省内高等院校的教授、中学的高级教师为主体的教练队伍.这个学校采取主校与分校结合，在平时分散学习，寒暑假集中训练，在普及的基础上提高的办法.这套教材是教练们为各地数学奥林匹克学校及中学平时开展课外活动编写的.

这套书一共三本，初中的一本，高中的两本.在编写过程中，力求踞高临下，将近代数学的观点和方法结合中学数学教学实际进行介绍，做到深入浅出，讲练结合，知识与能力并重，并注意选用一些国内外竞赛题进行分析和训练，希望对开拓读者的知识眼界，提高解题能力起到积极的作用.由于我们的工作还刚刚开始，编者都是业余教练，经验不足，水平有限，有错误及不足之处，请读者批评指正.

苏式冬

一九八八年十一月

目　录

第一讲　代数式恒等变形

一、因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解，也叫做分解因式.

因式分解是多项式乘法的逆运算（逆变形），一般常见的方法是：

（1）提取公因式法；

（2）分组分解法；

（3）运用公式法；

（4）配方法；

（5）十字相乘法；

（6）待定系数法.

一般来说因式分解没有固定的方法，而往往需要睿敏的观察能力和较高的运算技巧，要善于将多项式化成适合因式分解公式的形式，灵活运用各种公式，还需要巧妙地利用各种代数恒等式，下面的几个例子有一定的启发.

例1　分解 $x^2-y^2-2z^2-xz+3yz-2y+3z-1$ 的因式.

解：设有分解式

$$x^2-y^2-2z^2-xz+3yz-2y+3z-1$$
$$=(x+b_1y+c_1z+1)(x+b_2y+c_2z-1)\quad (*)$$

分别比较（$*$）式两端不含变量 x、z 的项和不含 x、y 的项，

便得：

$$-y^2-2y-1=(b_1y+1)(b_2y-1);$$

$$-2z^2+3z-1=(c_1z+1)(c_2z-1).$$

计算：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ -1 & & -1 \\ \hline -1 & & -1=-2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} -2 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & -1 \\ \hline 1 & & +2=3 \end{array}$$

故知(＊)式若成立，其右端必为$(x+y-2z+1)$ $(x-y+z-1)$，将其展开恰与左端相等，故得

$$x^2-y^2-2z^2-xz+3yz-2y+3z-1$$
$$=(x+y-2z+1)(x-y+z-1).$$

例 2　分解因式 $x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$

解：注意到式中仅含 x 的偶次幂，便知可能有如下的分解式：

$$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$$
$$=(x^2+b_1y+c_1)(x^2+b_2y+c_2) \qquad (*)$$

分别比较(＊)式两端不含y和不含x的项，便得

$$x^4-4=(x^2+c_1)(x^2+c_2)$$
$$-3y^2+8y-4=(b_1y+c_1)(b_2y+c_2)$$

试算：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 2 & & -2 \\ \hline 2 & & -2=0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} -3 & & 2 \\ & \times & \\ 1 & & -2 \\ \hline 2 & & +6=8 \end{array}$$

故得：

$$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$$
$$=(x^2-3y+2)(x^2+y-2).$$

例 3　分解因式　$a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$

解：原式是 a、$(a+1)$、(a^2+a)三数的平方之和且它们之间有如下关系：$(a+1)-a=1$，$(a+1)a=a^2+a$。注意到这些就容易得到下面的解法：

$$\begin{aligned}原式&=[(a+1)-a]^2+2a(a+1)+(a^2+a)^2\\&=1+2a(a+1)+(a^2+a)^2\\&=(a^2+a+1)^2.\end{aligned}$$

例 4　分解因式 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$

分析：注意到题中四个相乘因子的特点而巧妙地运用$(x+\alpha)(x+\beta)$的积中一次项系数为$(\alpha+\beta)$这一性质，凑成相同一次项，从而化成适合公式的形式。

解：
$$\begin{aligned}原式&=[(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)]+a^4\\&=(x^2+5ax+4a^2)^2+2a^2(x^2+5ax+4a^2)\\&\quad+(a^2)^2\\&=(x^2+5ax+5a^2)^2\end{aligned}$$

例 5　分解因式　$x^6+x^4+x^2$

解：
$$\begin{aligned}x^6+x^4+x^2&=x^2(x^4+x^2+1)\\&=x^2\cdot\frac{x^6-1}{x^2-1}\\&=x^2\cdot\frac{x^3-1}{x-1}\cdot\frac{x^3+1}{x+1}\\&=x^2(x^2+x+1)(x^2-x+1).\end{aligned}$$

因式分解题目类型繁多，方法灵活多样，前面的一些例子给我们得到以下几点启示：

1．必须深刻理解因式分解这种运算的特点，从本质上认识分解因式是多项式乘法演算的还原过程（例如提取公因式是乘法对加法的分配律的“还原”，“拆项分解”是乘法中合并同类项的“还原”等等）．这样就能加深对各种因式

分解方法的来源和性能的理解，提高灵活运用这些方法的能力。

2．抓住因式分解与乘法的互逆关系，对比地进行分析研究，特别注意各种特殊形式的多项式相乘，其因子和积的特征，以及因子与积的系数之间的关系，这往往是因式分解中确定待定系数的关键．

3．提高灵活运用因式分解公式和其它代数恒等式的能力，分解因式必须对公式很熟，对于公式的形式和特点要有清晰的认识和深刻的理解．

因式分解由于方法灵活多样，一般没有固定的方法，所以在解题时除了一般常用的因式分解方法外，有时遇到较复杂的多项式因式分解时，还要用到一些其它的方法，下面补充几种，以供参考．

（一）应用三个补充的乘法公式因式分解

因式分解的三个补充公式是：

（1）$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

（2）$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

（3）$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$（$n$取自然数）

下面举例说明直接应用这三个补充公式进行因式分解．

例6 把$x^3+y^3+z^3+x+y+z-3xyz$因式分解

解： 原式$=x^3+y^3+z^3-3xyz+(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz+1)$

说明： 本例用了因式分解补充公式（1）问题很快得到解

决.

例7　在有理数范围内把$(x^2+xy+y^2)^2-6(x^2-xy+y^2)^2+x^4+x^2y^2+y^4$因式分解

解：应用补充公式(2)得：

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(x^2+xy+y^2)^2+(x^2+xy+y^2)\\&\quad(x^2-xy+y^2)-6(x^2-xy+y^2)^2\\&=[(x^2+xy+y^2)+3(x^2-xy+y^2)]\\&\quad[(x^2+xy+y^2)-2(x^2-xy+y^2)]\\&=-2(2x^2-xy+2y^2)(x^2-3xy+y^2).\end{aligned}$$

例8　分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

解：应用补充公式(3)得：

$$\begin{aligned}x^{15}-1&=(x^3)^5-1^5\\&=(x^3-1)[(x^3)^4+(x^3)^3+(x^3)^2\\&\quad+(x^3)+1]\\&=(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)\end{aligned}$$

$\therefore\quad x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

$$=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}$$

$$=\frac{(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

（二）利用换元法进行因式分解

在某些多项式的因式分解过程中，换元法起着重要的桥

梁作用.

例 9　分解因式：$(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)-72$

解：设 $y=x^2-3x$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (y+2)(y-4)-72 \\
&= y^2-2y-80 \\
&= (y-10)(y+8) \\
&= (x^2-3x-10)(x^2-3x+8) \\
&= (x-5)(x+2)(x^2-3x+8).
\end{aligned}
$$

例10　分解因式：$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-1680$

解：设 $y=\frac{1}{2}[(x^2+5x+4)+(x^2+5x+6)]$

$$=x^2+5x+5$$

则

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (y-1)(y+1)-1680 \\
&= y^2-1-1680 \\
&= y^2-1681 \\
&= y^2-41^2 \\
&= (y+41)(y-41) \\
&= (x^2+5x+5+41)(x^2+5x+5-41) \\
&= (x^2+5x+46)(x^2+5x-36) \\
&= (x^2+5x+46)(x-4)(x+9).
\end{aligned}
$$

例11　分解因式：$(x^2-5x+4)(x^2-x-2)-72$

解：先把两个二次三项式分解因式：

$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1),$$

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \text{原式} &= (x-4)(x-1)(x-2)(x+1)-72 \\
&= [(x-4)(x+1)][(x-1)(x-2)]-72 \\
&= (x^2-3x-4)(x^2-3x+2)-72
\end{aligned}
$$

（以下可用换元法分解；同例9）.

（三）用综合除法和余数定理进行因式分解

先介绍一个重要的定理：

如果 $px-q$（p、q互质）是整系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的因式，那么p一定是a_0的因数，q一定是a_n的因数（证明略）.

根据这个定理要发现整系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

有没有（$px-q$）（p、q互质）的因式，只要先求a_0的因数p和a_n的因数q，然后用综合除法将一切可能的一次式$px-q$去试除$f(x)$，再根据余数定理，如果余数$f(\frac{q}{p})$等于零，那么$px-q$就是$f(x)$的因式；如果余数$f(\frac{q}{p})$不等于零，那么$px-q$就不是$f(x)$的因式.

应用余数定理还可直接得到一些找因式的规律：

（1）若$f(x)$没有常数项，则$f(x)$必含$(x-1)$因式；

（2）若$f(x)$所有系数和等于零，则$f(x)$必含$(x-1)$因式；

（3）若$f(x)$的奇次项系数和等于偶次项系数和，则$f(x)$必含（$x+1$）因式.

例12　把$f(x)=x^3-4x^2+x+6$ 因式分解

解：$\because f(x)$奇次项系数和等于偶次项系数和，故$f(x)$必含（$x+1$）因式

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x^3+x^2-5x^2-5x+6x+6\\&=(x+1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

例13 把$f(x)=2x^4+3x^3-8x^2-9x+6$因式分解.

解：$f(x)$可能有因式 $x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm3$，$x\pm6$，$2x\pm1$，$2x\pm3$；因为$f(1)=-6$，$f(-1)=6$，所以$x\pm1$不是$f(x)$的因式，用综合除法，以$x+2$试除$f(x)$：

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 2 & +3 & -8 & -9 & +6 & -2 \\
+) & & -4 & +2 & +12 & -6 & \\
\hline
 & 2 & -1 & -6 & +3 & +0 &
\end{array}$$

这里余数为0，所以$x+2$是$f(x)$的一个因式，另一个因式为 $f_1(x)=2x^3-x^2-6x+3$

$f_1(x)$可能有因式：$x\pm3$，$2x\pm1$，$2x\pm3$，（$x\pm1$不是$f(x)$的因式，因而也不是$f_1(x)$的因式）

用综合除法，以$2x-1$试除$f_1(x)$得：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2 & -1 & -6 & +3 & \frac{1}{2} \\
+) & & +1 & +0 & -3 & \\
\hline
2 & 2 & +0 & -6 & +0 & \\
\hline
 & 1 & +0 & -3 & &
\end{array}$$

$$\therefore\ f_1(x)=(2x-1)(x^2-3)$$
$$=(2x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$$\therefore\ f(x)=(x+2)(2x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}).$$

二、恒等式及条件等式证明

1. 恒等式证明

恒等式有以下几种常用的证明方法：

（一）直接推证法：

一般采用：

（1）由左边证到右边，即要证$A=B$，可由$A\Longrightarrow B$；

（2）由右边证到左边，即要证$A=B$，可由$B\Longrightarrow A$.

例1 证明恒等式：

$$\frac{a^4-(a-1)^2}{(a^2+1)^2-a^2}+\frac{a^2-(a^2-1)^2}{a^2(a+1)^2-1}+\frac{a^2(a-1)^2-1}{a^4-(a+1)^2}=1.$$

证明：等式左边比较复杂，采用由左边证到右边.

$$左边=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a-1)}{(a^2+1-a)(a^2+1+a)}+\frac{(a-a^2+1)(a+a^2-1)}{[a(a+1)-1][a(a+1)+1]}$$

$$+\frac{[a(a-1)-1][a(a-1)+1]}{(a^2-a-1)(a^2+a+1)}$$

$$=\frac{a^2+a-1}{a^2+a+1}+\frac{a-a^2+1}{a^2+a+1}+\frac{a^2-a+1}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{a^2+a-1+a-a^2+1+a^2-a+1}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{a^2+a+1}{a^2+a+1}=1=右边$$

∴原等式成立.

例2 证明：$\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})}{1+\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})}$

证明：等式右边比较复杂，可对右边进行恒等变形，由右边证到左边.

$$右边分子=\frac{1}{2}[(e^x)^2-(e^{-x})^2]=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})$$

$$右边分母=\frac{1}{2}[2+e^{2x}+e^{-2x}]=\frac{1}{2}[(e^x)^2+2e^x\cdot e^{-x}$$

$$+(e^{-x})^2]=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})^2$$

$$\therefore\quad \text{右边}=\frac{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})^2}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\text{左边}$$

∴原等式成立.

（二）间接推证法：

证左右二边均等于第三式．即要证$A=B$，只须证明$A=C$，$B=C$，就可得$A=B$.

例3 证明恒等式：

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2+3x+1)^2-1$$

证明：左边$=[x(x+3)][(x+2)(x+1)]$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$，

右边$=(x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1)$

$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$.

∴左边＝右边

∴原等式成立.

（三）比较法：

计算等式左右两边的差值，若差值等于0，则原恒等式成立．即要证$A=B$，可证$A-B=0$.

例4 证明恒等式：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

证明：左边减去右边，得

$[(a^2+b^2)(c^2+d^2)]-[(ac+bd)^2+(ad-bc)^2]$

$=(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)-(a^2c^2+2abcd$

$+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2)$

$=(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)-(a^2c^2+b^2d^2$

$+b^2c^2+a^2d^2)$

$=0$