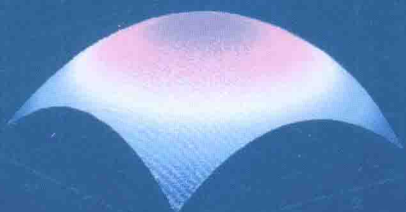
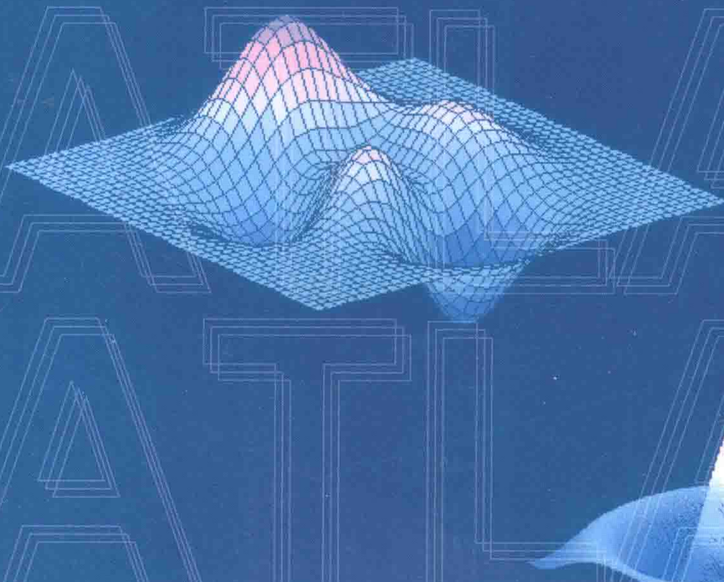
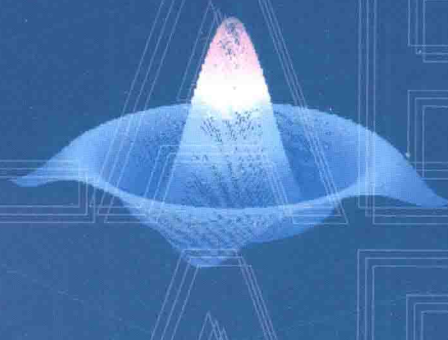
普通高等教育“十二五”规划教材

# MATLAB与数学建模



主　编　李伯德　李振东
副主编　王国兴　智　婕





科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

# MATLAB与数学建模

主　编　李伯德　李振东
副主编　王国兴　智　婕
参　编　王媛媛　樊瑞宁　樊馨蔓

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书从数学建模的角度介绍 MATLAB 的应用及常用的数学建模方法. 书中内容根据数学建模竞赛的需要而编排，涵盖了大部分数学建模问题的 MATLAB 求解方法，全书共 14 章，内容包括数学建模概述、MATLAB 基础、微分方程、差分方程、插值与数据拟合、线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、多目标规划、图与最短路、网络流、概率统计方法、综合评价与预测方法. 各章有一定的独立性，这样便于教师和学生按需要进行选择. 本书案例均配有 MATLAB 源程序，程序设计简单精练，思路清晰，注释详尽，灵活应用 MATLAB 工具箱，有利于没有编程基础的读者快速入门.

本书可作为数学建模课程教材和大学生数学建模竞赛培训教材，也可作为数学实验类的教学用书.

**图书在版编目（CIP）数据**

MATLAB 与数学建模 / 李伯德，李振东主编. —北京：科学出版社，2014
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-041496-0

Ⅰ. ①M… Ⅱ. ①李… ②李… Ⅲ. ①Matlab 软件—应用—数学模型—高等学校—教材 Ⅳ. ①O141. 4-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 174056 号

责任编辑：相 凌 孙翠勤 / 责任校对：胡小洁
责任印制：闫 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2014 年 8 月第一次印刷 印张：22
字数：580 000

POD定价： 82.00元

# 前　　言

在高校开设数学建模课程，有助于培养学生的实践能力和创新能力，是造就出一批又一批适应高度信息化社会、具有创新能力的高素质人才的需要．

数学建模过程就是一个创造性的工作过程．人的创新能力首先是创造性思维和具备创新的思想方法．数学本身是一门理性思维科学，数学教学正是通过各个教学环节对学生进行严格的科学思维方法的训练，从而引发人的灵感思维，达到培养学生的创造性思维的能力．同时数学又是一门实用科学，它具有能直接用于生产和实践，解决经济管理等实际中提出的问题，推动经济社会的发展和科学技术的进步．

通过数学建模全过程的各个环节，学生们进行着创造性的思维活动，模拟了现代科学的研究过程．通过数学建模课程的教学和数学建模竞赛活动极大地开发了学生的创造性思维能力，培养学生在面对错综复杂的实际问题时，具有敏锐的观察力和洞察力，以及丰富的想象力．因此，数学建模课程在培养学生的创新能力方面有着其他课程不可替代的作用．

多年的数学建模教学实践告诉我们，进行数学建模教学，为学生提供一本内容丰富，既理论完整又实用的数学建模教材，使学生少走弯路尤为重要．这也是我们编写这本书的初衷．可以说，本书既是我们多年教学经验的总结，也是我们心血的结晶．本书的特点是尽量为学生提供常用的数学建模方法，并将相应的 MATLAB 程序提供给学生，使学生通过案例的学习，在自己动手构建数学模型的同时进行上机数学实验，从而为学生提供数学建模全过程的训练，以便能够达到举一反三，取得事半功倍的教学效果．

本书主编为李伯德、李振东，副主编为王国兴、智婕，参编人员有王媛媛、樊瑞宁、樊馨蔓．所有参编人员从组织选材、编程修改到审核校对等方面都做了大量的工作．

本书的出版得到了兰州商学院科研经费资助．本书是兰州商学院第一批人才培养模式创新实验项目“将数学建模思想融入大学数学教学　全面提升教育质量——培养学生创新精神与创新能力的探索与实践”的阶段性成果．兰州商学院的有关校领导、教务处、信息工程学院和科技处对本书的编写工作给予了许多指导和帮助，科学出版社对本书的出版给予了大力支持，编者在此表示衷心感谢！

本书在编写过程中，参考了大量的相关资料，选用了其中的模型，在此谨向著作者、编者、作者一并致以诚挚的谢意．

由于编者水平有限，对于书中的不妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

2014 年 3 月

# 目　录

# 第 1 章　数学建模概述

随着科学技术的飞速发展，数学在自然科学、社会科学、工程技术与现代化管理等方面获得了越来越广泛而深入的应用，**数学模型**这个词汇越来越多地出现在现代人的日常生活、工作和社会活动中，从而使人们逐渐认识到了建立数学模型的重要性．本章将对数学模型、数学建模、大学生数学建模竞赛作简要介绍.

## 1.1　数学模型的概念、分类及作用

### 1.1.1　数学模型的概念

模型化方法是人们解决问题的一种常用方法．所谓模型化方法，是指通过抽象、概括和一般化，把关心和研究的现实世界中的对象或问题转化为本质（关系或结构）同一的另一对象或问题加以解决的思维方法．通常把被研究的对象或问题称为原型，而把根据原型特有的内在规律，将原型所具有的本质属性的某一部分信息经过简化、浓缩、提炼而转化后的相对定型的模型化或理想化的对象或问题称为模型．一个原型，为了不同的目的可以有多种不同的模型．模型化思想强调事物的整体性和本质的同一性．因此所建立的模型必须能真正反映原型的整体结构、关系或某一侧面的本质特征和变化规律．模型化的主要作用在于使研究对象的处理具有典型性、精确性和可操作性．

数学解决科学技术和生产、生活实践中实际问题的重要方法就是模型化方法，即建立数学模型．

数学模型的具体定义是什么，尽管目前并没有统一的认识，但都认为是用数学描述实际问题．通俗地讲，所谓数学模型，是指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定目的，进行一些必要的抽象、简化和假设，借助数学语言，运用数学工具建立起来的一个数学关系或结构．具体来说，数学模型就是为一定的目的对原型所作的一种抽象模拟，它用数学公式、数学符号、程序及图表等刻画客观事物的本质属性与内在联系，是对现实世界的抽象、简化而又本质的数学描述．它源于现实，又高于现实，它或者能解释特定事物现象的现实性态；或者能预测特定对象的将来的性态；或者能提供处理特定对象的最优决策或控制等，最终达到解决实际问题的目的.

数学模型是今天科学技术工作者常常谈论的名词．其实，我们对于数学模型也并不陌生，如在力学中描述物体的力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律（ $F = ma$ ）就是一个典型的数学模型．还有很多，如计算机自动控制的炼钢过程的数学模型，根据气压、雨量、风速等建立的预测天气的数学模型，根据人口、交通、能源、污染等建立的城市规划的数学模型等.

### 1.1.2　数学模型的分类

数学模型按照不同的分类标准有着多种分类．因为分类问题不是本书的重点，故只列举

出几种常见的分类方法，以方便叙述和阅读．

按建立模型的数学方法分类：可分为几何模型、代数模型、图论模型、规划论模型、微分方程模型、最优控制模型、信息模型、随机模型、决策与对策模型及模拟模型等．

按模型的特征分类：可分为静态模型和动态模型、确定性模型和随机性模型、离散模型和连续模型、线性模型和非线性模型等.

按被研究对象的实际领域分类：可分为人口模型、环境模型、生态模型、资源模型、再生资源利用模型、交通模型、电气系统模型、通信系统模型、机电系统模型、传染病模型、污染模型、经济模型和社会模型等.

按人们对原型的认识过程分类：可分为描述性的数学模型和解释性的数学模型．描述性的模型是从特殊到一般，它是从分析具体客观事物及其状态开始，最终得到一个数学模型．客观事物之间量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的数学结构之中. 解释性的模型是由一般到特殊，它是从一般的公理系统出发，借助于数学客体，对公理系统给出合理解释的一种数学模型.

按人们对事物发展过程的了解程度分类：可分为所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型. 白箱模型主要指那些内部规律比较清楚的模型，如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题，这些问题大多早已经转化为比较成熟的数学问题，解决这些问题大多注重数学方法的改进、优化设计和控制等；灰箱模型主要指那些内部规律尚不十分清楚、在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题，如生态学、气象学、经济学等领域中的模型；黑箱模型指一些其内部规律还很少为人们所知的问题，如生命科学、社会科学等领域的问题.

### 1.1.3 数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简、化难为易，便于人们采用定量的方法，分析和解决实际问题.

回顾科学发展史，数学模型对很多科学概念的表达、科学规律的揭示以及科学体系的形成都起到了重要作用. 例如，物理学中的很多重要概念，如瞬时速度、瞬时电流、物体受力沿曲线做功等，又如经济学中的边际、弹性等概念很难用语言描述清楚，而用导数、积分就清楚而准确地表达了这些概念的意义.

当代计算机科学的发展和广泛应用，使得数学模型的方法如虎添翼，加速了数学向各个学科的渗透，产生了众多的边缘学科．例如，生物数学，它是在生物科学研究中，由其各分支运用数学模型和数学方法产生的生态数学、遗传数学、生理数学、仿生数学等内容构成的. 实际上，从家用电器到天气预报，从通信到广播电视、卫星遥感、航天技术，从新材料到生物工程，高科技的高精度、高速度、高安全、高质量、高效率等特点无一不是通过数学模型和数学方法，并借助计算机的计算、控制来实现的，就连计算机本身的产生和进步、计算机软件技术说到底实际上也是数学技术.

总之，数学模型在科学发展、科学预见、科学预测、科学管理、科学决策、社会生活、市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着越来越重要的作用.

## 1.2　数学建模的基本问题

### 1.2.1　数学建模

数学建模（mathematical modeling）是指对特定的客观对象建立数学模型的过程，是现实的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示，常常是形象化的或符号的表示，是构造刻画客观事物原型的数学模型并用以分析、研究和解决实际问题的一种科学方法，运用这种科学方法，建模者必须从实际问题出发，遵循“实践—认识—再实践”的辩证唯物主义认识规律，紧紧围绕着建模的目的，运用观察力、想象力和逻辑思维能力，对实际问题进行抽象、简化，反复探索，逐步完善，直到建立起一个能合理、有效地用于分析、研究和解决实际问题的数学模型．顾名思义，“modeling”一词在英文中有“塑造艺术”“立体感”的意思．而数学模型的建立带有一定的艺术特点，数学建模不仅是一种定量解决实际问题的科学方法，而且还是一种从无到有的创新活动过程，数学建模的成败与人的因素密切相关，人是数学建模的主体，事物原型是数学建模的客体，在数学建模的过程中，既要发挥人的聪明才智“改造”客体、解决实际问题，又要“改造”建模者自己，从中丰富智慧、增长才干．一个成功的数学模型总是主体的能动性与客体的规律性达到高度统一时的产物，因此人们常说，数学建模具有强烈的技艺性，建模者要像艺术家那样苦练内功，才能达到出神入化的境界.

### 1.2.2　数学建模的一般步骤

数学建模没有固定的模式，按照建模过程，其基本步骤如下所述.

1. 模型准备

数学建模是一项创新活动，它所面临的课题是人们在生产和科研活动中为了使认识和实践进一步发展必须解决的问题. 什么是问题？问题就是事物的矛盾，哪里有没解决的矛盾，哪里就有问题．因此发现课题的过程就是分析矛盾的过程．贯穿生产和科技中的根本矛盾是认识和实践的矛盾，分析这些矛盾，从中发现尚未解决的矛盾，就是找到了需要解决的实际问题，如果这些实际问题需要给出定量的分析和解答，那么就可以把这些实际问题确立为数学建模的课题，模型准备就是要了解问题的实际背景，明确建模的目的，掌握研究对象（问题）的各种信息，弄清研究对象的特征，情况明才能方法对.

2. 模型假设

作为课题的原型一般都是抽象的、复杂的，是质和量、现象和本质、偶然和必然的统一体. 这样的原型，如果不经过必要的、合理的简化，人们对其认识是困难的，也无法准确把握它的本质属性. 模型假设就是根据实际对象的特征和建模的目的，在掌握必要资料的基础上，对原型进行抽象、简化，把那些反映问题本质属性的形态、量及其关系抽象出来，简化掉那些非本质的因素，使之摆脱原型的具体复杂形态，形成对建模有用的信息资源和前提条件，并且用精确的语言作出假设，这是数学建模的关键一步.

对原型的抽象、简化不是无条件的，一定要善于辨别问题的主要方面和次要方面，果断地抓住主要因素，抛弃次要因素，尽量将问题均匀化、线性化，并且要按照假设的合理性原则进行，假设的合理性原则有以下四点.

(1) 目的性原则：从原型中抽象出与建模目的有关的因素，简化掉那些与建模目的无关的或关系不大的因素．

(2) 简明性原则：所给出的假设条件要简单、准确，有利于构造模型．

(3) 真实性原则：假设条件要符合情理，简化带来的误差应满足实际问题所能允许的误差范围.

(4) 全面性原则：在对事物原型本身作出假设的同时，还要给出原型所处的环境条件.

3. 模型建立

在模型假设的基础上，进一步分析模型假设的各条件. 首先区分哪些是常量，哪些是变量，哪些是已知量，哪些是未知量；然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系，选择恰当的数学工具来刻画各个量之间的数学关系，建立相应的数学结构——数学模型.

在构造模型时究竟采用什么数学工具，要根据问题的特征、建模的目的要求以及建模者的数学特长而定. 可以这样讲，数学的任一分支在构造模型时都可能用到，而同一实际问题也可以构造出不同的数学模型．一般地，在能够达到预期目的的前提下，所用的数学工具越简单越好.

在构造模型时究竟采用什么方法构造模型，要根据实际问题的性质和建模假设所给出的建模信息而定，以系统论中提出的机理分析法和系统辨识法来说，它们是构造数学模型的两种基本方法. 机理分析法是在对事物内在机理分析的基础上，利用模型假设所给出的建模信息或前提条件来构造模型；系统辨识法是对系统内在机理一无所知的情况下利用模型假设或实际对系统的测试数据所给出的事物系统的输入、输出信息来构造模型. 随着计算机科学的发展，计算机模拟有力地促进了数学建模的发展，也成为一种构造模型的基本方法．这些构造模型的方法各有其优点和缺点，在构造模型时，可以同时采用，取长补短，达到建模的目的.

4. 模型求解

构造数学模型之后，再根据已知条件和数据分析模型的特征和结构特点，设计或选择求解模型的数学方法和算法，这其中包括解方程、画图形、证明定理、逻辑运算以及稳定性讨论等，特别是编写计算机程序或运用与算法相适应的软件包、并借助计算机完成对模型的求解．在许多情况下往往需要纷繁的计算，有时还需要将系统运行情况用计算机模拟，因此熟悉数学软件甚至编程一般是不可或缺的.

5. 模型分析

根据建模的目的要求，对模型求解的数字结果，或进行变量之间的依赖关系分析，或进行稳定性分析，或进行系统参数的灵敏度分析，或进行误差分析等. 通过分析，如果不符合要求，则需修改或增减模型假设条件，重新建模，直到符合要求；通过分析，如果模型符合要求，还可以对模型进行评价、预测、优化等.

6. 模型检验

模型分析符合要求之后，还必须回到客观实际中去对模型进行检验，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，看它是否符合客观实际，若不符合，则需修改或增减假设条件、重新建模、循环往复、不断完善，直到获得满意结果. 目前计算机技术已为我们进行模型分析、模型检验提供了先进的手段，充分利用这一手段，可以节约大量的时间、人力和物力.

7. 模型应用

模型应用是数学建模的宗旨，也是对模型的最客观、最公正的检验. 因此，一个成功的数学模型，必须根据建模的目的，将其用于分析、研究和解决实际问题，充分发挥数学模型在生产和科研中的特殊作用.

以上介绍的数学建模基本步骤应该根据具体问题灵活掌握，或交叉进行，或平行进行，不拘一格地建立数学建模，有利于建模者发挥自己的聪明才干.

### 1.2.3　数学建模的基本方法

建立数学模型的方法没有固定的模式，但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征：模型的可靠性和模型的使用性．数学建模的基本方法可以分为三类：机理分析、统计分析、计算机仿真．

机理分析方法：根据对现实对象特性的认识和了解，分析其因果关系，找出反映内部机理的数学规律．所建立的模型常有明确的物理或现实意义，建立模型所采用的数学工具有初等数学方法、图解法、比例方法、代数方法、微分方程方法、组合方法、优化方法、线性规划方法、逻辑方法等．

统计分析方法：当我们对研究对象的机理不清楚，内部机理无法直接寻求的时候，可以将研究对象视为一个“黑箱”系统，通过测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型．建立模型所采用的数学工具有回归分析法、时间序列分析法等．

对于许多实际问题还常常将这两种方法结合起来使用，即用机理分析方法建立模型的结构，用统计分析方法来确定模型的参数，也是常用的建模方法．

计算机仿真方法：在计算机上模仿各种研究对象的运行过程，观察系统状态的变化，从而得到对系统基本性能的估计或认识．当系统中存在众多随机因素，难以构造机理性的数学模型或难以用数据分析建模时，可以采用仿真的方法得到系统的动态特性，进而掌握系统的规律，但一般不可能得到解析解．

本书所涉及的数学建模方法主要是机理分析与数据分析中所涵盖的方法．

数学建模中常用的软件工具有：MATLAB，Lingo，Lindo，Mathematical，Maple，SPSS 等，本书主要用 MATLAB 软件求解．

### 1.2.4　数学建模中常用的计算方法

（1）数据拟合、参数估计、插值等数据处理算法——经常会遇到大量数据需要用这些方法进行处理．

（2）数值分析算法——微分方程求解、方程组求解、矩阵运算、函数积分等．

（3）数学规划算法——数学模型中的许多优化问题，如线性规划、整数规划、非线性规划等．

（4）蒙特卡罗算法——该算法又称随机模拟算法，是通过计算机仿真来解决问题的方法，同时可以通过模拟来检验模型的正确性．

（5）离散化方法——许多实际问题的数据可能是连续的，而计算机只能接受离散的数据，因此将其离散化、用差分代替微分、用求和代替积分是常用的手段．

（6）最优化理论的三大经典算法——模拟退火算法、遗传算法、神经网络，这类算法常

常用来解决一些较困难的最优化问题．

(7) 图论算法——这类算法有多种，如最短路、网络流、二分图等，涉及图论的问题可以用这些方法解决．

(8) 数字图像处理——有些问题与图形有关，通常用MATLAB进行处理．

其他算法还有：分支定界算法、网格算法、穷举算法、Floyd算法、概率算法、搜索算法、贪婪算法等．

### 1.2.5 大学生数学建模竞赛

教育必须反映社会的需要，数学建模进入大学课堂，既顺应时代发展的潮流，也符合教育改革的要求．从某种意义上讲，数学建模是能力与知识的综合应用．

正是由于认识到了培养应用性、研究型科技人才的重要性，而传统的数学竞赛不能担当这个任务，从1983年起，美国就有一些有识之士探讨组织一项应用数学方面的竞赛的可能性．经过论证，1985年举办了第一届美国大学生数学建模竞赛，从1985年起每年一届．竞赛以3名大学生组成一个队，专业不限，各参赛队从两个竞赛题目中任选一道题，在三天时间内，团结合作、奋力攻关，完成一篇数学建模全过程的论文．竞赛题目一般来源于工程技术和管理科学等方面经过适当简化加工的实际问题，题目具有较大的灵活性供参赛者发挥其创造能力．

这项赛事自诞生起就引起了越来越多的国家关注，1989年在几位教师的组织和推动下，我国几所大学的学生开始参加美国的大学生数学建模竞赛．经过两三年的参与，师生们都认为这项赛事有利于学生的全面发展，由于数学建模课程的开设及数学建模竞赛在培养学生能力方面的重要作用，我国于1992年由中国工业与应用数学学会（CSIAM）举办了首届全国大学生数学建模竞赛（China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling，CUMCM），1994年国家教委正式将其列为全国大学生四大竞赛之一，每年的9月上旬举行，旨在培养大学生的创新意识和团队精神．

CUMCM经过二十多年迅速、健康的发展，已成为我国高校规模最大的一项大学生科技创新活动，它已经在国内外产生了很大的影响，树立起了自己的品牌，这项活动必将在培养创新人才、提高学生素质、推动教育教学改革中取得更大的成绩．