● 普通高等学校省级规划教材 ●

Probability Theory and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

（第2版）

祝东进　主编

中国科学技术大学出版社

普通高等学校省级规划教材

Probability Theory and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

（第2版）

主　编　祝东进
副主编　郭明乐　黄旭东

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

概率论与数理统计是研究随机现象的一个数学分支，是与现实世界联系最为密切的学科之一. 在多年教学的基础上，我们编写了这本教材. 全书分 8 章，第 1 章到第 4 章为概率论部分，第 5 章到第 8 章为数理统计部分. 本书通过例题细致地阐述了概率论与数理统计中的主要概念和方法，对定理和结论大多给出了直观而且严格的证明，每章后有大量的应用题，有助于培养学生分析问题与解决问题的能力.

本书适合作高等学校非数学专业的本科生教材，也可供从事该学科研究的有关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/祝东进主编. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-312-03837-2

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 祝…　Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 192224 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷　合肥学苑印务有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　710 mm×960 mm　1/16

印张　11.75

字数　236 千

版次　2009 年 8 月第 1 版　2015 年 9 月第 2 版

印次　2015 年 9 月第 5 次印刷

定价　22.00 元

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象的一个数学分支,它是与现实世界联系最密切、应用最广泛的学科之一.随着科学技术的进步和发展,研究随机现象的数学理论和方法——概率论与数理统计方法已渗透到自然科学和社会科学的各个领域.概率论与数理统计学科同其他学科结合形成了许多边缘性学科,如金融统计学、生物统计学、医学统计学、数量经济学、保险精算学、统计物理学、统计化学等等.概率论与数理统计已成为人们从事生产劳动、科学研究和社会活动的一个基本工具.

为非数学专业的学生提供一本适宜的概率论与数理统计教材是我们的夙愿.在多年从事该课程教学的基础上,我们编写了这本教材.本书第 1 版自 2009 年出版以来已经 6 年,使用此书的教师希望结合当前本科院校生源变化及人才培养目标优化对本书进行修订完善,并对本书修改提出了许多宝贵意见,在此对他们表示由衷的感谢.本书第 2 版的内容与第 1 版基本相同,主要对第 1 版内容作了少量增删,对全书习题作了修订,删去了一些难度较大的题目,突出基本训练的题目,以期更好地适应教学需要.

全书共分 8 章,第 1 章到第 4 章为概率论部分,其内容有概率论的基本概念、随机变量及其概率分布、数字特征、大数定律与中心极限定理等;第 5 章到第 8 章为数理统计部分,其内容有统计量及其概率分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析等.本书体现了编者在以下几个方面的努力:

1. 通过例题细致地阐述了概率论与数理统计中的主要概念和方法及其产生的背景和思路,力求运用简洁的语言描述随机现象及其内在的统计规律性.

2. 对书中的定理和结论,大多给出简化、直观且严格的证明.对一些类似的结论给出了推导与证明的思路.有些结论用表格列出,便于对照、理解与掌握.

3. 按照国家标准,采用规范的概率统计用语.注重提高学生运用概率统计的

理论与方法去解决实际问题的能力.书中例题与习题丰富,包含有大量的应用题,有助于培养学生分析问题与解决问题的能力.

本书第 1 章和第 4 章由祝东进编撰,第 2 章由郭明乐编撰,第 3 章由黄旭东编撰,第 5 章由徐林编撰,第 6 章和第 7 章由刘晓编撰,第 8 章由张金洪编撰.本书框架结构及最终定稿由祝东进教授完成.在编写的过程中,我们参阅了国内外的许多文献,谨表诚挚谢意.

由于编者水平所限,书中的错误和缺陷在所难免,恳请同行、读者提出宝贵意见,以利于我们及时补正提高.

编　者

2015 年 4 月

目　　次

第1章　随机事件和概率

概率论是研究随机现象内部蕴含的数量规律性的一门数学学科.本章重点介绍概率论的两个最基本的概念——事件与概率,接着讨论古典概型和几何概型及其概率计算,然后介绍条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式,最后讨论事件的独立性.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验与样本空间

在自然界和人类社会生活中存在着两种现象,一类是在一定条件下必然会发生的现象,称为确定性现象.如:

(1) 在标准大气压下,水加热到100 ℃时必然会沸腾.

(2) 早晨,太阳必然从东方升起.

(3) 苹果,不抓住必然往下掉.

(4) 边长为 a,b 的矩形,其面积必为 $a \cdot b$.

……

另一类是在一定条件下具有多种可能的结果,但事先又不能预知确切的结果,称作随机现象.如:

(1) 抛掷一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,并且在抛掷之前无法预知抛掷的结果.

(2) 足球比赛,其结果可能是胜、平、负,但在比赛之前无法预知其结果.

(3) 投掷一颗骰子,其结果有6种,即可能出现1,2,3,4,5,6点,但每次投掷之前是无法预知投掷结果的.

(4) 股市的变化.

(5) 检查流水生产线上的一件产品,是合格品还是不合格品?

……

对于某些随机现象，虽然对个别试验来说，无法预言其结果，但在相同的条件下，进行大量的重复试验或观察时，却又呈现出某些规律性.如人们重复抛掷一枚质地均匀硬币时，虽每次抛之前并不能预知它是出现正面还是反面，但出现正面的频率总是稳定在0.5左右，人们把随机现象在大量重复试验时所表现的规律性称为随机现象的统计规律性.

为了研究随机现象，就要进行实验或对随机现象进行观察，这种实验或观察的过程称为试验.如果一个试验满足下列条件：

(1) 试验可以在同样条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果在试验前可以明确知道；

(3) 每次试验将要出现的结果是不确定的，

则称此试验为**随机试验**.简称随机试验为**试验**.

下面我们给出随机试验的一些例子.

E_1:抛掷一枚质地均匀的硬币，观察正面和反面出现的情况；

E_2:掷一颗质地均匀的骰子，观察其出现的点数；

E_3:记录在某一时间段某城市发生火灾的次数；

E_4:向一目标射击炮弹，观测弹着点的位置.

一个试验将要出现的结果是不确定的，但其所有可能结果是明确的.由随机试验的一切可能的结果组成的一个集合称为试验的**样本空间**，记为 Ω；试验的每一个可能的结果(或样本空间的元素) 称为一个**样本点**，记为 ω.

对于一个具体的试验，我们根据试验的条件和结果的含义来确定其样本空间，必要时约定一些记号以便把样本空间简洁地表示出来.

例 1.1 试写出试验 $E_1 \sim E_4$ 的样本空间.

(1) 掷一枚硬币，在一次试验中，H 表示“正面朝上”，T 表示“反面朝上”，这个试验共有两个样本点，故样本空间为

$$\Omega_1 = \{H, T\}.$$

(2) 掷一颗骰子，用 i 表示标有数字 i 的面朝上，则在一次试验中共有六个样本点，故样本空间为

$$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

(3) 记录在某一时间段某城市发生火灾的次数，一个样本点就是该城市在一段时间内发生火灾的次数，故样本空间为

$$\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots\}.$$

(4) 向一目标射击炮弹，观测弹着点的位置，一次射击为一次试验.选定坐标系，则炮弹的一个弹着点(x, y) 就是一个样本点，故样本空间为

$$\Omega_4 = \{(x,y): -\infty < x < +\infty, -\infty < y + \infty\}.$$

从上面的例子可以看出，样本空间可以是有限或无限的点集，也可以是抽象的集合. 从随机试验到样本空间这一数学抽象，使我们可以用集合论的语言来表示概率论的概念.

1.1.2　随机事件

下面我们先看一个例子.

例 1.2　从包含两件次品(记作 a_1, a_2)和三件正品(记作 b_1, b_2, b_3)的五件产品中，任取两件产品，则样本空间为

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1), \\ (a_2,b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_2,b_3),(b_1,b_3) \end{matrix} \right\}.$$

记

$$A_0 = \text{“没有抽到次品”} = \{(b_1,b_2),(b_2,b_3),(b_1,b_3)\},$$

$$A_1 = \text{“抽到一件次品”} = \left\{ \begin{matrix} (a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3), \\ (a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3) \end{matrix} \right\},$$

$$A_2 = \text{“抽到两件次品”} = \{(a_1,a_2)\},$$

则由以上可知它们都是样本空间 Ω 的子集.

一般地，我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为**随机事件**，简称**事件**. 常用 A，B，C，A_i，B_j 等表示随机事件. 在每次试验中随机事件 A 发生当且仅当随机事件 A 中有某一个样本点出现. 特别地，当一个事件仅包含 Ω 的一个样本点时，称该事件为**基本事件**.

作为极端情况，我们给出两个特殊事件. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，是 Ω 自身的子集，每次试验它总是发生的，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它是 Ω 的子集，每次试验总是不发生，称为**不可能事件**.

1.1.3　事件的运算

将随机事件表示成由样本点组成的集合，就可以将事件间的关系和运算归结为集合之间的关系和运算，这不仅对研究事件的关系和运算是方便的，而且对研究随机事件发生的可能性大小的数量指标 —— 概率的运算也是非常有益的.

1. 事件间的关系

在随机试验中，一般有很多随机事件，为了通过简单事件来研究掌握复杂的事件，我们需要了解事件之间的关系. 下面就来分析这些关系：

(1) 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A.$$

按照前面的说明，$A \subset B$ 意味着，若 $\omega \in A$，则 $\omega \in B$. 故 A 是 B 的子集，也即 A 是 B 的子事件，易知对任何一事件 A，有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega.$$

(2) 事件间的相等(或等价)

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等(或等价)，记作 $A = B$. $A = B$ 表示 A 和 B 是同一个事件.

(3) 事件的并(或和)

由事件 A 与 B 至少有一个发生构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的并(或和)，记作 $A \cup B$.

(4) 事件的交(或积)

由事件 A 与 B 同时发生构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的交(或积)，记作 $A \cap B$ 或 AB.

(5) 事件的差

由事件 A 发生而事件 B 不发生构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A \backslash B$. 据定义，$A \backslash B$ 发生当且仅当 A 发生，但 B 不发生. 如果 $A \supset B$，$A \backslash B$ 记作 $A - B$.

(6) 互不相容(或互斥)事件

如果事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容(或互斥)事件. 互斥的两个事件 A 与 B 的并记作 $A + B$.

(7) 对立事件(或逆事件)

事件 A 不发生这一事件称为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$. 显然 $\overline{A}$ 发生当且仅当 A 不发生. 由事件 A 得到事件 $\overline{A}$ 是一种运算，称作取逆运算. 显然有

$$A\overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = \Omega, \quad \overline{\overline{A}} = A, \quad A \backslash B = A\overline{B}.$$

由上述关系式也知道，对立事件必为互不相容事件；互不相容事件未必为对立事件.

例 1.3 记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数. 则样本空间 $\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$，设 A 表示“接到的呼唤不超过 50 次”事件，B 表示“接到的呼唤在 40 次到 60 次之间”事件，C 表示“接到的呼唤超过 50 次”事件，D 表示“接到的呼唤超过 100 次”事件，则

$$A = \{0,1,\cdots,50\}, \quad B = \{40,41,\cdots,60\},$$
$$C = \{51,52,\cdots\}, \quad D = \{101,102,\cdots\};$$

$A \cup B = \{0,1,\cdots,60\}$，它表示“接到呼唤不超过 60 次”事件；

$A \cap B = \{40,41,\cdots,50\}$，它表示“接到呼唤在 40 次到 50 次之间”事件；

$A \backslash B = \{0,1,\cdots,39\}$,它表示“接到呼唤次数不超过 39 次”事件.
另外,显见 A 与 C 对立,即 $A = \overline{C}$;A 与 D 互斥,但不是对立事件.

事件的并和交可以推广到任意有限个或可数个事件的情形.设 $\{A_i\}$ 为一列事件,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示“$A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”事件,称为 $A_1,\cdots,A_n$ 的并,当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥时,即

$$A_iA_j = \varnothing \quad (i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n),$$

通常记 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.

类似地,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots$ 至少有一个发生”事件;$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示“$A_1,\cdots,A_n$ 同时发生”事件;$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“$A_1,A_2,\cdots$ 同时发生”事件.

(8) 完备事件组

设 $A_1,A_2,\cdots$ 是有限或可数个事件,如果它们满足:

(a) $A_iA_j = \varnothing(i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots)$;

(b) $\sum\limits_{i} A_i = \Omega$,

则称 $A_1,A_2,\cdots$ 是一个完备事件组.

显然 A 与它的对立事件 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组.

事件之间的关系及运算还可用图形来表示.用平面上矩形来表示样本空间 Ω.图形区域 A,B 分别表示事件 A,B.图中阴影部分分别表示运算得到的事件,见图 1.1.

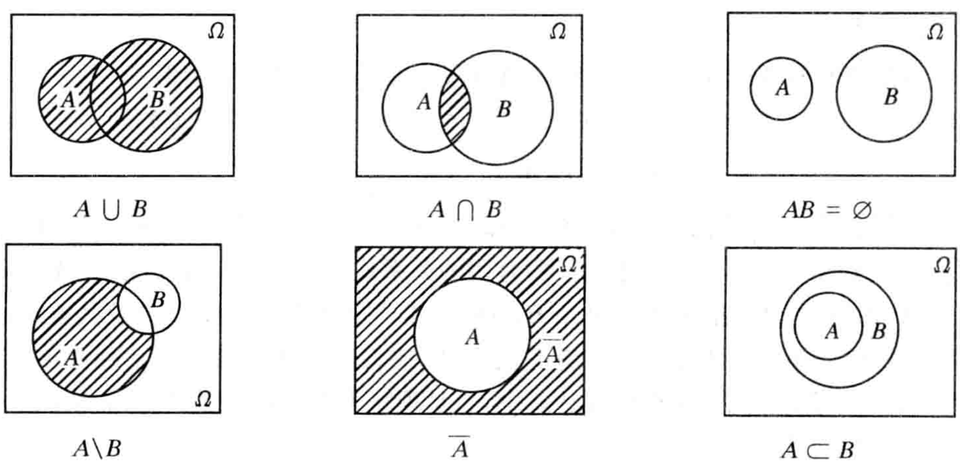

图 1.1

为了便于读者比较概率论中事件的关系和运算与集合的关系及运算,我们将

两种等价的表述形式形成表1.1.

表 1.1

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	空间	样本空间,必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	点(元素)	样本点
$A \subset \Omega$	子集	事件
$A \subset B$	集合 A 含于集合 B	A 是 B 的子事件
$A = B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$AB = \varnothing$	集合 A 与集合 B 不相交	事件 A 与事件 B 互斥
$\overline{A}$	A 的余集	A 的对立事件
$A \cup B$	A 与 B 的并集	A 与 B 至少有一个发生
$A \cap B$	A 与 B 的交集	A 与 B 同时发生
$A \backslash B$	A 与 B 的差集	A 发生但 B 不发生

2. 随机事件的运算律

事件的运算具有下列性质:

(1) **交换律**　$A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) **结合律**　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

(3) **分配律**　$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC), (AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) **德莫根(De Morgan)公式(对偶公式)**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

(5) **自反律**　$\overline{\overline{A}} = A$.

分配律和对偶公式可以推广到任意有限个或可数个事件的情形:

$$(\bigcup_i A_i)C = \bigcup_i (A_iC), \quad (\bigcap_i A_i) \cup C = \bigcap_i (A_i \cup C),$$

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A}_i, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A}_i.$$

对偶公式联系并、交、取逆三种运算,它在概率论的计算中十分有用.由事件之间的关系及运算的定义可推出一些有用的关系式,如由 $AB = \varnothing$ 可推出 $A \subset \overline{B}$, $B \subset \overline{A}$;由 $A \subset B$ 可推出 $A \cup B = B, AB = A$.另外利用事件的运算及其关系,还可以用给定的事件来表达另一些有关的事件,或将给定的事件按照某种要求来表示.以后,在有交、并、差运算的表达式中,总是理解为先进行交运算,然后依次从左向右进行并、差运算.

例 1.4　设 A,B,C 为三个事件,试用 A,B,C 表达下列事件:(1) 只有 A 发生;(2) 恰有一个事件发生;(3) 恰有两个事件发生;(4) 至少有两个事件发生.

解　(1)“只有 A 发生”=“A 发生且 B 与 C 均不发生”$= A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2)“恰好有一个发生”=“只有 A 发生或只有 B 发生或只有 C 发生”$= A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$；

(3)“恰有两个发生”=“恰好 A 与 B 同时发生或 B 与 C 同时发生或 C 与 A 同时发生”$= AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$；

(4)“至少有两个发生”=“A 与 B 同时发生或 B 与 C 同时发生或 C 与 A 同时发生”=“恰好有两个发生或三个都发生”$= AB \cup BC \cup CA = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$.

上例中(4)有两种不同的表达式，这两种表达式都是正确的，不过意义不同，不难看出，第二个表达式中相关的四个事件是两两互斥的；而第一个表达式中相并的每个事件都包含事件 ABC. 今后，在计算几个事件并的概率中，常常要将事件的并表成互斥事件的和，以便利用概率的性质.

1.2　随机事件的频率与概率

就随机现象而言，仅仅知道可能发生哪些事件是不够的，更重要的是对事件发生的可能性做出定量的描述，这就涉及一个概念 —— 事件的概率. 直观地说，一个事件的概率就是刻画该事件发生的可能性大小的一个数值. 因此，凭直觉我们可以说，在掷一枚硬币的试验中“出现正面”的概率为 0.5，而在掷一颗骰子的试验中“出现‘1’点”的概率为 1/6. 但是，对一般的事件而言，单凭直觉来确定其发生的概率显然是行不通的，必须从客观的本质特征上寻求概率的界定方法. 那么，概率有客观性吗?数学上如何定义呢?下面，我们将逐步明确这些问题.

1.2.1　随机事件的频率

对一个事件 A 来说，无论它发生的可能性是大还是小，在一次试验或观察中都可能发生或者不发生. 因此，根据一次试验或观察的结果并不能确定任何一个事件发生的概率(事件$\varnothing$和 Ω 除外). 不过，在大量的重复试验或观察中，事件发生的可能性却可呈现出一定的统计规律，并且随着试验或观察次数的增加，这种规律会表现得愈加明显.

显然，在重复试验或观察中，要反映一个事件发生的可能性大小，最直观的一个量就是频率，其定义是：

定义 1.1　设 A 是试验 E 中的一个事件，若将 E 重复进行 n 次，其中 A 发生了 n_A 次，则称

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

为该 n 次试验中 A 发生的频率.

我们知道,频率 $f_n(A)$ 越大(小),事件 A 发生的可能性就越大(小),即 A 的概率就越大(小).可见,频率是概率的一个很好反映.但是,频率却不能作为概率,因为概率应当是一个确定的量,不应像频率那样随重复试验和重复次数的变化而变化.不过,即使这样,频率还是可以作为概率的一个估计,而且是一个有客观依据的估计,这个依据就是所谓的频率稳定性:当试验或观察次数 n 较大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会在某个确定的常数 p 附近摆动,并渐趋稳定.

历史上有不少人做过抛硬币试验,其结果见表1.2,从表中的数据可以看出:当试验次数较大时,出现正面的频率 $f_n(A)$ 总是在0.5附近摆动.

表 1.2

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

在同一个 n 次试验中,容易证明频率具有以下性质:

(1) $f_n(\Omega) = 1$;

(2) 对任意事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(3) 若 $AB = \varnothing$,则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.2 设有随机试验 E,若当试验的次数 n 充分大时,事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 稳定在某数 p 附近摆动,则称数 p 为事件的**概率**,记为:$P(A) = p$.

概率的统计定义的重要性不在于它提供了一种定义概率的方法 —— 它实际上没有提供这种方法,因为你永远不可能根据这个定义确切地定出任何一个事件的概率.其重要性在于两点:一是它提供了一种估计概率的方法,这种应用很多.例如在工业生产中,依据抽取的一些产品的检验去估计产品的合格率;在医学上依据积累的资料去估计某种疾病的死亡率等.二是它提供了一种检验理论正确与否的准则.设想根据一定的理论、假定算出了某事件的概率为 p,这理论或假定是否与