

微分方程数值解

——有限差分理论方法与数值计算

张文生 编著



科学出版社

微分方程数值解

——有限差分理论方法与数值计算

张文生 编著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书阐述微分方程有限差分数值求解方法. 首先介绍常微分方程初边值问题的求解方法, 以及收敛性、相容性和稳定性分析; 其次介绍偏微分方程(包括椭圆型方程、抛物型方程和双曲型方程)的有限差分求解方法和一些重要的差分格式, 以及相应的理论分析; 最后介绍有限差分方法在波动方程波场模拟中的应用; 在附录中给出了一些常用公式. 本书结合教学和科研的特点, 不但具有理论的严谨性, 还有较多的例题和数值算例, 以促进理解和应用.

本书可作为计算数学、应用数学、科学与工程计算等理工科相关专业的研究生和高年级学生的教材或参考书, 也可供从事相关研究工作的教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解: 有限差分理论与数值计算/张文生编著. —北京: 科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-044746-3

I. ①微… II. ①张… III. ①微分方程解法-数值计算 IV. ①O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 124345 号

责任编辑: 李静科 赵彦超 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2015 年 8 月第一次印刷 印张: 26 1/4

字数: 514 000

定价: 148.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

自然科学和工程技术科学中的许多现象、规律和问题, 都可以通过常微分方程和偏微分方程来描述. 由于这些微分方程的解析解难以求得, 现在更多地是用计算机求解这些微分方程的数值近似解. 有限差分法是数值求解微分方程的重要方法之一, 由于其程序设计相对简易及计算效率高, 该方法在自然科学和工程技术科学的各个领域中得到广泛的应用. 本书深刻阐述微分方程有限差分的数值求解方法, 特别是相应的稳定性分析方法. 本书共分 7 章.

第 1 章介绍常微分方程初值问题的数值求解方法, 包括单步法、多步法和预测校正法, 给出各种重要计算公式及一些重要推导, 阐述稳定性分析方法; 最后简要介绍 Hamilton 系统的辛几何算法, 与传统方法相比, 辛算法能保持 Hamilton 系统的辛结构, 特别适于求解长时间模拟的问题.

第 2 章介绍常微分方程两点边值问题的试射法, 该方法最后归结为一个常微分方程组初值问题的求解, 从而可以用第 1 章求初值问题的方法来求解.

第 3 章介绍椭圆型方程的差分解法, 包括两点边值问题和 Laplace 方程的直接差分方法和有限体积方法, 以及收敛性分析.

第 4 章介绍偏微分方程有限差分格式的相容性、收敛性和稳定性分析理论, 重点阐述 Fourier 级数分析法、von Neumann 多项式分析法和矩阵分析法, 对能量分析方法也作了介绍.

第 5 章给出抛物型方程主要是热传导方程的一些重要差分格式.

第 6 章介绍双曲型方程的有限差分方法, 包括线性对流方程的典型差分格式的构造方法、偏微分方程和差分格式的频散和耗散分析, 以及双曲型方程组的差分格式, 最后介绍一维、二维、三维波动方程的差分格式和稳定性分析.

第 7 章从应用的角度, 介绍有限差分方法在波动方程波场模拟计算中的应用, 包括声波方程的 ADI 格式和 LOD 格式、弹性波方程的有限体积格式和交错网格格式、多孔弹性波方程的交错网格格式等.

本书是作者在长期教学和科研的基础上完成的, 书中部分内容曾多次给研究生讲授过. 为便于学习和教学, 附录 1 给出规则和不规则网格上的有限差分的系数, 附录 2 给出一些常用公式和定理. 在本书中我们均假定问题的解所需要的光滑性, 对于解有间断情况的差分格式的构造, 如流体力学中双曲守恒型方程(组)之弱解的差分格式的构造. 可参考其他相关文献, 如文献 [59]、[85]. 此外, 对偏微分方程的其他数值方法如有限元方法等本书也不讨论, 可参考其他有关文献, 如文献 [21],

[70] 等。

最后,衷心感谢同事和专家院士的支持、帮助和鼓励,感谢作者的研究生蒋将军、庄源和张丽娜等在部分计算和校对上所做的辛勤工作,感谢“科学与工程计算国家重点实验室”的大力支持,感谢国家自然科学基金项目(编号:11471328)、973项目(编号:2010CB731500)及精品课程项目经费的支持,也感谢直接或间接所参考文献的作者。

由于作者水平和时间有限,书中难免存在不妥之处,恳请读者指正。

作 者

2014年12月于北京

目 录

前言

第 1 章 常微分方程初值问题的数值解法	1
1.1 解的适定性	1
1.1.1 解的唯一性	1
1.1.2 解的稳定性	3
1.2 Euler 方法	5
1.2.1 Euler 公式	5
1.2.2 收敛性分析	7
1.2.3 渐近稳定性分析	10
1.3 改进的 Euler 方法	10
1.3.1 梯形公式	10
1.3.2 误差分析	12
1.4 Runge-Kutta 方法	13
1.4.1 显式 Runge-Kutta 公式	13
1.4.2 误差分析	23
1.4.3 隐式 Runge-Kutta 公式	27
1.5 线性多步法	30
1.6 稳定性分析	34
1.7 一般线性多步法	37
1.7.1 待定系数法	37
1.7.2 数值积分法	40
1.8 Adams 线性多步法	41
1.8.1 Adams-Bashforth 公式	41
1.8.2 Adams-Moulton 公式	43
1.9 其他线性多步法	45
1.9.1 Nyström 方法	46
1.9.2 Milne-Simpson 公式	47
1.10 Richardson 外推	47
1.11 线性差分方程	51
1.11.1 非常系数线性差分方程	52

1.11.2	常系数线性差分方程	56
1.12	多步法的收敛性和稳定性	61
1.12.1	稳定性理论	62
1.12.2	强稳定性和弱稳定性	69
1.12.3	相对稳定性与绝对稳定性	69
1.12.4	Dahlquist 稳定性理论	73
1.13	预测-校正算法	75
1.13.1	局部截断误差	76
1.13.2	修正算法	79
1.14	刚性方程组的解法	82
1.15	Hamilton 系统的辛几何算法	89
1.15.1	辛几何与辛代数的基本概念	89
1.15.2	Hamilton 系统的辛格式	92
	练习题	96
第 2 章	两点边值问题的试射法	101
2.1	边值问题解的存在性和唯一性	101
2.2	二阶常微分方程的试射法	103
2.3	二阶非线性常微分方程的试射法	104
	练习题	109
第 3 章	椭圆型方程的差分解法	111
3.1	二阶线性两点边值问题的差分格式	111
3.1.1	差分近似	112
3.1.2	有限体积法	114
3.2	非线性两点边值问题的差分格式	117
3.3	Laplace 方程的五点差分格式	118
3.4	有限体积法	127
3.5	边界条件的处理	128
3.5.1	Dirichlet 边界条件	128
3.5.2	Neumann 边界条件	129
3.5.3	Robbins 边界条件	132
3.6	轴对称 Poisson 方程的差分格式	135
3.7	扩散对流方程	139
3.8	Poisson 方程五点差分格式的收敛性分析	140
3.9	能量分析法	143
	练习题	147

第 4 章 收敛性、相容性和稳定性	150
4.1 收敛性	150
4.2 相容性	152
4.3 稳定性	156
4.4 Lax 定理	159
4.5 Fourier 级数法稳定性分析	161
4.5.1 初值问题	161
4.5.2 初边值问题	169
4.5.3 von Neumann 条件的充分性	173
4.6 von Neumann 多项式分析	177
4.7 Hurwitz 判别法	187
4.8 矩阵法稳定性分析	195
4.9 能量稳定性分析	203
4.9.1 双曲型问题	203
4.9.2 热传导问题	207
4.9.3 非线性初值问题	209
练习题	213
第 5 章 抛物型方程的差分解法	216
5.1 一维常系数扩散方程	216
5.1.1 向前和向后差分格式	216
5.1.2 加权隐式格式	217
5.1.3 三层显格式	218
5.1.4 二层隐式格式	222
5.1.5 三层隐格式	223
5.2 变系数抛物型方程	224
5.3 非线性抛物型方程	226
5.3.1 三层显格式	226
5.3.2 线性化差分格式	227
5.3.3 CN 格式和预测校正格式	228
5.4 二维热传导方程	230
5.4.1 加权差分格式	230
5.4.2 Du Fort-Frankel 格式	231
5.4.3 交替方向隐 (ADI) 格式	231
5.4.4 局部一维 (LOD) 法	236
5.5 三维热传导方程	237

5.6	高维热传导方程	241
5.7	算子形式的热传导方程	243
5.7.1	CN 格式	243
5.7.2	CN 分裂格式	244
	练习题	247
第 6 章	双曲型方程的差分解法	250
6.1	线性对流方程	250
6.1.1	迎风格式	250
6.1.2	Lax-Friedrichs 格式	252
6.1.3	Lax-Wendroff 格式	253
6.1.4	MacCormack 格式	254
6.1.5	Wendroff 隐式格式	255
6.1.6	Crank-Nicolson 格式	256
6.2	特征线与差分格式	257
6.2.1	特征线与 CFL 条件	257
6.2.2	用特征线方法构造差分格式	260
6.3	偏微分方程的相位速度和群速度	262
6.3.1	相位速度	262
6.3.2	群速度	263
6.4	数值相位速度和群速度	264
6.5	修正的偏微分方程	269
6.6	一阶双曲型方程组的特征形式	277
6.7	一阶双曲型方程组的差分格式	280
6.8	二维线性对流方程的差分格式	284
6.8.1	典型差分格式	284
6.8.2	ADI 格式	287
6.9	一维声波方程	289
6.9.1	特征线	289
6.9.2	显式差分格式	291
6.9.3	隐式差分格式	293
6.9.4	方程组形式的差分格式	295
6.10	二维声波方程	298
6.10.1	显式格式	298
6.10.2	隐式格式	300
6.11	三维声波方程	301

6.11.1 显式格式	301
6.11.2 隐式格式	304
练习题	305
第 7 章 波动方程有限差分波场模拟	308
7.1 ADI 格式	308
7.1.1 二维声波方程	309
7.1.2 三维声波方程	315
7.2 LOD 格式	319
7.2.1 二维声波方程	319
7.2.2 三维声波方程	322
7.2.3 高维声波方程	324
7.3 高精度 LOD 格式	325
7.3.1 稳定性分析	327
7.3.2 初边值条件	329
7.3.3 数值计算	330
7.4 高阶紧致隐式格式	334
7.5 二维弹性波方程的交错网格法	338
7.6 二维弹性波方程的有限体积法	343
7.6.1 公式推导	343
7.6.2 数值计算	346
7.7 三维弹性波方程的交错网格法	348
7.8 多孔含流体弹性介质方程的交错网格法	355
7.8.1 弹性多孔介质方程 —— Biot 方程	355
7.8.2 基于速度压力方程的交错网格法	358
7.8.3 二维数值计算	363
7.8.4 三维数值计算	364
7.9 三维弹性波方程的能量稳定性分析	373
7.10 三维电磁场方程	381
附录 1 差分系数的计算	390
附录 2 常用公式和定理	396
参考文献	401
索引	406

第 1 章 常微分方程初值问题的数值解法

1.1 解的适定性

常微分方程是描述物理模型的重要工具之一,本章介绍求解常微分方程初边值问题的数值方法.考虑如下一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中函数 $f(x, y)$ 已知,且在区域 $(x, y) \in D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ 中连续.对某些常微分方程,可以求得精确解.例如,

$$y' = \lambda y + g(x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.1.2)$$

是一个一阶线性微分方程, $g(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上连续.满足条件 $y(x_0) = y_0$ 的精确解为

$$y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)} + \int_{x_0}^x e^{\lambda(x-t)} g(t) dt, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.1.3)$$

又如,非线性常微分方程

$$y' = -y^2 \quad (1.1.4)$$

的通解为

$$y(x) = \frac{1}{x+c}, \quad (1.1.5)$$

其中 c 是任意常数.注意 $|y(-c)| = \infty$,因此 $f(x, y) = -y^2$ 的全局光滑性并不保证解的全局光滑性.在数值求解之前,本节先论式 (1.1.1) 的适定性,即解的存在性、唯一性和稳定性.假定所讨论问题的解总存在.

1.1.1 解的唯一性

定理 1.1.1 若 $f(x, y)$ 是 x 和 y 的连续函数,且关于 y 满足 Lipschitz 条件,即 $\exists L > 0$,使得

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (1.1.6)$$

对 D 中所有的 (x, y_1) 和 (x, y_2) 均成立,则式 (1.1.1) 有唯一解.

证明 将式 (1.1.1) 改写成等价的积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (1.1.7)$$

为证明式 (1.1.7) 有唯一解, 在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上定义一个函数序列 $y_n(x)$

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt. \quad (1.1.8)$$

常数 α 的选择要求满足

$$\alpha L < 1. \quad (1.1.9)$$

若 α 选择得充分小, 则所有 $y_n(x)$ 仍在 D 中, 且在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上一致收敛到函数 $y(x)$. 在式 (1.1.8) 中取极限, 得

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, \quad (1.1.10)$$

此即式 (1.1.1) 的解.

下面分析收敛速度. 由式 (1.1.8) 和式 (1.1.10) 得

$$\left| y(x) - y_{n+1}(x) \right| \leq \int_{x_0}^x \left| f(t, y(t)) - f(t, y_n(t)) \right| dt \quad (1.1.11)$$

$$\leq L \int_{x_0}^x \left| y(t) - y_n(t) \right| dt \quad (1.1.12)$$

$$\leq \alpha L \|y - y_n\|_{\infty}, \quad (1.1.13)$$

因右端项与 x 无关, 左端在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上取极大值, 故有

$$\|y - y_{n+1}\|_{\infty} \leq \alpha L \|y - y_n\|_{\infty}, \quad n \geq 0. \quad (1.1.14)$$

再由式 (1.1.9) 知, 每次迭代误差减小 αL 倍, 因此是线性收敛的.

最后证明解 $y(x)$ 的唯一性. 设 $\tilde{y}(x)$ 是另一个解, 则

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))] dt, \quad (1.1.15)$$

同式 (1.1.14) 一样, 有

$$\|y - \tilde{y}\|_{\infty} \leq \alpha L \|y - \tilde{y}\|_{\infty}, \quad (1.1.16)$$

因为 $\alpha L < 1$, 从而 $\tilde{y}(x) = y(x)$.

若 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 在 D 上存在并有界, 则条件 (1.1.6) 满足. 实际上取

$$L = \max_{(x, y) \in D} \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|, \quad (1.1.17)$$

则根据中值定理, 存在 $\xi_x \in [y_1, y_2]$, 有

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\xi_x} (y_1 - y_2), \quad (1.1.18)$$

再结合式 (1.1.17) 即得式 (1.1.6). \square

例 1.1.1 考虑

$$y' = 1 + \sin(xy), \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}.$$

根据式 (1.1.17), 由

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cos(xy) \quad (1.1.19)$$

可得 Lipschitz 常数 $L = 1$. 因此对于 $\forall (x_0, y_0) (0 < x_0 < 1)$, 初值问题在某区间 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset [0, 1]$ 上有唯一解 $y(x)$.

例 1.1.2 考虑

$$y' = \frac{2x}{a^2} y^2, \quad y(0) = 1,$$

其中 $a > 0$ 为任意常数. 为确定 Lipschitz 常数, 计算

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{4xy}{a^2},$$

为满足 Lipschitz 条件, 我们选择区域 D 使得 x, y 有界即可, 从而初值问题有唯一解. 实际上, 该问题的精确解是

$$y(x) = \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad -a < x < a.$$

1.1.2 解的稳定性

当初值问题 (1.1.1) 有扰动时, 讨论解 $y(x)$ 的稳定性. 考虑扰动问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) + \delta(x), \\ y(x_0) = y_0 + \varepsilon, \end{cases} \quad (1.1.20)$$

其中 $\delta(x)$ 关于 x 连续, $f(x, y)$ 满足定理 1.1.1 的条件, 从而问题 (1.1.20) 有唯一解. 解记为 $y(x; \delta, \varepsilon)$, 即

$$y(x; \delta, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon + \int_{x_0}^x [f(t, y(t; \delta, \varepsilon)) + \delta(t)] dt. \quad (1.1.21)$$

假设 ε 和 δ 满足

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad \|\delta\|_\infty \leq \varepsilon_0, \quad (1.1.22)$$

则解的误差

$$y(x; \delta, \varepsilon) - y(x) = \varepsilon + \int_{x_0}^x [f(t, y(t; \delta, \varepsilon)) - f(t, y(t))] dt + \int_{x_0}^x \delta(t) dt \quad (1.1.23)$$

满足下面的定理 1.1.2.

定理 1.1.2 假定 $f(x, y)$ 是 x 和 y 的连续函数, 且关于 y 满足 Lipschitz 条件, $\delta(x)$ 在 D 上连续, 则扰动解 $y(x; \delta, \varepsilon)$ 满足

$$\|y(x; \delta, \varepsilon) - y(x)\|_{\infty} \leq \tilde{L}(|\varepsilon| + \alpha\|\delta\|_{\infty}), \quad (1.1.24)$$

其中 $\tilde{L} = 1/(1 - \alpha L)$, 并称初值问题关于数据的扰动是稳定的.

证明 由式 (1.1.23) 得

$$\begin{aligned} & |y(x; \delta, \varepsilon) - y(x)| \\ & \leq |\varepsilon| + \int_{x_0}^x |f(t, y(t; \delta, \varepsilon)) - f(t, y(t))| dt + \int_{x_0}^x |\delta(t)| dt \\ & \leq |\varepsilon| + \alpha L \|y(x; \delta, \varepsilon) - y(x)\|_{\infty} + \alpha\|\delta\|_{\infty}, \quad x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha, \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

从而

$$(1 - \alpha L)\|y(x; \delta, \varepsilon) - y(x)\|_{\infty} \leq |\varepsilon| + \alpha\|\delta\|_{\infty} \quad (\alpha L < 1), \quad (1.1.26)$$

即

$$\|y(x; \delta, \varepsilon) - y(x)\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \alpha L} (|\varepsilon| + \alpha\|\delta\|_{\infty}). \quad (1.1.27)$$

□

定理 1.1.2 表明解连续依赖于数据. 如果解连续依赖于数据, 就称初值问题 (1.1.1) 关于数据的扰动是良态的, 否则就称病态的. 由式 (1.1.24) 知, 由于 ε 和 $\delta(x)$ 在该式右端的作用等价, 所以为简单起见, 可以令 $\delta = 0$.

例 1.1.3 考虑

$$y' = 100y - 101e^{-x}, \quad y(0) = 1. \quad (1.1.28)$$

该问题的精确解为 $y(x) = e^{-x}$. 对初值作扰动, 取 $y(0) = 1 + \varepsilon$, 这时精确解为

$$y(x; \varepsilon) = e^{-x} + \varepsilon e^{100x}.$$

显然, 对任意 $\varepsilon \neq 0$, 扰动解 $y(x; \varepsilon)$ 偏离真实解 $y(x) = e^{-x}$ 很大. 该问题是病态问题.

事实上, 当 $\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} > 0$ 时, 初值问题 (1.1.1) 是一个病态问题. 考虑

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & a \leq x \leq b, \\ y(x_0) = y_0 + \varepsilon. \end{cases} \quad (1.1.29)$$

由式 (1.1.23) 知

$$\begin{aligned} y(x; \varepsilon) - y(x) &= \varepsilon + \int_{x_0}^x [f(t, y(t; \varepsilon)) - f(t, y(t))] dt \\ &\approx \varepsilon + \int_{x_0}^x \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} (y(t; \varepsilon) - y(t)) dt, \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

即

$$z(x; \varepsilon) \approx \varepsilon + \int_{x_0}^x \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} z(t; \varepsilon) dt, \quad (1.1.31)$$

其中 $z(x; \varepsilon) = y(x; \varepsilon) - y(x)$. 式 (1.1.31) 可转化为线性微分方程

$$\begin{cases} z'(x; \varepsilon) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} z(x; \varepsilon), \\ z(x_0; \varepsilon) = \varepsilon, \end{cases} \quad (1.1.32)$$

其解为

$$z(x; \varepsilon) = \varepsilon \exp \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} dt \right), \quad (1.1.33)$$

当 $\frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} > 0$ 时, $z(x; \varepsilon)$ 是 x 的增函数.

1.2 Euler 方法

本节首先介绍数值求解一阶常微分方程初值问题 (1.1.1) 的最简单的一种单步法——Euler 方法, 并分析 Euler 方法的收敛性和 (渐近) 稳定性. Euler 方法是一个一阶精度的显式计算格式.

1.2.1 Euler 公式

目标是在一系列网格点

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

上求初值问题解的近似值. 数值解的近似值记为

$$y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots,$$

相应的解的精确值记为

$$y(x_0), y(x_1), \cdots, y(x_n), \cdots.$$

Euler 方法是指用 Euler 公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

来求解初值问题 (1.1.1), 其中初值 y_0 已知. 有三种方法可以导出该公式.

(1) 将 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 处作 Taylor 展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n), \quad x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}, \quad (1.2.2)$$

省略误差项 $\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$, 得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_n), \quad (1.2.3)$$

从而得 Euler 公式 (1.2.1). 误差项 $\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$ 称为在 x_{n+1} 处的局部截断误差或离散误差.

(2) 对导数 $y'(x_n)$ 用数值微分来近似, 即

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)), \quad (1.2.4)$$

即

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)), \quad (1.2.5)$$

从而也得 Euler 公式 (1.2.1).

(3) 对 $y'(x) = f(x, y(x))$ 在 $[x_n, x_{n+1}]$ 上积分, 得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx, \quad (1.2.6)$$

利用左矩形法则近似积分, 得

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)), \quad (1.2.7)$$

同理也得 Euler 公式 (1.2.1).

例 1.2.1 用 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = x + y, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

取步长 $h = 0.01$, 并与精确解 $y = 2e^x - x - 1$ 作比较.

解 计算结果部分见表 1.1, 可以看到数值计算结果能较好地近似精确解. 图 1.2.1 是 Euler 方法和精确解的曲线比较. 同时, 还可看到误差随 x 逐步增加.

表 1.1 Euler 方法数值计算结果与精确解的比较

x	Euler 方法	精确解	误差绝对值	x	Euler 方法	精确解	误差绝对值
0.01	1.0100	1.0101	0.0001	0.91	3.0362	3.0586	0.0224
0.02	1.0202	1.0204	0.0002	0.92	3.0757	3.0986	0.0229
0.03	1.0396	1.0309	0.0003	0.93	3.1157	3.1390	0.0234
0.04	1.0412	1.0416	0.0004	0.94	3.1561	3.1800	0.0238
0.05	1.0520	1.0525	0.0005	0.95	3.1971	3.2214	0.0243
0.06	1.0630	1.0637	0.0006	0.96	3.2385	3.2634	0.0248
0.07	1.0743	1.0750	0.0007	0.97	3.2805	3.3059	0.0254
0.08	1.0857	1.0866	0.0009	0.98	3.3230	3.3489	0.0259
0.09	1.0974	1.0983	0.0010	0.99	3.3661	3.3925	0.0264
0.10	1.1092	1.1103	0.0011	1.00	3.4096	3.4366	0.0269

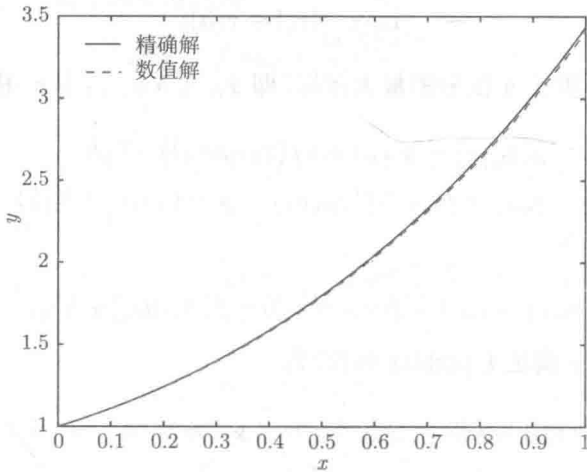


图 1.2.1 Euler 方法数值解 (虚线) 与精确解 (实线) 的比较

1.2.2 收敛性分析

Euler 公式在每一步 n 处计算都会引起局部截断误差 $\frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$, 局部误差会累积. 下面分析这些局部误差的累积所产生的误差, 即整体截断误差或整体误差.

定理 1.2.1 假定式 (1.1.1) 的解 $y(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上存在有界的二阶导数, 则由 Euler 方法得到的解 y_n 满足

$$\max_{a \leq x_n \leq b} |y(x_n) - y_n| \leq e^{(b-x_0)L} |e_0| + \frac{e^{(b-x_0)L} - 1}{L} \tau(h), \quad (1.2.8)$$

其中

$$\tau(h) = \frac{h}{2} \|y''\|_{\infty}, \quad e_0 = y(x_0) - y_0. \quad (1.2.9)$$