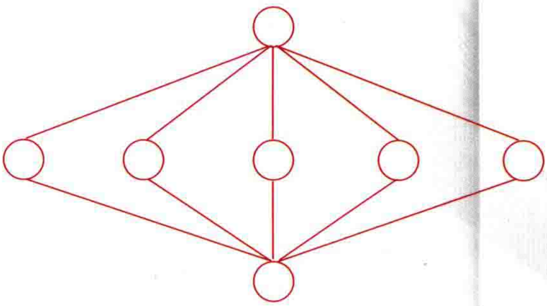
普通高等教育创新型人才培养规划教材



现代图论

XIANDAI TULUN

殷剑宏　金菊良　编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育创新型人才培养规划教材

现代图论

殷剑宏　金菊良　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

凡有二元关系的系统，图论均可提供一种数学模型。本书简明扼要、深入浅出地阐述了图论的基本原理、一般方法和主要应用。全书分为6章，第1章主要介绍将二元关系抽象为图论模型的一般理论和方法，第2章介绍图的基本概念，第3章至第5章介绍二分图、超立方体、有向de Bruijn图、欧拉图、哈密顿图、树和平面图的概念、性质和应用，第6章对几个重要问题的理论和应用做了深入系统的专项讨论，以进一步加深、拓宽研究创新的思维。

本书知识结构体系完备。阅读本书，无需特别的预备知识，既易轻松入门，又易激发研究兴趣，具有很强的普适性，可供从事数学、物理、化学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、系统工程、经济学、人口学、管理科学、心理学、社会学、人类学等方面的科研、管理与工程技术人员阅读，也可作为相关专业的高年级本科生、研究生和教师的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

现代图论 / 殷剑宏，金菊良编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5124-1749-6

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①殷… ②金… Ⅲ. ①图论－研究 Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第068592号

现代图论

殷剑宏　金菊良　编著

责任编辑　杨　昕

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

读者信箱: goodtextbook@126.com　邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:710×1 000　1/16　印张:13.75　字数:293千字

2015年6月第1版　2015年6月第1次印刷　印数:3 000册

ISBN 978-7-5124-1749-6　定价:29.00元

前　言

图论是一门非常年轻而又极有趣味的学科，几乎每一门有想象空间的学科中的问题都可用图模型来解决，其应用领域涵盖了数学、物理、化学、计算机科学、电子学、信息论、控制论、系统工程、管理科学、心理学、社会学、人类学等自然科学、行为科学及社会科学的几乎所有学科领域，同时，这些学科的发展又大大促进了图论的发展。例如，图论为运筹学的出现，起到了非常重要的作用，其决策分析理论、求最小代价运输网络的方法、匹配理论等都以图论为理论基础。又如，在计算机科学中，图论提供了一种非常优美实用的描述离散结构层次关系的数据结构——树。路和树还是通信网络的基本数学模型之一。印刷电路板设计和大规模集成电路的发展促进了图的平面性的研究。计算机磁鼓设计又促进了 de Bruijn 图的发展。广度优先搜索与深度优先搜索算法、最短路算法、最大团算法、最小生成树算法、图的着色算法、树的编码算法等图论算法，都与计算机科学有着千丝万缕的联系，应用这些算法已产生了巨大的社会和经济效益。图论与计算机科学相互促进、共同发展。

凡有二元关系的系统，图论均可提供一种数学模型。图论既广泛应用于各学科领域，又交叉运用各学科知识产生了基础图论、算法图论、极值图论、模糊图论、代数图论、随机图论、超图论、复杂网络等众多分支。一方面，图论的许多理论简单易懂得不可思议；另一方面，图论又有许多理论深奥得几乎不可理解，至今尚有许多悬而未决的图论难题。

值得注意的是，图论中讨论的图，不是微积分、解析几何、几何学中讨论的图形，而是客观世界中某些具体事物间联系的一种数学抽象。如二元关系的关系图，不考虑点的位置及连线的长短曲直，而只关心哪些点之间有连线。这种数学抽象就是图论中图的概念。

图论的趣味性虽妙不可言，但也广博而深奥，有其独特的思维方式和思想方法，具有逻辑严密，含义准确，专业性很强的特点。当然图论理论也有其深奥甚至枯燥的一面。为此，本书对图论学科内容进行分门别类的整理、概括和总结，取材突出以下特色：

（1）深入浅出，通俗易懂

由于图论是一门新兴学科，所以大多数图论研究者在其著作、论文、演讲中常习惯使用自己的一套术语和记号，许多图论著作或只讨论无向图，或只讨论有向图，或将无向图与有向图分列讨论。本书将无向图与有向图融为一体，参考国内外大多数作者的叙述，选择最为通俗且大众化的语言描述图论的基本概念、术语和结论，且都以定义的形式加以规范，避免了概念的歧义性，为读者特别是初学者，勾画了清晰的图论轮廓。同时，每节都以小标题的形式，提纲挈领，围绕若干知识点，由易到难、由浅入深地铺成展开，适时突出重点、前呼后应，使读者能轻松地进入图论的系统学习和研究。

（2）授人以渔，创新思维

巧妙导出关系是客观事物间联系的一种数学抽象，图是客观事物间联系的另一种数学抽象。应用集合、矩阵等不同的数学模型抽象关系和图：如由图的笛卡尔积导出超立方体，由有向 de Bruijn 图 $B(2,3)$ 到有向 de Bruijn 图 $B(2,n)$ 再到有向 de Bruijn 图 $B(d,n)$ 一步步推进，强调图的各种不同结构间的相互联系等，可不断增强读者的抽象思维能力。

（3）理论清晰，应用切实

本书用较大的篇幅阐述了独立集、匹配、着色、最短路问题、欧拉图、哈密顿图、树、平面图等的概念及其广泛应用。这些应用都切切实实地来自社会实践，可使读者自然而然地理解图论与其他学科之间千丝万缕的联系，促进读者在充分体会理论与应用的结合点时，增强自己的探索兴趣与应用能力，培养今后研究中运用图论理论知识的敏锐性。

（4）广泛实践，与时俱进

不是为编书而编书，更不是临时拼凑，而是十几年课堂教学实践所得。每个概念都阐述清晰、每个定理都证明透彻、每道例题和习题都精心设计，课程深度与广度恰当，注重运用形式化方法，避免符号堆积。以近于公理化、模式化的逻辑体系呈现给读者，展示明确的学习范围、目标、步骤、方法和方向，使读者一步一个台阶坚实地进入知识的殿堂，又抛砖引玉，授人以渔，打开图论这扇有趣的大门。同时，本书还及时引入了超立方体的 Laplace 谱、有向 de Bruijn 图的谱、生成图的极大独立集的一般方法、复杂系统影响因素结构分析方法等最新研究成果。

全书分为 6 章，其中第 1 章由金菊良撰写，第 2 章至第 6 章由殷剑宏撰写，并由殷剑宏负责全书的统稿工作。

本书知识结构体系完备。学习本书，无需特别的预备知识，既易轻松入门，又易激发学习兴趣，具有很强的普适性，不仅适合计算机科学与技术、软件工程、网络工程、信息安全、物联网工程、数学与应用数学、信息与计算科学、信息管理与信息系统、电子商务、电子信息工程、电子科学与技术、通信工程、信息工程等专业本科生选用，也适合经济学、社会学、管理科学、环境科学与工程、土木工程、给排水科学与工程、水利水电工程、水文与水资源工程等专业本科生选用，同时还可作为相关专业教学、科研和工程技术人员的参考资料。但限于作者水平，错误和疏漏在所难免，恳请各位同仁和读者不吝指正。

作　者

2015年5月1日

符号注释

(1) $\mathrm{card}(A)$	有限集 A 的基数
(2) $\varnothing$	空集
(3) U	全集
(4) $P(A)$或 2^A	集合 A 的幂集
(5) $A\cap B$	集合 A 与 B 的交
(6) $A\cup B$	集合 A 与 B 的并
(7) $A-B$	集合 A 与 B 的差
(8) $\sim A$ 或 $\overline{A}$	集合 A 的绝对差(补)
(9) $A\oplus B$	集合 A 与 B 的对称差
(10) $A\times B$	集合 A 与 B 的笛卡尔积
(11) $<a,b>$	二元组或序偶
(12) $<a_1,a_2,\cdots,a_n>$	n 元组
(13) $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$	n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$的笛卡尔积
(14) A^n	n 个集合 A 的笛卡尔积
(15) aRb	$<a,b>\in R$
(16) $a\overline{R}b$	$<a,b>\notin R$
(17) I_A	集合 A 上的恒等关系
(18) $[a]_R$	a 确定的关于 R 的等价类
(19) $\preccurlyeq$	偏序关系
(20) $<A,\preccurlyeq>$	偏序集
(21) $\prec$	拟序关系
(22) $<A,\prec>$	拟序集
(23) $\mathrm{cov}(A)=\{<x,y>\mid x,y\in A,y$ 盖住 $x\}$	盖住关系
(24) $\mathrm{LUB}(A)$	集合 A 的上确界
(25) $\mathrm{GLB}(A)$	集合 A 的下确界
(26) $R\circ S$	关系 R 与 S 的复合关系
(27) R^n	n 个关系 R 的复合关系
(28) R^{-1}	关系 R 的逆关系
(29) $\boldsymbol{M}_R\circ\boldsymbol{M}_S$	关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$与 $\boldsymbol{M}_S$的逻辑乘
(30) $r(R)$	关系 R 的自反闭包

(31) $s(R)$	关系 R 的对称闭包
(32) $t(R)$	关系 R 的传递闭包
(33) $G=<V(G),E(G),\varphi(G)>$	图 G
(34) $e=(v_j,v_t)$	以 v_j 和 v_t 为端点的无向边 e
(35) $e=<v_j,v_t>$	以 v_j 为起点 v_t 为终点的有向边 e
(36) $G=<V(G),E(G)>$ 或 $G=<V,E>$	简单图 G
(37) K_n	n 个结点完全图
(38) $\deg(x)$ 或 $d(x)$	结点 x 的度数
(39) $\deg^+(x)$ 或 $d^+(x)$	结点 x 的入度
(40) $\deg^-(x)$ 或 $d^-(x)$	结点 x 的出度
(41) $\Delta(G)=\max\{d_G(x)\mid x\in V(G)\}$	图 G 的最大结点度
(42) $\delta(G)=\min\{d_G(x)\mid x\in V(G\}$	图 G 的最小结点度
(43) $\Delta^+(D)=\max\{d_D^+(x)\mid x\in V(D)\}$	图 G 的最大入度
(44) $\Delta^-(D)=\max\{d_D^-(x)\mid x\in V(D)\}$	图 G 的最大出度
(45) $\delta^+(D)=\min\{d_D^+(x)\mid x\in V(D)\}$	图 G 的最小入度
(46) $\delta^-(D)=\min\{d_D^-(x)\mid x\in V(D)\}$	图 G 的最小出度
(47) $G_1\cong G_2$	图 G_1 和 G_2 同构
(48) $G_1\subseteq G$	G_1 是 G 的子图
(49) $G[V_1]$	结点集 V_1 的导出子图
(50) $G[E_1]$	边集 E_1 的导出子图
(51) $\bar{G}$	图 G 的补图
(52) $W(G)$	无向图 G 的连通分支数
(53) $\vec{W}(D)$	有向图 D 的强连通分支数
(54) $d(x,y)$	结点 x 到 y 的距离
(55) $K(G)=\min\{\text{card}(T)\mid T$ 是 G 的点割$\}$	图 G 的点连通度或连通度
(56) $\lambda(G)=\min\{\text{card}(S)\mid S$ 是 G 的边割$\}$	图 G 的边连通度
(57) $G_1\cup G_2$	图 G_1 和 G_2 的并
(58) G_1+G_2	图 G_1 和 G_2 的和
(59) $G_1\times G_2$	图 G_1 和 G_2 的笛卡儿积
(60) Q_n	n 维超立方体
(61) $K_{m,n}$	结点 m 和 n 的完全二分图
(62) $\alpha'(G)$	图 G 的匹配数
(63) $B(d,n)$	n 维 d 进位有向 de Bruijn 图
(64) $CL(G)$	图 G 的闭包
(65) $e(v)$	结点 v 的偏心距

(66) rad(G)　　图 G 的半径

(67) $C(G)$　　图 G 的中心

(68) diam(G)　　图 G 的直径

(69) $P(G)$　　图 G 的边界

(70) $x(G)$　　图 G 的色数

(71) $x'(G)$　　图 G 的边色数

(72) $\alpha(G)$　　图 G 的独立数

(73) $\beta(G)$　　图 G 的点覆盖数

(74) $\beta'(G)$　　图 G 的边覆盖数

(75) $\gamma(G)$　　图 G 的支配数

目　　录

第1章　关　系

自然界中普遍存在各种各样的关系，如日常生活中的同学关系、同事关系、朋友关系、师生关系、父子关系、夫妻关系等，如实数之间的大于关系、小于关系、等于关系等，又如事物之间的依存关系、影响关系等。本章将用数学语言来抽象关系。

1.1　集合的概念

集合是一个非常经典的概念，1895 年，集合论的创始人康托尔（Cantor，1845—1918 年，德国）提出了集合的概念，他是这样描述集合的，具有某种特定性质对象的总体称为集合，他所开创的集合论一般称为朴素集合论或经典集合论。由于康托尔对集合的概念未加以限制，从而导致了理论的不一致，产生了悖论，为消除经典集合论的悖论，1904－1908 年，德国数学家 Zermelo 建立了第一个集合论的公理系统，建立了形式化集合论，后经许多科学家的努力，20 世纪初创建了公理化集合论。由于展示公理化集合论过于复杂，本书采用经典集合论的原始描述，这是因为本书将所讨论的集合限于合适的定义范围内，即总是某个给定全集的子集，用经典集合论处理不会导致矛盾，且所得结论和公理化集合论中的结论完全一致。

1.1.1　集合及其表示

把具有某种特定性质的对象，汇集成一个整体，就形成一个集合（set），集合中的对象称为集合的元素或成员。通常用大写英文字母表示集合，小写英文字母表示集合的元素。记号 $a \in A$（读作 a 属于 A）表示 a 是集合 A 的元素；记号 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）表示 a 不是集合 A 的元素。一个集合，若其元素的个数是有限的，则称其为有限集，否则称为无限集。对于有限集合 A，其元素的个数还称为 A 的基数（cardinals），记作 $\mathrm{card}(A)$。

可以用列举法描述集合，即一一列出集合中的元素。例如，由 4 个元素 1，2，3，4 组成的集合可以表示为 $A=\{1,2,3,4\}$，所有英文元音字母的集合可以表示为 $B=\{\mathrm{a,e,i,o,u}\}$，大于 10 且小于 20 的奇数的集合可表示为 $C=\{11,13,15,17,19\}$，小于 100 的正整数的集合可以表示为 $D=\{1,2,\cdots,99\}$等。

还可以用描述法表示集合，即用语言描述作为集合的成员必须具备的性质，以此来刻画集合的所有元素。例如，所有实数的集合可以表示为 $A=\{x \mid x\text{ 为实数}\}$，大于 10 且小于 20 的偶数的集合可以表示为 $B=\{x \mid x\text{ 为偶数且 }10<x<20\}$等。

两个集合相等，当且仅当它们有相同的元素。集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$；集

合 A 与 B 不相等，记作 $A \neq B$。

注意：集合与其元素的排列次序无关，并约定集合的元素两两不同。

定义 1.1.1 设 A 和 B 为任意集合，若集合 A 的每个元素都是 B 的成员，则称 A 为 B 的子集(subset)，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A。

定义 1.1.2 设 A 和 B 为任意集合，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集(proper subset)，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作 A 真包含于 B 或 B 真包含 A。

若 A 不是 B 的真子集，记作 $A \not\subset B$。

定义 1.1.3 不包含任何元素的集合称为空集(empty set)，记作 $\varnothing$。

定义 1.1.4 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集(universal set)，记作 U。

全集相当于论域，即所考虑的全部对象的集合。全集一定被明确地给出或能从上下文中推断出来。例如，在实数范围内讨论数集时，则实数集为全集；在复数范为内讨论数集时，则复数集为全集，而实数集为其子集。

设 A,B,C 为任意集合，由定义可知

(1) $\varnothing \subseteq A$；

(2) $A \subseteq U$；

(3) $A \subseteq A$；

(4) 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

设 A 为任意集合，通常把 $\varnothing$ 和 A 称为集合 A 的平凡子集，否则称为非平凡子集。

定理 1.1.1 设 A 和 B 为任意集合，$A=B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

证明

$A=B \Leftrightarrow$ 集合 A 与集合 B 有相同的元素

$\Leftrightarrow A$ 的每个元素都是 B 的成员，且 B 的每个元素都是 A 的成员

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

证毕。

实践证明，定理 1.1.1 是证明集合相等的方法。

定义 1.1.5 给定集合 A，以 A 的全部子集为元素组成的集合，称为 A 的幂集(powerset)，记作 $P(A)$ 或 2^A。

例 1.1.1 设 $A=\{1,2,3\}$，求 A 的幂集 $P(A)$。

解 $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},A\}$。

例 1.1.2 设 $P(\varnothing)$ 为空集 $\varnothing$ 的幂集，求 $P(P(\varnothing))$。

解 由于 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，所以 $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$。

定理 1.1.2 设 A 为有限集且 $\mathrm{card}(A)=n$，则 $\mathrm{card}(P(A))=2^n$。

证明 由于在 n 个元素集合中，由其 $k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 个元素组成的子集的个

数为组合数$C_n^k=\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$,故

$$\mathrm{card}(P(A))=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$$

又因为对于任意正整数 x,y,有$(x+y)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$,令 $x=y=1$,得 $2^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k$。所以 $\mathrm{card}(P(A))=2^n$。证毕。

1.1.2 集合的基本运算

由已知的集合,通过集合的各种运算可以构造新集合。

定义 1.1.6 设 A 和 B 为任意集合,由集合 A 和 B 的所有共同元素组成的集合,称为 A 和 B 的交集,记作 $A\cap B$,即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

例如,设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则 $A\cap B=\{3,4\}$。

显然 $A\cap B\subseteq A$,$A\cap B\subseteq B$。

若集合 A 和 B 没有共同元素,则可记作 $A\cap B=\varnothing$,此时亦称 A 和 B 不相交。

定义 1.1.7 设 A 和 B 为任意集合,所有属于集合 A 或所有属于集合 B 的元素组成的集合,称为 A 和 B 的并集(union),记作 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

例如,设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$。

显然 $A\subseteq A\cup B$,$B\subseteq A\cup B$。

定义 1.1.8 设 A 和 B 为任意集合,所有属于集合 A 但不属于集合 B 的一切元素组成的集合,称为 B 相对于 A 的补集(complement)或相对补(relative complement),记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

例如,设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则 $A-B=\{1,2\}$,$B-A=\{5,6\}$。

$A-B$ 也可称为集合 A 与 B 的差。全集 U 与 A 的差 $U-A$ 还称为 A 的绝对补(absolute complement)或绝对差,简记作$\sim A$ 或 A,即$\sim A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$。

定义 1.1.9 设 A 和 B 为任意集合,由所有或属于集合 A 或属于集合 B,但又不能同时属于集合 A 和 B 的一切元素组成的集合,称为 A 和 B 的对称差(symmetric difference),记作 $A\oplus B$,即 $A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$。

例如,设 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则 $A\oplus B=\{1,2,5,6\}$,$B\oplus A=\{1,2,5,6\}$。

可以证明对称差有如下性质:

(1) $A\oplus B=B\oplus A$;

(2) $A\oplus\varnothing=A$;

(3) $A\oplus A=\varnothing$;

(4) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

1.1.3 集合运算的基本性质

在集合的$\cap$、$\cup$、$-$、$\sim$、$\oplus$等运算中，$\sim$是一元运算，其余的均为二元运算。

注意：本书没有规定集合各运算的先后次序(但一元运算总是优先于二元运算)，而是通过圆括号体现，且最外层的圆括号可以省略，圆括号的顺序从里到外、从前向后。

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{4,7,8\}$，则

$$(A-B)\cup(A-(B\cap C))=(A-B)\cup(A-\{4\})=\{1,2\}\cup\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$$

表 1.1.1 列出了集合运算的基本性质，其中 A、B、C 为任意集合，U 为全集，$\varnothing$为空集。

表 1.1.1 集合运算律

对合律	$\sim\sim A=A$
幂等律	$A\cap A=A, A\cup A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A, A\cup(A\cap B)=A$
德·摩根律	$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B, \sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$
同一律	$A\cap U=A, A\cup\varnothing=A$
零　律	$A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup U=U$
否定律	$A\cap\sim A=\varnothing, A\cup\sim A=U$

例 1.1.3 设 A、B、C 为任意集合，且 $A\subseteq B$，求证

(1) $A\cap C\subseteq B\cap C$；

(2) $A\cup C\subseteq B\cup C$。

证明

(1) 任取 $x\in A\cap C\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in B$ 且 $x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cap C$

所以
$$A\cap C\subseteq B\cap C$$

(2) 任取 $x\in A\cup C\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in C$

$\Rightarrow x\in B$ 或 $x\in C$

$\Rightarrow x\in B\cup C$

所以
$$A\cup C\subseteq B\cup C$$

例 1.1.4 设 A、B、C、D 为任意集合，且 $A\subseteq B$，$C\subseteq D$，求证

(1) $A\cap C\subseteq B\cap D$；

(2) $A\cup C\subseteq B\cup D$。