高等学校“十二五”规划教材

大学数学应用

陈晓龙　邵建峰　施庆生　吴春青　等编

化学工业出版社

高等学校"十二五"规划教材

大学数学应用

陈晓龙　邵建峰　施庆生　吴春青　等编

化学工业出版社

·北京·

随着科学技术的发展，数学不仅在自然科学、工程技术领域发挥越来越重要的作用，而且日益渗透到社会科学及日常生活中，因此数学绝不仅仅是抽象的理论、概念，更是解决实际问题的工具. 本书作为大学数学理论教学的一个补充，通过许多典型案例的介绍，并结合高等数学、线性代数、概率论与数理统计的教学实践，可以激发大学生学习数学的积极性和主动性，使读者在应用数学知识解决实际问题的能力方面有所提高.

本书可作为高等学校相关专业数学理论课的辅导教材和参考书，也可供各类科学技术工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

大学数学应用/陈晓龙等编. —北京：化学工业出版社，2015.8

高等学校"十二五"规划教材

ISBN 978-7-122-24387-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 138884 号

责任编辑：唐旭华 郝英华　　装帧设计：刘剑宁

责任校对：边 涛

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印　　装：北京云浩印刷有限责任公司

710mm×1000mm 1/16 印张 11 字数 202 千字 2015 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：23.00 元

前　言

高等工科院校本科“数学课程教学基本要求”中指出：“在传授知识的同时，要通过各个教学环节逐步培养学生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还要特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力”. 这表明数学教学不仅仅是为了让学生学到数学知识，掌握数学技能，获得数学经验，还必须有目的地培养和发展学生的数学应用能力.

数学界老前辈丁石孙教授讲过：“学习数学当然要学习一些理论，学习一些定理与概念，也要学习一些解题的技巧，但是更重要的是学到数学的思想方法，用以解决数学和数学以外的问题，特别是要学会用数学来解决非数学的问题. 数学是抽象的，同时又具有广泛的应用，这是一个事物的两个方面. 实际上，只有懂得数学广泛的应用，并能用数学来解决多种多样的问题，才能懂得数学本身，也才能懂得数学抽象的重要性. 这样才能真正了解数学实际上是非常生动活泼的，也才能真正学好数学”. 用数学来解决非数学问题，首先要把所需解决的问题与数学联系上，这就是将实际问题数学化，再利用数学知识分析求解，这一过程不仅有利于激发学生学习数学的兴趣，同时也有利于培养学生分析问题和解决问题的能力.

在大学生已经历的小学、中学基础教育阶段，数学是自始至终贯穿其中的一门课程。然而，大部分学生对于数学的学习，仅仅停留在以高考应试为最终目的的初级阶段，并不了解数学学了到底有什么用，这样到了大学学习数学时动力就不足，而且大学数学学习的方法与中小学也不尽相同. 因此进了大学，不少大学生因为不适应，数学成绩常常不及格. 如何给学生的大学数学学习注入新的动力，激发大学生学习数学积极性是我们每个数学教学工作者义不容辞的责任. 给大学生学习数学注入新的动力，应以让学生进一步了解数学的特点与应用为先导，在学生学习数学的过程中，逐步让学生领略数学的意义和魅力，逐步掌握学习数学的思路和方法，培养学生运用所学数学知识解决实际问题的能力，使数学课不再枯燥和抽象.

本书正是针对初入高等学校学习的学生所面对的多门大学数学课程，通过介绍各门数学课程的特点和功能，以简单的数学应用为例子，帮助学生进一步掌握大学数学课程的相关概念和方法，激发学生学习数学的动力. 本书的特点有：第一，帮助学生明确数学学习的目的，激发学生的求知欲，提高

学生学习大学数学的兴趣；第二，指导学生掌握大学数学学习的方法，以起到事半功倍的作用；第三，紧紧扣住大学三门主要基础数学课程——高等数学、线性代数、概率论与数理统计的教学实践，通过大量的应用案例，介绍运用大学数学知识解决实际问题的基本思路和方法，从而激发学生学习大学数学的积极性和主动性，使学生应用数学知识解决实际问题的能力有所提高；第四，本书大部分案例是相对独立的，学生可以按照自己的兴趣选择一部分或全部阅读.

参加本书编写的教师有陈晓龙、邵建峰、施庆生、吴春青、李志林、许志成、郭淑娟、马树建、程浩、张小平、王刚、唐凯郁、李博、姜忠义、王琼，全书的统稿由施庆生和陈晓龙完成. 本书作为大学数学课程的辅助教材，不同于一般的数学建模教材，它紧紧围绕大学三门基础课程展开，是三门基础课程的一种补充，教师和学生都可以在其中发现自己感兴趣的部分. 本书在编写过程中查阅了大量文献，在此向相关文献的作者致以最诚挚的谢意.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编者

2015 年 6 月

目 录

绪　论

一、数学与数学教育

克莱茵说过："音乐能激发情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科学可改善物质生活，但数学可给予上述一切！"

20 世纪以来，科学技术得到了飞速的发展，数学在这个发展过程中发挥了不可替代的作用，同时数学自身也得到了空前的发展. 计算机的迅速发展和普及大大增强了数学解决现实问题的能力. 数学向社会、经济和自然界各个领域的渗透，扩展了数学与实际的接触面，数学科学应用于经济建设、社会发展和日常生活的范围和方式发生了深刻的变化，从科学技术角度来看，不少新的分支学科出现了，特别是与数学相结合而产生的新学科如数学生物学、数学地质学、数学心理学和数学语言学等等. 正如联合国教科文组织 1992 年在里约热内卢宣言中指出的："纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把钥匙，世界需要这把钥匙".

2005 年教育部发布了 1 号文件（教高［2005］1 号）《关于进一步加强高等学校本科教学工作的若干意见》，文件明确指出，"加强高等学校本科教学工作的主要任务和要求就是：着眼于国家现代化建设和人的全面发展需要，加大教学投入，强化教学管理，深化教学改革，坚持传授知识、培养能力、提高素质、协调发展，更加注重能力培养，着力提高大学生的学习能力、实践能力和创新能力，全面推广素质教育". 数学不仅仅是一种重要"工具"或"方法"，更是一种素质，即数学素质，它在提高人的推理能力、抽象思维能力、分析能力和创造能力等方面有着无可替代的作用，人类的现实生活需要数学，国家的发展、科学技术的进步更离不开数学. 因此，具备一些必要的数学知识和一定的数学思维方法是现代人才基本素质的非常重要的组成部分. 在这样的大背景下，高等学校几乎所有的专业均开设了数学这门课程.

高等院校本科"数学课程教学基本要求"中指出："在传授知识的同时，要通过各个教学环节逐步培养学生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还要特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力". 这表明数学教学目的不仅仅是为了让学生学到数学知识，掌握数学技能，获得数学经验，还必须有目的地培养和发展学生的数学能力.

学生数学能力的培养应注意以下几个方面.

第一，培养学生自主学习数学的能力。在数学教学中必须注意重视培养学生自我学习数学的能力和创造性学习数学的能力. 在教学中，要特别注意培养学生主动学习数学的能力. 具体地说，首先要恰当地选择既符合教学要求又适合学生基础的高质量的教材作为教科书，同时可以适当向学生推荐几本较好的参考书，这样一方面可以培养学生自学数学的能力，另一方面也可以开拓他们的视野，激发他们的学习兴趣；其次，规定学生课前做好预习工作，培养学生发现问题、抓住关键的能力；最后，在课堂教学中，对一些重要的定义、定理、计算公式可做适当的引申和拓广，介绍其形成的背景及应用，提出一些相关的思考题，鼓励学生通过查阅资料求解，这样一方面可以激发学生学习数学的兴趣，另一方面也可使数学课生动活泼些. 例如，在讲授微分中值定理时，除指出中值定理的条件、结论和适用范围外，还可以提出一系列问题。在讲授拉格朗日中值定理后，可以问学生该定理的逆是否成立，若不成立，应当加上什么条件使之成立；其中的 ξ 的个数以及位置如何确定. 另外，对形如 $af(x)+bg(x)$、$f(x)\cdot g(x)$ 这样的函数又怎样运用中值定理，等等. 总之，学生数学学习能力的高低将直接影响到学生今后对实际数学问题的驾驭和解决能力.

第二，培养学生的数学论证能力. 数学论证能力是一种综合性的数学能力，培养学生的数学论证能力是培养学生逻辑思维能力和演绎推理能力的一种重要途径. 当然在工科数学教学中，不可能也没有必要建立纯形式的公理体系，也不可能建立严格的逻辑体系，不可能有严格定义下的“数学证明”，但所证明的论证，也必须在已知条件下，借助某些公理、定义和已证明了的定理，通过合乎逻辑的推理，来推断所要求的结论，这就要求学生熟悉一些逻辑规则并会使用它们，即要求学生要有一定的逻辑思维能力. 因此，进行数学论证教学的实践，必定能发展学生逻辑思维能力. 具体做法是，对一些典型的定理，如微分中值定理、微积分基本定理、克莱姆法则等，在学生已经弄懂论证内容的基础上，要求学生能说出证明的每一步推理所使用的逻辑规则，并能用简洁的语言表达出来，这样多次反复，可使学生自然而然地遵守和使用正确的逻辑推理，从而达到培养学生的逻辑思维能力.

第三，培养学生的数学运算能力. 数学运算能力是解决具体数学问题的基本能力，作为工科院校的学生，这种运算能力是必不可少的，是最基本的，也是最重要的. 大部分学生对于模式般的具体计算尚可，而对一些综合的、需要灵活运用数学知识的题目解答能力较差. 具体表现为对于一些可直接套用例题和公式的类型题，解题轻松，正确率也高；一旦稍微变换题型或为实际应用题，就会出现这样或那样的错误. 因此，在数学教学中，一方面通过类比，找出它们的共同点和不同点，另一方面，通过各种各样的例题和练习，强化学生的感性认识. 培养

学生的运算能力不仅要通过大量的练习来巩固所学知识，还需要通过教师对一些典型例题的讲解和分析来引导学生自主学习.

第四，培养学生的数学应用能力. 数学应用能力是数学教学的根本目的. 在传统的数学教学中，普遍存在一种倾向，即只重视数学理论的学习. 具体地讲，就是在数学概念的理解、数学公式、数学运算上下的功夫大，对如何用所学的数学知识、数学方法解决实际问题却很少过问. 也就是说，对如何从实际出发，抽象概括建立数学模型，运用所学的数学知识对数学模型进行分析研究，提出解决问题的方法，再将得到的结果返回到实际问题中进行检验的认识问题、解决问题的重要途径重视不够. 为了改变这种倾向，必须在数学教学中重视培养学生的数学实际应用能力，它包括想象洞察能力、建模和运用数学软件能力等.

二、数学与数学应用

马克思曾经指出："一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步." 当代数学家、教育家、沃尔夫奖获得者 H. 惠特尼（Hassler Whitney）指出："学数学意味着什么？当然希望能用它……最好的学习就是用，并且古今皆知仅在你有自己想法时才能真正的学习." 著名的数学教育家 H. 弗洛登塔尔（Freudenthel，Hans）指出："数学源于现实，并且用于现实." 数学家 C. 雷波特（Report，Cambridge）指出："应该把数学内部与外部的应用都教给学生，使他对两个方面都明白：一是数学作为科学方法的效力，二是数学作为科学应有的统一与美." 因此，学好数学首先要让学生明白学习数学的根本目的绝不仅仅是为了完成一门或几门规定的数学课程学习，而是为了运用数学知识解决实际问题.

当今社会日益数字化、数学化，数学已经渗透到各行各业，各行各业的发展也越来越离不开数学，数学应用的广泛性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础，但是在过去的年代由于种种原因，这个特点在人们的印象中反映得并不充分. 人们往往只把数学理解为训练人们科学思维的工具，致使人们常常感到学了大量的数学知识和方法但是不会用或用不上. 当前，在数学学科与其他科学技术以及经济建设紧密结合的今天，学术界在探讨数学科学技术基础及其对经济竞争力的作用时指出："在经济竞争中数学是不可少的，数学科学是一种关键的、普遍的、能够实行的技术"，"高技术的出现把我们社会推进到数学技术的时代". 数学的应用特征在当今显得更加突出和重要.

要用数学的理论和方法解决实际问题，首先必须将所考虑的实际问题进行深入分析与研究，将其归纳为一个相应的数学问题，这个过程称为数学建模，得到的数学问题称为数学模型. 数学模型给大多数人的第一反应是"高大上"，但事

实上，数学建模的思想在中学就已存在，中学阶段“列方程解应用题”就是用建立数学模型的方法来解决实际问题的典型例子（当然比较简单）. 例如，甲、乙地相距 750km，船从甲地到乙地顺水航行需要 30h，从乙地到甲地逆水航行需要 50h，问船速、水速各为多少。其求解过程如下。

解：用 x、y 分别表示船速和水速，则可以建立如下方程组

$$\begin{cases}(x+y)\times 30=750\\(x-y)\times 50=750\end{cases}$$

这个方程组就是上述实际问题的一个数学模型，列出方程组，就是将原问题转化为纯粹的数学问题，解方程组得

$$x=20(\text{km/h}),\ y=5(\text{km/h})$$

即船速为 20km/h，水速为 5km/h.

当然，很多实际问题的数学模型要比这个问题复杂得多，所需要的数学知识也要多得多，但上述简单问题的解决基本包含了建立数学模型的方法和全过程.

首先，要对问题作全面的分析和了解，确实把握需要达到的目的和已有的信息，在合理的简化和假设下，将实际问题翻译成数学问题.

其次，运用适当的数学知识和方法求解数学模型，得到数学模型的解答.

第三，把数学语言表述的解答翻译回现实对象，给出实际问题的解答.

第四，用现实信息检验所到的解答，以确定结果的正确性. 若结果正确，则可指导实践；否则，就应该修改数学模型，重复上述步骤，直到所得结果与实际问题相吻合或基本吻合.

大学数学课虽是基础理论课，但其中也不乏一些利用数学知识解决实际问题的应用案例.

例 1 在商品的生产和销售过程中，销售价格上涨将使厂家在单位商品上获得更多的利润，但同时也可能使消费者的购买欲望下降，造成销售量下降，从而导致厂家削减产量，总利润也随之减少. 但在规模生产中，单位商品的生产成本是随着产量的增加而降低的，因此销售量、成本与售价是相互影响的. 因此厂家需要选择一个合理的销售价格以期望获得最大利润，这个价格称为最优价格. 那么，如何获得这个最优价格呢？

这事实上是一个多元函数条件极值问题. 下面借用某个具体问题来说明如何用高等数学中的多元函数知识来解决此类问题.

某手机品牌厂商在制订某种型号手机的销售价格时面对如下数据：

（1）根据市场调查，当地的该型号手机的年需求量为 100 万台；

（2）去年该厂共售出 10 万台，每台售价为 4000 元；

（3）仅生产 1 台这种型号的手机成本为 4000 元，但在批量生产后，生产 1 万台时成本降低为每台 3000 元.

问：在生产方式不变的情况下，今年的最优销售价格是多少？

解：首先应将上述问题和条件用数学式子表示出来. 设这种手机的总销售量为 x 台，每台生产成本为 c 元，销售价格为 v 元，则厂家的利润为

$$u(c,v,x)=(v-c)x$$

根据市场预测，销售量与销售价格之间有下面的关系（可以查阅有关资料）

$$x=M\mathrm{e}^{-\alpha v}\quad (M>0,\alpha>0)$$

这里 M 为市场的最大需求量（简单地说，就是免费发放量），α 是价格系数（这个公式反映出，销售价格越大，销售量就越少）. 同时，生产部门对每台手机成本有如下测算

$$c=c_0-k\ln x,\ c_0,k,x>0$$

这里 c_0 是只生产 1 台手机的成本，k 是规模系数（这个公式反映出，销售量越大，成本越低）.

于是，问题就转化为求利润函数

$$u(c,v,x)=(v-c)x$$

在约束条件

$$\begin{cases}x=M\mathrm{e}^{-\alpha v}\\ c=c_0-k\ln x\end{cases}$$

下的最大值问题. 利用拉格朗日乘数法，令

$$F(c,v,x,\lambda,\mu)=(v-c)x+\lambda(x-M\mathrm{e}^{-\alpha v})+\mu(c-c_0+k\ln x)$$

解方程组

$$\begin{cases}F_c=-x+\mu=0\\ F_v=x+\lambda M\alpha\mathrm{e}^{-\alpha v}=0\\ F_x=v-c+\lambda+\dfrac{\mu k}{x}=0\\ x=M\mathrm{e}^{-\alpha v}\\ c=c_0-k\ln x\end{cases}$$

得

$$v=\frac{c_0-k\ln M+\dfrac{1}{\alpha}-k}{1-\alpha k}$$

由于只有一个驻点，且最优价格是存在的，故上式的 v 就是所求的最优价格表达式.

现在回到具体的手机销售问题. 要计算最优价格 v 的表达式，首先要确定规模系数 k 与价格系数 α. 此时 $M=1000000$，$c_0=4000$. 由于去年该厂共售出 10 万台，每台售价为 4000 元，故价格系数

$$\alpha=\frac{\ln M-\ln x}{v}=\frac{\ln 1000000-\ln 100000}{4000}=0.00058$$

又由于生产 1 万台时成本就降为每台 3000 元，因此规模系数

$$k=\frac{c_0-c}{\ln x}=\frac{4000-3000}{\ln 100000}=86.86$$

将这些数据代入最优价格 v 的表达式，就得到今年的最优价格为

$$v\approx 4673(\text{元/台})$$

例 2 某调料品有限公司计划用 7 种材料来配制多种调味品，下表列出了 6 种调味品 A、B、C、D、E、F，每包所需各成分的量.

（单位：g）

调味品 成分	A	B	C	D	E	F
红辣椒	3	1.5	4.5	7.5	9	4.5
姜黄	2	4	0	8	1	6
胡椒	1	2	0	4	2	3
欧莳萝	1	2	0	4	1	3
大蒜粉	0.5	1	0	2	2	1.5
盐	0.5	1	0	2	2	1.5
丁香粉	0.25	0.5	0	2	1	0.75

试考察下列问题。

（1）一顾客为了避免购买全部 6 种调味品，他可以只购买其中一部分并用它配制出其余几种调味品. 为了能配制出其余几种调味品，这位顾客必须购买的最少的调味品的种类是多少？写出所需最少的调味品的集合.

（2）由（1）中得到的最小调味品集合是否唯一？能否找到另一个最小的调味品集合？

（3）利用（1）中找到的最小调味品的集合，按下列成分配一种新的调味品（单位：g），写出每种调味品所需的包数.

红辣椒	姜黄	胡椒	欧莳萝	大蒜粉	盐	丁香粉
18	18	9	9	4.5	4.5	3.25

解：该问题看似很复杂，但仔细分析就明白这就是线性代数中向量组的线性相关性问题.

将每一种调味品的各自成分看成一组七维列向量：$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$，$\boldsymbol{u}_5$，$\boldsymbol{u}_6$. 从线性代数角度分析，顾客能否只购买其中一部分并用它配制出其余几种调味品，其关键是能否找到极大线性无关组，而新调味品所需包数取决于表示式的

系数.

(1) 本小题实际上就是求 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, $\boldsymbol{u}_6$ 的极大线性无关组，为此将此向量组构成的矩阵的列向量作初等行变换，化为行最简形. 记 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_5,\boldsymbol{u}_6]$，则

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}3&1.5&4.5&7.5&9&4.5\\2&4&0&8&1&6\\1&2&0&4&2&3\\1&2&0&4&1&3\\0.5&1&0&2&2&1.5\\0.5&1&0&2&2&1.5\\0.25&0.5&0&2&1&0.75\end{pmatrix}\longrightarrow\boldsymbol{U}_0=\begin{pmatrix}1&0&2&0&0&1\\0&1&-1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

容易得到向量组的秩为 4，且极大无关组为 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, 或 $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, 或 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, 或 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, $\boldsymbol{u}_6$, 或 $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, $\boldsymbol{u}_6$, 或 $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$, $\boldsymbol{u}_6$. 但由于实际问题的意义，只有当其余两个向量在由该极大无关组表示时系数均为正时，才有价值.

综上所述，可取极大关组 $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$，且有

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_6=\frac{3}{2}\boldsymbol{u}_2+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_3$$

也即可以用 B、C、D、E 四种调味品作为最小调味品组合.

(2) 由 (1) 的分析，以及 $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$ 的不可替代性，极大无关组另两个向量只能从 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_6$ 中选择，而从 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_6$ 用 $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$ 的线性表示可以看出，任何移项都会导致系数变成负数，从而失去意义. 因此，(1) 中得到的最小调味品集合是唯一的.

(3) 记新调味品为向量 $\boldsymbol{v}=(18,18,9,9,4.5,4.5,3.25)$，则问题就转化为 $\boldsymbol{v}$ 能否由 $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$, $\boldsymbol{u}_5$ 表示且表示系数非负，令 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_5,\boldsymbol{v}]$，同样运用矩阵的初等行变换，计算结果为

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1.5&4.5&7.5&9&18\\4&0&8&1&18\\2&0&4&2&9\\2&0&4&1&9\\1&0&2&2&4.5\\1&0&2&2&4.5\\0.5&0&2&1&3.25\end{pmatrix}\longrightarrow\boldsymbol{V}_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{5}{2}\\0&1&0&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

即
$$\boldsymbol{v}=\frac{5}{2}\boldsymbol{u}_2+\frac{3}{2}\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4$$

因此，新的调味品一包需要的 2.5 包 B，1.5 包 C 加上 1 包 D 调味品配制而成.

例 3 据统计，一位 40 岁的健康（一般体检未发现病症）者，在 5 年内活着或自杀死亡的概率为 $p(0<p<1)$，在 5 年内非自杀死亡的概率为 $q=1-p$. 某保险公司开办 5 年人寿保险，参加者需交保费 a 元（已知），若 5 年之内非自杀死亡，公司赔偿 b 元（$b>a$）. 试问：b 应如何确定才能使保险公司有期望收益？若有 m 人参加保险，则公司可期望收益多少？

解： 作为保险公司，需要合理制订保费和赔付额，使得公司有利润可图且能吸引投保人. 看似复杂的问题事实上就是我们学的概率论与数理统计课程的一个数学期望问题.

设 X_i 表示保险公司从第 i 个参保者身上获得的收益，则 X_i 是随机变量，其分布律为
$$X_i\sim\begin{pmatrix}a & a-b\\ p & 1-p\end{pmatrix}$$
于是，有
$$EX_i=a\times p+(a-b)(1-p)=a-b(1-p)$$
若保险公司有期望收益，则必须有 $EX_i>0$，因此可得
$$a<b<\frac{a}{1-p}$$
对 m 个人来说，设 X 表示保险公司从这 m 个参保者身上获得的收益，则
$$X=\sum_{i=1}^{m}X_i$$
因而保险公司获得的总收益
$$EX=E(\sum_{i=1}^{m}X_i)=\sum_{i=1}^{m}EX_i=ma-mb(1-p)$$
例如，当 $p=0.97$，$a=360$ 元，$b=10000$ 元，若有 10 万人参加这一保险，则保险公司可期望收益

$EX=100000\times360-100000\times10000(1-0.97)=600$(万元).

而当 $p=0.98$，$a=360$ 元，$b=10000$ 元时，若有 10 万人参加这一保险，则保险公司可期望收益

$EX=100000\times360-100000\times10000(1-0.98)=1600$(万元).

由此可见，投保人在 5 年内活着或自杀死亡的概率 p 对保险公司赢利影响

是很大的.

这些例子不仅说明了大学三门数学基础课的重要性，而且也进一步显示了运用数学知识解决问题的重要意义. 总而言之，随着科学技术的日新月异，数学正在科技的各个领域发挥着巨大的作用，并将继续影响科技的发展.