



宏鹏教育

教师资格证国家统一考试专用指导教材

数学学科知识与教学能力 (高级中学)

教师资格考试命题研究中心 组 编

Shuxue Xueke Zhishi Yu Jiaoxue Nengli

- 资深专家编写
- 涵盖所有考点
- 名师精讲难点
- 国考最佳选择



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

教师资格证全国统一考试专用指导教材

数学学科知识与教学能力 (高级中学)

教师资格考试命题研究中心 组 编

Shuxue Xueke Zhishi Yu Jiaoxue Nengli



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学科知识与教学能力(高级中学) / 教师资格考试命题研究中心组编. —北京: 北京师范大学出版社, 2015. 3

教师资格证国家统一考试专用指导教材

ISBN 978-7-303-18713-3

I. ①数… II. ①教… III. ①中学数学课—教学法—高中—中学教师—资格考试—教材 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 047068 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com>
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印刷: 北京中印联印务有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 203 mm×280 mm

印张: 12.5

字数: 370 千字

版次: 2015 年 3 月第 1 版

印次: 2015 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 27.00 元

策划编辑: 郭兴举

责任编辑: 程龙云

美术编辑: 焦 丽

装帧设计: 焦 丽

责任校对: 王 婉

责任印制: 陈 涛

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

目 录

第一部分 数学学科知识

第一章 函数及其应用	3
第一节 函数的概念及其性质	3
一、中小学数学课程中函数概念形成的基本脉络	3
二、认识函数概念的三个维度	5
三、函数的基本性质	6
第二节 基本初等函数及函数的分类	8
一、基本初等函数	8
二、运算与初等函数	9
三、极限与一般函数	10
第三节 数 列	13
一、数列在数学与实际中的作用	13
二、数列在高中数学中的定位	13
三、数列与差分方程	14
第四节 导数和积分	17
一、导数的意义	17
二、积分的意义	17
三、牛顿—莱布尼茨公式	17
第五节 研究函数变化的基本方法	19
一、研究函数变化的两种方法	19
二、两者的差异	20
三、两者的联系	20
第六节 函数知识的应用	21
一、函数与方程	21
二、函数与不等式	21
三、函数与线性规划	22
四、函数的实际应用	22
第七节 大学分析类数学课程	22
第八节 微积分简史	23
第二章 代数与运算	24
第一节 数系的扩充与运算	24
一、自然数的意义与运算	24

二、有理数的意义与运算	24
三、实数的意义和运算	25
四、复数的意义和运算	25
第二节 字母运算与常见公式	25
一、从算术到代数	25
二、多项式乘法与二项式定理	26
三、多项式除法与余数定理	27
第三节 向 量	28
一、向量代数	28
二、向量几何	28
三、向量的物理意义	29
四、向量是搭建几何、代数和物理的天然桥梁	29
五、向量与代数结构	29
第四节 矩阵与变换	31
一、矩阵与变换	31
二、多角度认识线性方程组	33
三、从中学数学看线性代数作用	34
第五节 字母运算的应用——方程与不等式	35
一、方程与韦达定理	35
二、函数应用与方程的近似求解	36
三、不等关系与基本不等式	36
第六节 代数发展简史	37
第三章 图形与几何	39
第一节 常见几何图形及其基本问题	39
一、中小学课程中常见几何图形	39
二、基本的几何问题——位置关系与度量关系	40
三、基本的几何方法简介	40
第二节 向量几何	41
一、基本几何图形与向量的描述	41
二、用向量方法研究位置关系与度量关系	42
三、向量作用的综述	43
第三节 解析几何	43
一、高中解析几何的定位	43
二、解析几何简介	44
三、解析方法的拓展	45
第四节 变换几何	46
一、中小学数学课程中的基本变换	46
二、用变换认识几何图形	46
三、变换几何简介	47

四、几何课程的变化趋势	47
第五节 几何直观的意义	47
一、几何直观的基本作用	47
二、几何图形在数学课程中的特殊地位	48
第六节 几何发展简史	48
第四章 统计与概率	50
第一节 随机现象与概率	50
一、随机现象的基本特征	50
二、概率的概念	51
三、统计中的随机性	52
第二节 统计：统计问题与基本的步骤	53
一、统计问题的认识	53
二、解决统计问题的基本步骤	53
三、设计有效的统计活动	54
第三节 概率模型	54
一、古典概型	54
二、几何概型	55
三、二项分布	55
四、超几何分布	55
五、数学模型与实际问题的	56
第四节 统计模型	56
一、回归分析	56
二、独立性检验	57
三、假设检验	57
四、聚类分析	57
五、数学模型与实际问题的	57
第五节 概率统计简史	58
第五章 算法及其他内容	60
第一节 算法：连接数学与计算机的桥梁	60
一、算法在数学课程中与计算机课程中的差异	60
二、算法的内容框架	61
三、算法、逻辑推理、构造性证明	62
四、算法在计算机与数学中的作用简介	63
第二节 集合与计数	64
一、集合的作用与它在高中课程的定位	64
二、有限集合的计数问题——加法定理与乘法定理	65
三、有限集合的计数问题——排列组合	65
四、集合论简介	65

第三节 常用逻辑用语与逻辑代数	66
一、从简易逻辑到常用逻辑用语	66
二、常用逻辑用语——充分条件与判定定理	66
三、常用逻辑用语——必要条件与性质定理	67
四、常用逻辑用语——充要条件与重要的数学概念、结论	67
五、常用逻辑用语——量词(全称量词、存在量词)	67

第二部分 数学课程知识

第一章 高中数学课程的性质、基本理念和课程目标	71
第一节 高中数学课程的性质	71
一、对数学与数学教育的认识	71
二、对高中数学课程的认识	71
第二节 高中数学课程的基本理念	72
一、如何把握高中数学课程的定位?	72
二、如何把握高中数学课程的基础性?	72
三、高中数学新课程为什么要强调选择性?	72
四、高中数学新课程为什么要提倡多种学习方式?	73
五、高中数学新课程为什么要注重提高学生的数学思维能力?	73
六、高中数学新课程为什么要强调发展学生的应用意识?	74
七、如何与时俱进地认识“双基”?	74
八、如何把握数学的本质与适度的形式化?	75
九、高中数学新课程为什么要体现数学的文化价值?	75
十、如何把握信息技术与数学课程的整合?	76
十一、如何建立科学合理的评价体系?	76
第三节 高中数学课程的目标	76
一、《课标》中是如何阐述数学课程目标的?	76
二、如何理解高中数学课程的过程性目标?	77
三、如何理解高中数学课程的情感态度价值观目标?	77
四、为什么要提倡独立获取数学知识的能力?	78
五、高中数学课程目标中为什么提出“五大能力”?	79
第二章 高中数学课程的内容标准	80
第一节 高中数学课程的内容结构	80
一、高中数学课程的整体结构	80
二、高中数学课程的内容结构	80
第二节 高中数学课程的内容组线	83
一、函数主线	83
二、几何主线	85
三、运算主线	88
四、算法主线	89

五、统计概率主线	89
六、数学应用主线	90
第三节 高中数学课程内容的变化	91
一、高中数学课程中“集合”内容的定位	91
二、高中数学课程中“常用逻辑用语”与“简易逻辑”的区别	91
三、高中数学课程中函数内容的变化	92
四、向量引入数学课课程带来的变化	92
五、高中数学课程中统计与概率内容的变化	93
六、为什么在高中数学课程中加入算法的内容?	94
七、为什么要讲微积分初步? 不讲极限能不能讲导数?	95
第三章 高中数学课程的教学与评价建议	96
第一节 教学建议	96
一、体现选择性、多样性的基本理念, 以学生发展为本, 指导学生合理选择课程, 制定学习计划	96
二、以发展的眼光, 与时俱进地审视基础知识和基本技能, 把握好新课程的基础, 帮助学生打好基础, 发展能力	96
三、注重联系, 提高对数学教育价值的整体认识是《课标》基本理念的具体体现, 也是《课标》对数学教学的明确要求	98
四、注重数学与实际的联系, 发展学生的应用意识和实践能力是《课标》的基本理念, 是时代发展的要求	98
五、“关注数学的文化价值、促进学生科学观的形成”是《课标》突出学生和谐发展、形成对数学价值全面认识的具体体现	98
六、改善和丰富教与学的方式、使学生主动地学习, 是高中数学课程改革追求的基本理念	99
七、恰当使用信息技术, 改善学生的学习方式, 提高教学质量	101
第二节 评价建议	102
一、注重对学生数学学习过程的评价	102
二、正确评价数学基础知识与基本技能的理解与掌握	103
三、重视对学生能力的评价	104
四、评价的开放性与多元化	105
五、根据学生的不同选择进行评价	106

第三部分 数学教学知识

第一章 数学教学的基本问题	111
第一节 教学过程的基本环节	111
一、数学教学过程	111
二、数学教学过程的基本环节	111
第二节 常见的数学教学方法	113
一、讲解法	113

二、讨论法	114
三、自学辅导教学法	117
四、发现式教学法	118
第三节 中学数学学习基本方式	122
一、合作学习	122
二、探究学习	122
三、自主学习	123
第二章 数学概念、命题与问题	124
第一节 数学概念教学的基本知识	124
一、概念的内涵和外延	124
二、概念下定义常见方式	125
三、数学概念获得的两种学习方式	125
四、对数学概念教学的若干认识	128
第二节 数学命题教学的基本知识	130
一、数学命题教学的整体性策略	130
二、高中数学命题教学的准备性策略	131
三、数学命题教学的情境性策略	131
四、数学命题教学的过程性策略	132
五、数学命题教学的产生式策略	132
第三节 数学问题解决的教学知识	132
一、数学问题的分类	132
二、问题解决与习题解答	132
三、问题解决的教学	133

第四部分 数学教学技能

第一章 数学教学设计	137
第一节 数学教学设计概述	137
一、数学教学设计的涵义	137
二、数学教学设计的要求	137
第二节 数学教学设计的准备	138
一、学习数学课程标准	138
二、了解和研究学生的整体情况	138
三、从整体上分析研究教材	139
四、获取其他可利用的教学资源	141
五、制定学期教学计划、单元教学计划	141
第三节 数学教学设计工作	142
一、分析学情	142
二、设计教学目标	143
三、解析、设计教学内容	144

四、制定教学策略	146
五、教学设计方案的编制	148
六、课后教学反思	153
第二章 数学教学实施与案例	155
第一节 教学情境的创设与课程导入	155
一、兴趣与信心——关注高中学生的数学课堂感受	155
二、教学情境的概念与创设	156
三、教学案例与分析	156
第二节 恰当应用教学方法和手段促进学生的有效学习	159
一、关于数学的有效学习	159
二、几个教学案例与分析	160
第三节 关于教学的组织形式	166
一、课堂教学中的合作学习	166
二、探究性教学与研究性学习的组织	167
第四节 关于课堂总结	168
一、课堂小结——课堂教学中一个重要的但被忽略的环节	168
二、怎样做课堂小结——从一个课堂小结谈起	169
第五节 运用现代教育技术进行教学	171
一、与时俱进——数学教育应该享受技术进步的成果	171
二、运用现代教育技术实施教学	174
第三章 数学课堂教学评价	177
第一节 数学教学评价概述	177
一、数学教学评价的含义与功能	177
二、数学教学评价的类型	178
三、数学教学评价的基本问题	179
四、数学教学评价的改革与发展	180
第二节 高中数学课堂教学评价	181
一、数学课堂教学评价关注点的转向	181
二、数学课堂教学评价要素	181
三、数学课堂教学评价的方法与策略	183
四、数学课堂教学评价的实施	184
第三节 高中学生数学学习评价	184
一、数学学习评价的目的和类型	186
二、数学知识和能力的测验	189
三、学生数学学习评价中常用的定量方法	189

第一部分 数学学科知识

SHU XUE XUE KE ZHI SHI

考试目标

1. 数学学科知识包括大学本科数学专业基础课程和高中课程中的数学知识。

2. 大学本科数学专业基本课程的知识是指：数学分析、高等代数、解析几何、概率论与数理统计等大学课程中与中学数学密切相关的内容，包括数列极限、函数极限、连续函数、一元函数微积分、向量及其运算、矩阵与变换等内容及概率与数理统计的基础知识。

对内容的要求是：准确掌握基本概念，熟练进行运算，并能够利用这些知识去解决中学教学的问题。

3. 高中数学知识是指《课标》中所规定的必修课全部内容、选修课中的系列1、2的内容以及选修3-1(数学史选讲)、选修4-1(几何证明选讲)、选修4-2(矩阵与变换)、选修4-4(坐标系与参数方程)、选修4-5(不等式选讲)。

对内容的要求是：理解高中数学中的重要概念，掌握高中数学中的重要公式、定理、法则等知识，掌握中学数学中常见的思想方法，具有空间想象、抽象概括、推理论证、运算求解、数据处理等基本能力以及综合运用能力。

第一章 函数及其应用

考纲要求

1. 能了解函数概念由小学,到初中,再到高中的演变的基本脉络,把握函数应用的三个层次和认识函数的三个维度。
2. 把握基本函数和函数的分类。
3. 能解释数列的理论应用和实际价值,掌握等差数列和等比数列的意义和求和公式,能够解释差分 and 差分方程的意义及其在处理离散问题中的意义,对级数有深入的了解。
4. 深刻理解导数和积分的意义,能够解释对微积分基本定理(牛顿—莱布尼茨公式)的意义,把握对函数单调性的研究方法。
5. 把握函数与方程和函数与不等式的关系,对函数应用的思想和方法有深入的认识。
6. 能够理解中学函数及微积分的学习与大学数学分析学习之间的关系,对微积分形成的历史有深入的认识。

第一节 函数的概念及其性质

函数是数学的基本概念和中小学数学的重要内容,函数的数学学习贯穿始终。明确函数概念形成发展的过程,了解函数概念发展的基本脉络,有助于教师从整体上把握函数内容。只有对函数的思想有一个系统和全面的认识,才能有效地进行函数教学。

一、中小学数学课程中函数概念形成的基本脉络

(1)量、数量与数

数、量、图、数据(一批数)是引导儿童进入数学的源泉。儿童认识和理解自然数,都是从具体的实物开始的。从5个苹果、5个梨、5张桌子等,抽象出“5”,从6个苹果、6个梨、6张桌子等,抽象出“6”,形成“数”的概念的过程就是建立实物与数的对应过程,建立了实物与数的一个映射,形成映射的过程也是认识函数的过程。从苹果、梨、桌子等,抽象出数,建立实物与数的对应关系。

映射 f 是集合 A 到集合 B 的单值对应关系,即对于集合 A 中的每一个元素 a ,根据对应关系 f ,在集合 B 中有唯一元素 $f(a)$ 与之对应,这样的对应 f 称为映射。函数是实数集到实数集的映射。对函数与映射的认识与理解是相辅相成的。在量、数量与数的学习中体现了函数概念的初步渗透。

(1)量与单位

“量”指一般意义的量,不仅包括前面讨论的离散的量,也包括如长度、时间、质量、温度、电阻等,同种量可相互比较大小。“单位”是度量“量”大小的出发点,对于一个量确定了一种单位,就建立了这种量与实数(整数、自然数)的一个映射——一种对应关系。

在小学阶段,认识同样的量,用不同的单位来表示,这是量与单位的学习的一个重要发展。根

据实际需要建立不同单位，这个想法在数学中很重要，例如，在高中三角函数学习中，为什么要引入弧度的概念？就是必须讲清楚的。

同一个量引入不同单位，就需要进行不同单位的数量换算，比如米与厘米的换算、平方米与平方分米的换算，弧度制与角度制的换算等。进行换算的过程就是建立映射的过程——是一个具体正比例函数。在小学渗透函数是隐性过程，也是逐步发展的过程，读者应该清楚认识这个发展过程。

建立量与量的关系——小学数学中的两个基本模型

函数本质上是研究量与量之间的关系，如何建立量与量的关系呢？小学数学中特别强调了两个基本模型：总价=单价×数量、路程=速度×时间，通过在具体的情境中研究量与量的关系，关注量与量的变化。这是学生认识和理解变量间关系的开始，这两个模型一个是离散的经济模型，一个是连续的物理模型，对这两个模型的学习和认识贯穿于整个中小学阶段的数学学习过程中，在大学数学学习中，它们仍然是基本的模型。在学习这两个模型时，渗透变量、变化、关系是教学的出发点，这些都是为引入函数做准备。

(4)正、反比例关系——关系概念的形成

从具体到抽象是数学发展规律，在学习时也是一样的，通过对实际的模型，如总价=单价×数量、路程=速度×时间，当单价和速度不变时，总价与数量、路程与时间之间具有“相同的”的特点，这就会促使对量与量之间关系的研究，形成正比例关系的概念，同样，也可以从路程一定时速度与时间的关系，总价一定时价格与数量的关系，抽象出反映一般的量与量的反比例关系，初步形成量与量之间关系概念，对于学生逐步认识和理解函数起着十分重要的作用。正反比例关系是建立正反比例函数的基础，也是学习函数的起点。

(5)常量与变量

在情境中，可以是数学情境，也可以是实际情境，进行量的分析是讨论数学问题一个很重要的环节。在具体的情境中，有些量是不变的，例如在匀速运动中，速度是不变的，通常把这种量称为常量；有些量可以取不同的数值，是变的，例如在匀速运动中，时间、路程可以取不同的数值，是变化的，通常称为变量。量的分析就是在具体情境中判断哪些量是常量？哪些量是变量？建立常量、变量的概念是认识数学的一个飞跃，这是认识方程、不等式的基础，也是认识函数关系的基础。在日常生活中存在很多变量，例如时间、路程、速度、加速度、温度、湿度等。有些变量和变量之间没有依赖关系，例如速度和湿度就没有依赖关系。而函数研究的主要内容就是特定的变量与变量之间的关系。

应该认识到，一个量是常量还是变量，不是绝对的，而是相对的。例如匀速运动中的速度是常量，而在变速运动中速度是变量，不同情境下的常量与变量关系是可以互相转换的，因此，需要在具体的情境中认清常量与变量的关系。有些量是绝对常量，如 π ， e 等，从常量到变量是学生认知水平的重要飞跃。

(6)变量之间的依赖关系——函数概念及图像

在一些情境中，可以有很多变量，有些变量之间是没有关系的，有些变量之间存在着依赖关系。例如在匀速运动中，时间的变化会引起路程的变化，或者说路程随着时间的变化而变化，又如，世界人口数量是随着时间的变化而变化的。这些变量之间都有着密切的依赖关系，这样的例子比比皆是，一个变量的变化引起另一个变量的变化，把这种具有相互依赖的变量关系称为函数关系。虽然，这样的描述并不是十分完整，但是这是认识函数关系的重要视角。变量与变量之间的依赖关系，从一个方面，揭示了函数的本质，本质就是反映函数是描述变化的。函数关系把两个变量联系起来，函数可以看作一个变量与另一个变量之间的一座桥。学习了映射，会对“桥”有更深入的理解。

(7) 函数模型初步——几类重要的函数

代数与算术之间有一个区别，算术是一个一个地解决问题。而代数由于用字母代替数，所以是一类一类地解决问题。正比例函数和反比例函数的学习也体现了这一特点。形如 $y=ax (a \neq 0)$ ， $y=\frac{k}{x} (k \neq 0)$ 表示的是两个函数类，一类称为正比例函数，另一类称为反比例函数，当参数 a 和 k 取不同的值时，得到不同的具体函数，每一类函数具有相同的特点。在初中，需要让学生很好地掌握几类重要函数：正比例函数；一次函数(线性函数)；反比例函数；一元二次函数；简单分段函数。通过这些函数类，以及这些函数的一批实例，将对函数的理解提升到一个新的高度。

(8) 函数概念的再认识——三个维度

随着学习的深入，对函数的认识不会停止，高中数学课程设计中，把函数作为贯穿整个高中数学课程始终的主线。在高中阶段，应该帮助学生从这三个维度来认识函数：变化角度——变量关系；整体角度——函数图像；映射角度——建立两类事物间的对应关系。初中阶段侧重从变化的角度即变量之间的关系来刻画和描述函数，而在高中阶段，则突出通过映射建立两类实物集合之间的关系，形象地说，在两个实物集合之间建立一座联系的桥梁。函数图像是直观地整体把握函数的工具，通过函数图像，能整体把握函数的性质。在高中阶段，对每一类函数都能从这样三个角度去理解和认识，只有这样才能更好地掌握函数。

(9) 函数模型的再认识——基本初等函数

了解函数的形式定义，仅仅是理解函数的一部分，理解函数的一个重要方法，就是在头脑中留住一批具体函数的模型。在高中阶段，学生应留住哪些函数模型呢？哪些函数是要学生掌握的重要函数？哪些函数是基本的函数？到了高中阶段，需要明确以下三个问题：①基本初等函数有哪些？②基本初等函数有哪些重要的性质？③研究基本初等函数的方法有哪些？

简单幂函数(特别是整数幂函数)、指数函数、对数函数、三角函数是基本函数，又称为基本初等函数，为什么它们是基本的？将在下面专题介绍。如何把握函数？哪些是重要性质？单调性、周期性、对称性是基本的性质，还有函数的定义域、值域、最值等性质也需要分析。研究函数的基本方法，一种是通过代数运算研究函数，另一种是微积分方法——用导数和积分研究函数。这些都将在后面详细讨论。

(10) 函数应用

函数是贯穿高中数学教学的一条主线，函数也是解决问题的基本数学模型，函数应用主要反映在两个方面：

一方面，在研究数学问题方面的应用。用函数讨论代数方程；讨论不等式问题；线性规划问题；算法问题(确定循环变量)；用随机变量研究随机现象；求最值问题；几何问题等等。从这些问题可以看出函数几乎渗透到高中数学的每一个角落。

另一方面，用函数思想解决其他学科问题，如物理、化学、生物中的问题；更值得关注的是用函数思想解决简单的实际问题。

在用函数解决问题时，有三个基本层次：①能用学过的函数知识描述问题；②用学过的函数模型直接解决问题；③在解决简单实际问题中，经历使用函数进行数学建模的过程，体会数学建模的思想和基本过程。

二、认识函数概念的三个维度

(1) 变化角度——变量关系

函数是研究变化的数学模型，具体地说，它是刻画变量与变量之间依赖关系的模型，通过探索、理解、掌握如何用变量与变量之间的依赖关系反映事物规律，这是我们认识现实世界的重要视

角。在现实生活中,在其他学科中,有些变量和变量之间没有依赖关系。例如,一般地说,速度和湿度就没有依赖关系;有些变量和变量之间存在着依赖关系,一个量的变化引起另一个量的变化。例如,在物理中刻画物体运动时,路程随着时间的变化而变化。这种变量之间的依赖关系具有一个突出的特征,即当一个变量取定一个值时,依赖于这个变量的另一个变量有唯一确定的值。具有这种特征的变量之间的依赖关系在现实世界中大量存在。函数正是反映变量与变量之间这种依赖关系的,它是刻画现实世界中自然规律的重要模型。这也是数学联系实际的基础。

(2)整体角度——函数图像

函数关系是平面上点的集合,又可以看作平面上的一个“图形”。在很多情况下,函数是满足一定条件的曲线,从某种意义上说,研究函数就是研究曲线的性质,研究曲线的变化。掌握了函数图像或近似把握了函数图像就可以完整掌握了函数基本的变化,增加或减少;最大或最小;对称性;周期性等一目了然。运用这种看法,函数可以看作是数形结合的载体之一。

在讨论函数问题时,帮助学生养成画函数图像的习惯,并且用函数图像思考问题。树立“图形意识”是整体掌握函数性质、学好函数的关键。

(3)映射角度——对应关系

函数是联结两类对象的桥梁,即通常说的映射关系。

在高中阶段,函数的定义为:给定两个实数集合 A 、 B ,对集合 A 的任一元素 a ,按照某种对应关系 f ,在集合 B 中存在唯一元素 b 与之对应,即 $f(a)=b$ 。我们称这个对应关系 f 为集合 A 到集合 B 的一个函数关系,简称函数,记作 $f:A\rightarrow B$ 。

这是用映射的观点理解函数,它反映两个数集之间的关系,在两个数集之间架起了一座桥梁,架桥的方式是多种多样的,可以用解析式,可以用图像,也可以用表格。这样的看法反映了数学中的一种基本思想,映射与函数本质上是一样的。在代数的进一步学习中,同构、同态等是构架两个代数结构的桥梁。在拓扑学中,连续、同胚等是构架两个拓扑结构的桥梁。这种思想渗透到每一个数学分支中。

(4)综合的认识

以上是认识函数的三个不同角度,它们可以帮助我们更全面地认识函数,也是学生在高中阶段学习函数应留下的东西,具体地说,学生接触到函数时,头脑中出现的是三个角度,不是一个角度。做到这一点,需要一个过程,逐步积累,换句话说,要把这个认识渗透到函数教学的每一环节中,渗透到每一个具体函数中。这些对于进一步学习也是很重要的。进入大学,在高等数学的学习中,保持这种认识非常重要,会帮助学生理解新的数学内容,同时,还要学习认识函数的新的视角,例如,在很多情境中,常常要把某类函数作为一个整体,讨论整体的结构。

三、函数的基本性质

在学生认识、掌握了一些具体函数的模型基础上,结合这些函数,我们引入了刻画函数变化的一般性质:单调性、周期性、对称性(奇偶性)等基本性质。

单调性是中学阶段函数最基本、最重要的性质。一旦我们弄清了一个函数的单调性,就能刻画函数的变化,以及这个函数图像的基本形状。例如,简单的幂函数 $y=x^3$,当我们知道它在整个实数范围内是单调递增的,那么就可以立刻画出函数 $y=x^3$ 的图像的基本形状以及它的变化。

周期性也是中学阶段函数的一个最基本的性质,我们生活在一个周期变化的世界里。因此,学会用周期的观点来看待周围事物的变化是非常重要的。周期函数,比如,正余弦函数、正余切函数都是刻画周期变化的函数模型。用周期的观点来研究函数,可以使我们集中研究函数在一个周期里的变化,在此基础上,就可以了解函数在整个定义域内的变化情况。

对称性是反映函数特点的另一个基本性质,奇偶性是在高中阶段要研究的函数的性质,但是,

它是特殊的对称的性质，可以帮助我们研究函数的变化规律。

除了这些性质，还需要清楚定义域、值域、极值或最值，等等。

(1) 单调性是中学最重要的函数性质

单调性是在高中阶段讨论函数“变化”的一个最基本的性质，单调性反映的是某个范围里函数的变化，是反映函数在某个区间内的整体性质，而不是局部性质(某一点附近的性质)。从几何的角度看，就是确定函数图像的形状。

在高中数学课程中，对于函数这个性质的研究分成两个阶段。

第一阶段，安排在数学必修1课程中，依函数图像直观地感受单调性，理解单调性的定义，通过大量的具体函数，理解单调性在研究函数中的作用。单调性与函数图像有密切联系，了解了函数的单调性，基本上就可以决定函数图像的走势；反过来，掌握了函数图像的走势，也就基本上了解了函数的单调性，这是函数的最基本的特征；单调性与不等式联系密切，单调性的形式化定义是借助于不等式给出的。反之，具体函数的单调性反映了一些不等关系。

第二阶段，安排在选修系列1、2课程的导数及其应用中。导数是描述函数变化率的概念，导数概念可以帮助我们“函数的变化”有进一步了解。在这一部分内容中，要求学生理解导数与单调性的联系：在一个区间内，如果函数在每一点的导数大于零，则函数是递增的；如果函数在每一点的导数小于零，则函数是递减的；反之，也可以用单调性判断导数的符号。在一个区间内，递增函数如果有导函数，那么每一点的导数大于或等于零；在一个区间内，递减函数如果有导函数，那么每一点的导数小于或等于零。这些结论的证明要用到拉格朗日中值定理，在高中是不要求的。此外，在高中阶段，对严格单调性和单调性的区别不必深究，否则会因小失大。对于一些对数学有兴趣的同学，教师可以适当引导他们阅读一些相关的参考书。

(2) 周期性

周期性是中学阶段学习函数的另一个基本的性质，周期性反映了函数变化周而复始的规律。在我们的生活中，存在着大量的周期变化的现象，大到宇宙的变化。例如，在太阳系中，行星围绕太阳的运动；小到粒子的变化，都存在周期变化的现象。因此，学会用周期的观点来看待周围事物的变化是非常重要的。周期函数，比如正弦和余弦函数、正切和余切函数都是刻画周期变化的基本函数模型，用周期的观点来研究周期函数，可以使我们集中研究函数在一个周期里的变化，在此基础上，就可以了解函数在整个定义域内的变化情况，在高中数学课程中，不讨论一般函数的周期性，只讨论基本的具体三角函数的周期性，例如正弦、余弦、正切函数的周期性，周期性贯穿三角函数研究的始终。

(3) 对称性(奇偶性)

对称性是反映函数特点的基本性质，例如轴对称、中心对称、平移、延伸或压缩等。这些对称都是几何变换，用几何方法讨论函数是值得注意的。奇偶性是高中阶段学习函数时要研究的函数的性质，但它不是最基本的性质。奇偶性反映了函数图形的特殊对称性质，偶函数的图像是关于 y 轴对称的，奇函数的图像是关于原点对称的，奇偶性反映图形的对称与坐标系的选择有关。奇偶性可以帮助我们通过对称思想来研究函数的变化规律。在高中数学课程中，对于一般函数的奇偶性，也不做深入讨论，只讨论基本的具体函数的奇偶性，例如简单幂函数的奇偶性，如 $y=x^2$ ， $y=x^3$ ， $y=x^{-1}$ 。

(4) 函数性质的综合认识

1. 对函数的研究一定不能停留在抽象的讨论上，教师应该帮助学生在头脑中建立起几个重要的模型，并把这些留在头脑中。

学生应该在头脑中留下几个具体的实际模型，比如分段函数，以及基本的函数模型，比如简单的幂函数、指数函数与对数函数、三角函数。结合这些函数，不断地加深对于函数的定义、性质以