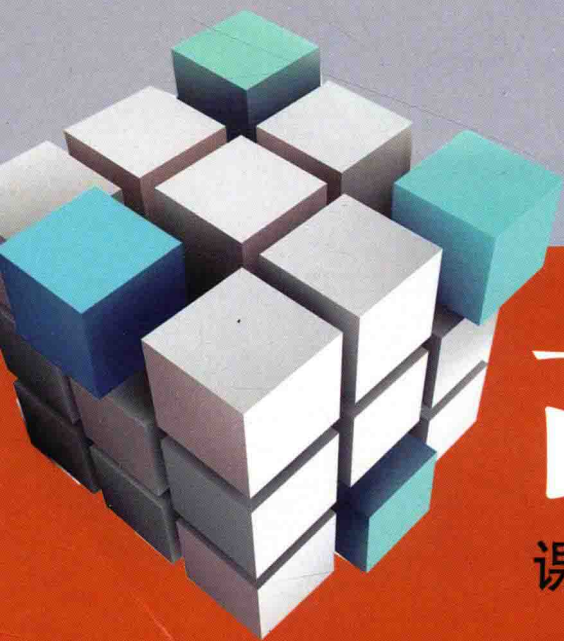


上海市杨浦区高中数学“十二五”教师(学生)培训教材



高中数学

课堂有效教学方略

主 编 李秋明
副主编 王国江
张海森
庞维成

上海市杨浦区教育局
上海市杨浦区教师进修学院
杨浦区数学理科高地



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

上海市杨浦区高中数学“十二五”教师(学生)培训教材

高中数学

课堂有效教学方略

主 编

李秋明

编 委

浦静滢 王桂华 方耀华 杨逸峰 张 谊 潘文玮 徐正旺

复旦附中数学组(排名不分先后)

上海市杨浦区教育局

上海市杨浦区教师进修学院

杨浦区数学理科高地



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书集合复旦附中和全区各层面学校的骨干教师和一线优秀教师,总结多年一线教学的经验,在“创智课堂”理念的引领下,将《上海市中小学数学课程标准》以及《高考考纲》的基本要求有机组合,在共同研讨和精选习题的基础上,形成了一套高效的数学学科教学训练体系. 主要结构有知识梳理、讲练平台、基础训练、能力提高和归纳小结六个部分. 为一线教师拓宽了教学视野,也为广大高中学生的学习进步提高提供了有利的条件.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学课堂有效教学方略/李秋明主编. —上海:同济大学出版社,2013. 8

ISBN 978-7-5608-5235-5

I. 高… II. 李… III. 中学数学—课堂教学—教学法—高中 IV. G533.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 171401 号

高中数学课堂有效教学方略

主 编 李秋明

组稿 谢惠云

责任编辑 谢惠云

责任校对 徐春莲

封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 14

字 数 349 000

版 次 2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5235-5

定 价 32.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究



序

数学教育在基础教育中占有重要的地位。学生通过数学学习,在掌握数学基础知识、基本技能和思想方法的同时,学会了思考,培养了抽象能力、推理能力和创造能力。

在杨浦区积极推广“上海市基础教育创新试验区”建设的大环境下,关于“活力课堂”建设的探索和思考在数学的课堂中也逐渐呈现出来。通过不断改进数学课堂教学,充分发挥数学学科是“锻炼思维”的学科这一重要特征,使得学生能够发挥主观能动性,真正成为学习的主体,让数学课堂教学充满“思维的活力”,从而使学生在数学学习中学会思考,培养理性思维的能力和习惯,并受益终生。

因此,如何提高数学教育教学的有效性、提高数学学科课堂教学的效率和提高学生的主动学习能力,成为数学教育工作者关注和研究的重点。广大数学教育工作者花费了大量的时间,在教育教学的各个环节进行了深入研究,通过细化数学学科知识、改善课堂教学模式、科学分析学生情况和构建合理训练体系等方法,不断地为数学学科教育教学注入新的生命力。

杨浦区理科高地高中数学学科组,作为数学学科教育教学改革的先锋,率先提出了“优质资源共享,形成全区辐射,达到共同进步”的先进理念,并且集合复旦附中和全区各层面学校的骨干教师和一线优秀教师,形成团队合作机制,总结多年一线教学的经验,在“创智课堂”理念的引领下,深入课堂一线调研,并将《上海市中小学数学课程标准》以及《高考考纲》的基本要求有机组合,在共同研讨和精选习题的基础上,形成了一套高效的数学学科教学训练体系。

这一举措,打破了学校与学校之间的隔阂,从更“大”的角度审视数学教学,同时也对“创智课堂”的理念进行了深入的分析研究。各层面学校的教师通过不断的合作与交流,取长补短。理科高地高中数学学科组总结的经验,为一线教师拓宽了教学视野,也为广大数学教师在教学的研究上能走得更“远”提供了有利的条件。

上海市杨浦区教师进修学院院长

徐国良

2013.6.21



前言

为了帮助高中数学教师明确高中数学学科教学的目标、理清教学内容的重点、提高学科复习的效率,杨浦区理科高地高中数学学科各位成员,在深入研究《上海市中小学数学课程标准》、分析多年高考试题、总结一线教学经验的前提下,将课程标准的目标、内容、要求与教材内容、要求以及高考考纲要求相结合,精心编撰了本书献给广大师生。

基于上述想法,我们对本书的内容作了精心的设计。

本书供读者作为高中数学第一阶段复习用,为了便于读者阅读,本书对高中数学各个章节的教学内容的内在联系和知识生成顺序,做了适当的调整,设有以下章节:集合、不等式、函数、数列、极限、数学归纳法、三角、向量、直线、曲线和方程、立体几何、排列、组合、二项式定理、概率统计、复数。

每个章节均设有以下栏目:

“知识梳理”,回顾本章节的知识结构、重点、难点以及一些常用的规律,并对易错的内容逐条分析,使读者对学习过程中必须关注的问题有全面的回顾和整理。

“讲练平台”,对本章节知识内容中常见的考点进行整理和分析,并配套相应的例题进行说明,注重知识与实际运用之间的关联,使读者可以更好地掌握所学的知识及其运用技巧。

“基础训练”,针对本章节的知识内容,提供了精选的基础题和中档题练习,难度适中。

“能力提高”,围绕本章节的知识内容,提供了训练思维、锻炼综合能力的练习,难度相对较高。

“归纳小结”,对本章节知识作一回顾,针对重点、难点、易错点再度进行强调。

每个章节末均附有本章“基础训练”和“能力提高”的答案,供读者自检。

数学的教学要紧扣教学的基本要求,明确教学重点、难点,反对盲目提高教学难度;数学的教学要重视知识之间的相互联系,提高教学的效率,反对所谓题海的大量低效练习;数学的教学要帮助锻炼学生思维,关注知识产生的过程,学会举一反三,反对单纯地围着一道题目转。本书对我区教师和学生的教与学有一定借鉴指导意义。

编者

2013.6



目录

序 前言

1 集合	1
1.1 集合的概念与运算	1
1.2 命题及充要条件	4
2 不等式	8
2.1 不等式的性质	8
2.2 不等式的解法	10
2.3 不等式的应用	14
3 函数	17
3.1 函数的概念	17
3.2 函数的性质	21
3.3 二次函数	27
3.4 幂函数、指数函数和对数函数	33
3.5 简单的指数方程和对数方程	40
4 数列 极限 数学归纳法	46
4.1 数列的概念	46
4.2 等差数列	50
4.3 等比数列	56
4.4 数列求和的方法	60
4.5 数学归纳法	65
4.6 数列的极限	69
5 三角	75
5.1 任意角的三角比	75
5.2 两角和与差的余弦、正弦和正切	79

5.3	二倍角与半角的正弦、余弦和正切	81
5.4	正弦定理、余弦定理和解斜三角形	83
5.5	正弦、余弦函数的图像与性质	87
5.6	正切函数的图像与性质	91
5.7	函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像与性质	94
5.8	反三角函数	99
5.9	最简三角方程	101
6	向量	104
6.1	向量的概念及运算	104
6.2	向量的坐标表示和运算	107
6.3	向量的数量积和分解定理	109
7	直线	113
7.1	直线的方程	113
7.2	直线的倾斜角和斜率 直线的一般式方程	115
7.3	点与直线的位置关系	117
7.4	两条直线的位置关系	120
8	曲线和方程	124
8.1	曲线方程的概念	124
8.2	圆的方程 直线与圆的位置关系	127
8.3	椭圆的标准方程和几何性质	132
8.4	双曲线的标准方程和几何性质	139
8.5	抛物线	145
9	立体几何	151
9.1	平面及平面的基本性质	151
9.2	空间直线与直线的位置关系	154
9.3	空间直线与平面的位置关系	157
9.4	空间平面与平面的位置关系	162
9.5	多面体和旋转体	166
9.6	多面体、旋转体的表面积和体积	173
10	排列 组合 二项式定理 概率统计	180
10.1	分类计数原理与分步计数原理	180
10.2	排列与组合	182
10.3	二项式定理	186

10.4 随机事件的概率	190
11 复数	194
11.1 复数的概念	194
11.2 复数的运算	196
11.3 实系数一元二次方程的解	199
练习参考答案	202

1 集合

1.1 集合的概念与运算

【知识梳理】

1. 集合的概念

集合是能够确切指定的一些对象的全体,其中每个对象称为集合的元素.元素具有确定性、互异性、无序性.

2. 特殊集合

$\emptyset, \mathbf{N}^*, \mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-, \dots$

3. 集合的表示法

列举法、描述法、图示法.

4. 集合之间的关系

子集:如果 A 中任何一个元素都属于 B ,那么, A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$.

相等的集合:如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,那么 $A = B$.

真子集: $A \subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A ,记作 $A \subsetneq B$.

5. 集合的运算(设全集是 U)

交集: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

并集: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

补集: $\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

6. 交、并、补运算中的性质

(1) $A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B;$

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A.$

(2) $A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B;$

$A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A; A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B; A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B.$

(3) $\complement_U A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq A \Leftrightarrow \complement_U B \supseteq \complement_U A.$

(4) $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B); \complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$

【讲练平台】

考点 1. 集合的描述法表示以及集合的运算

例 1 (1) 已知集合 $A = \{y \mid y = x^2 - 2x, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y \mid y = -x^2 + 2x + 6, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$;

(2) 已知集合 $A = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2x, x \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) \mid y = -x^2 + 2x + 6, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$.

解 (1) $\because y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1, \therefore y \geqslant -1, \therefore A = [-1, +\infty),$
 $\because y = -x^2 + 2x + 6 = -(x-1)^2 + 7, \therefore y \leqslant 7, \therefore B = (-\infty, 7],$
 $\therefore A \cap B = \{y \mid -1 \leqslant y \leqslant 7\}.$

(2) $\because \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = -x^2 + 2x + 6, \end{cases} \therefore \begin{cases} x = 3, \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \end{cases}$
 $\therefore A \cap B = \{(3, 3), (-1, 3)\}.$

考点 2. 集合的运算以及集合的几何意义

例 2 设全集 $U = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}, A = \{(x, y) \mid \frac{y-2}{x-1} = a+1, x \in \mathbf{R},$
 $y \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) \mid (a^2-1)x + (a-1)y = 21, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\},$

(1) 设 $C = \{(x, y) \mid y \neq x+1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\},$ 若 $a = 0$ 时, 求 $\complement_U(A \cup C);$

(2) 若 $A \cap B = \emptyset,$ 求由所有实数 a 所组成的集合.

解 (1) 当 $a = 0$ 时, $A = \{(x, y) \mid \frac{y-2}{x-1} = 1, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\} = \{(x, y) \mid y = x+1,$
 $1, x \neq 1\},$
 $\therefore A \cup C = \{(x, y) \mid x \neq 1, y \neq 2, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\},$
 $\therefore \complement_U(A \cup C) = \{(1, 2)\}.$

(2) $\because A \cap B = \emptyset,$

$$\therefore \begin{cases} \frac{y-2}{x-1} = a+1, \\ (a^2-1)x + (a-1)y = 21 \end{cases} \quad \text{无实数解,}$$

解方程组, 消去 $y,$ 得 $2(a^2-1)x = a^2-2a+22,$

当 $a = \pm 1$ 时, $a^2-2a+22 \neq 0,$ 所以方程组无实数解, 即 $A \cap B = \emptyset;$

当 $a \neq \pm 1$ 时, $x = \frac{a^2-2a+22}{2(a^2-1)} = 1$ 为方程组的增根,

解 $\frac{a^2-2a+22}{2(a^2-1)} = 1,$ 得 $a = -6$ 或 $a = 4,$ 此时, 方程组无实数解, 即 $A \cap B = \emptyset.$

综上所述, 当 $a = \pm 1$ 或 $a = -6$ 或 $a = 4$ 时, $A \cap B = \emptyset.$

$\therefore a \in \{1, -1, -6, 4\}.$

考点 3. 集合的运算及其性质

例 3 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 5x - 24 < 0, x \in \mathbf{R}\}, B = \{x \mid x^2 - 3ax + 2a^2 < 0,$
 $x \in \mathbf{R}\},$ 若 $A \cup B = A,$ 求实数 a 的取值范围.

解 $\because A \cup B = A, \therefore B \subseteq A,$

$\because x^2 - 5x - 24 < 0, \therefore (x+3)(x-8) < 0, \therefore -3 < x < 8, \therefore A = (-3, 8),$

$\because x^2 - 3ax + 2a^2 < 0, \therefore (x-a)(x-2a) < 0,$

当 $a > 0$ 时, $B = (a, 2a), \because B \subseteq A, \therefore \begin{cases} a \geqslant -3 \\ 2a \leqslant 8 \end{cases}, \therefore 0 < a \leqslant 4;$

当 $a < 0$ 时, $B = (2a, a), \because B \subseteq A, \therefore \begin{cases} 2a \geqslant -3 \\ a \leqslant 8 \end{cases}, \therefore -\frac{3}{2} \leqslant a < 0;$

当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$, 显然满足,

综上所述, $a \in \left[-\frac{3}{2}, 4\right]$.

【基础训练】

1. 若集合 $A = \{x \mid (k+1)x^2 + x - k = 0\}$ 中只有一个元素, 则实数 k 的值为_____.

2. 已知 $A = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + y^2 = 16\}$, $B = \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是_____.

3. 若方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 , 集合 $S = \{x \mid x > x_1\}$, $T = \{x \mid x > x_2\}$, $M = \{x \mid x < x_1\}$, $N = \{x \mid x < x_2\}$, 则不等式 $x^2 + ax + b > 0$ 的解集是().

(A) $(S \cap T) \cup (M \cap N)$

(B) $(S \cap T) \cap (M \cap N)$

(C) $(S \cup T) \cup (M \cup N)$

(D) $(S \cup T) \cap (M \cup N)$

4. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x \mid 1 < x + 1 \leq 4\}$, $C = \{x \mid x^2 + mx + n > 0\}$, 并且满足 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, $(A \cup B) \cup C = \mathbf{R}$, 求实数 m, n 的值.

5. 设集合 $P = \left\{(x, y) \mid \frac{y-3}{2x-1} = a+1\right\}$, $Q = \{(x, y) \mid y = ax^2\}$, 若集合 $P \cap Q$ 有且只有两个子集, 求实数 a 的值.

6. 集合 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 求当实数 a 取何值时, $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ 同时成立.

【能力提高】

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, A 与 B 是 U 的子集, 若 $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, 则称集对 (A, B) 为优集对, 那么, 所有优集对的个数是_____.

2. 若 $M = \{x \mid x = 1 + 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{y \mid y = 2 + 3n, n \in \mathbb{Z}\}$, 且 $x_0 \in M, y_0 \in N$, 则 $x_0 y_0$ 与集合 M, N 的关系().

(A) $x_0 y_0 \in M, x_0 y_0 \notin N$

(B) $x_0 y_0 \notin M, x_0 y_0 \in N$

(C) $x_0 y_0 \in M, x_0 y_0 \in N$

(D) $x_0 y_0 \notin M, x_0 y_0 \notin N$

【归纳小结】

1. 在用描述法表示集合时, 要注意弄清该集合中元素的一般形式.
2. 特殊集合的记忆和理解对于解题是非常重要的, 特别是对于空集 $\emptyset$ 概念的理解.
3. 我们规定不含任何元素的集合是空集, 对于一个集合是空集, 或者是指方程等无解, 或者是指图像没有交点. 对此的理解与转换可能就是解题的突破口.
4. 对于含参数的集合之间关系的讨论, 特别要注意其端点处的讨论, 避免出现漏情况或多情况的错误.
5. 在处理子集、真子集及集合运算有关问题时, 经常可借助集合的图示或者数轴来直观理解.

1.2 命题及充要条件

【知识梳理】

1. 命题: 判断真假的语句. 通常用陈述句表述. 一般形式: “如果 α , 那么 β .” 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫假命题.
2. 四种命题形式, 如图 1-1 所示 (用 $\bar{\alpha}$ 和 $\bar{\beta}$ 分别表示 α 和 β 的否定).

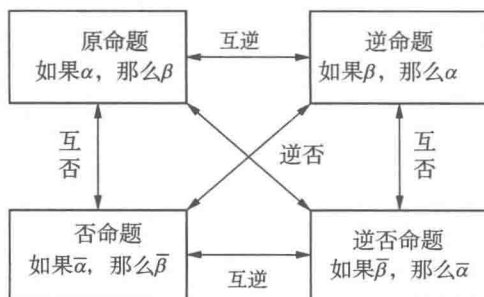


图 1-1

原命题与逆否命题同真(假); 逆命题与否命题同真(假).

3. 如果 $\alpha \Rightarrow \beta$, 那么, α 是 β 的充分条件, β 是 α 的必要条件.

如果 $\alpha \Leftrightarrow \beta$, 那么, α 是 β 的充要条件, β 是 α 的充要条件, 也就是说, 命题 α 与命题 β 是等价命题.

4. 设 $A = \{a \mid a \text{ 具有性质 } \alpha\}$, $B = \{b \mid b \text{ 具有性质 } \beta\}$, 则 $A \subseteq B$ 与 $\alpha \Rightarrow \beta$ 等价.

【讲练平台】

考点 1. 命题的四种形式与否定形式的准确把握

例 1 写出下列命题的否命题, 并且判断它的真假:

(1) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$;

(2) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a + b \neq 0$ 且 $ab \geq 0$, 则 $a > 0$ 且 $b > 0$

解 (1) 否命题: 若 $a \leq b$, 则 $ac^2 \leq bc^2$, 真命题;

(2) 否命题: 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a + b = 0$ 或 $ab < 0$, 则 $a \leq 0$ 或 $b \leq 0$, 真命题.

考点 2. 几种条件关系的判断

例 2 判断命题 α : “ $x + y > 10$ 且 $xy > 25$ ” 是命题 β : “ $x > 5$ 且 $y > 5$ ” 的什么条件.

解 α 是 β 的必要非充分条件.

充分性: α 不是 β 的充分条件, 有反例: $x = 2, y = 13$;

必要性: $\because x > 5$ 且 $y > 5$, 由不等式的加法性质, 得: $x + y > 10$ 且 $xy > 25$,

$\therefore \alpha$ 是 β 的必要条件;

综上所述, α 是 β 的必要非充分条件.

考点 3. 集合的包含关系与命题的推出关系之间的等价性

例 3 已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 1$, $q: x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\bar{p}$ 是 $\bar{q}$ 的充分非必要条件, 求实数 m 的取值范围.

解 由题可知: 命题 “ $\bar{p}$ 是 $\bar{q}$ 的充分非必要条件” 的等价命题 (即它的逆否命题) 是: “ q 是 p 的充分非必要条件”,

$$p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x-1}{3} - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x-1}{3} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 7,$$

$$q: x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m > 0) \Rightarrow [x - (2 - m)][x - (2 + m)] \leq 0,$$

$\therefore q$ 是 p 的充分非必要条件,

$\therefore$ 不等式 $x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ 的解集是不等式 $\left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 1$ 解集的真子集,

又 $\because m > 0$, $\therefore$ 不等式 $x^2 - 4x + 4 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ 的解集是 $[2 - m, 2 + m]$,

$$\therefore \begin{cases} m > 0 \\ 2 - m \geq 1 \Rightarrow m \leq 1 \Rightarrow 0 < m \leq 1, \end{cases} \therefore \text{实数 } m \text{ 的取值范围是 } (0, 1].$$

【基础训练】

1. 已知一个命题的逆命题: “已知 $x, y, z \in \mathbf{Z}$, 如果 x, y, z 中至少有一个偶数, 那么, xyz 能被 2 整除”, 则这个命题的等价命题是_____.

2. “ $a = 3$ ”是“直线 $ax + 2y + 3a = 0$ 和直线 $3x + (a - 1)y = a - 7$ 平行且不重合”的 _____ 条件.
3. 已知:集合 $A = \left\{x \mid y = x + \frac{1}{x}\right\}$, 集合 $B = \left\{y \mid y = x + \frac{1}{x}\right\}$, 命题 $\alpha: a \in A$, 命题 $\beta: a \in B$, 则集合 A 与 B 的包含关系是 _____, 命题 α 与 β 的推出关系是 _____.
4. “ $0 < m < \frac{12}{5}$ ”是“不等式 $mx^2 + 3mx + m + 3 > 0$ 对一切实数 x 恒成立”的().
- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 非充分非必要条件
5. 已知函数 $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x + 2$, 分别写出 $f(x) > 0 (x \in \mathbf{R})$ 的一个充要条件、一个充分非必要条件和一个必要非充分条件.

6. 设 $a > 0, a \neq 1$, 命题 α : 函数 $y = \log_a(x + 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, 命题 β : 曲线 $y = x^2 + (2a - 3)x + 1$ 与 x 轴交于不同的两点, 若命题 α 与 β 有且只有一个正确, 求实数 a 的取值范围.

【能力提高】

1. 若实数 a, b 满足 $a \geq 0, b \geq 0$, 且 $ab = 0$, 则称 a 与 b 互补. 记 $\varphi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b$, 那么, “ $\varphi(a, b) = 0$ ”是“ a 与 b 互补”的().
- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件
2. 设 S 为复数集 C 的非空子集. 若对任意 $x, y \in S$, 都有 $x + y, x - y, xy \in S$, 则称 S 为封闭集. 下列命题:
- ① 集合 $S = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ 为封闭集(其中 i 为虚数单位);
 - ② 若 S 为封闭集, 则一定有 $0 \in S$;
 - ③ 封闭集一定是无限集;
 - ④ 若 S 为封闭集, 则满足 $S \subseteq T \subseteq C$ 的任意集合 T 也是封闭集.
- 其中, 真命题是 _____ (写出所有真命题的序号).

【归纳小结】

1. 要判断命题的真假,必须要牢记已经学过的定理、命题和性质.

2. 判断几种条件关系(“充分非必要条件”、“必要非充分条件”、“充要条件”、“非充分非必要条件”)的方法:

(1)用定义判断;(2)用集合的包含关系;(3)用命题的等价性.

3. 真、假命题的证明:真命题是正确的命题,可以通过已有的公理、定理等进行严格证明;假命题是错误的命题,可以通过举反例进行说明.

4. 证明 α 是 β 的充要条件:(1)充分性的证明: $\alpha \Rightarrow \beta$; (2)必要性的证明: $\beta \Rightarrow \alpha$.

证明 α 是 β 的充分非必要条件:(1)充分性的证明: $\alpha \Rightarrow \beta$; (2)举反例说明 β 推不出 α .

2 不等式

2.1 不等式的性质

【知识梳理】

1. 两个实数 a, b

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b; a - b = 0 \Leftrightarrow a = b; a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$$

2. 不等式基本性质

- (1) 如果 $a > b, b > c$, 那么, $a > c$;
- (2) 如果 $a > b$, 那么, $a + c > b + c$;
- (3) 如果 $a > b, c > 0$, 那么, $ac > bc$; 如果 $a > b, c < 0$, 那么, $ac < bc$;
- (4) 如果 $a > b, c > d$, 那么, $a + c > b + d$;
- (5) 如果 $a > b > 0, c > d > 0$, 那么, $ac > bd$;
- (6) 如果 $a > b, ab > 0$, 那么, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
- (7) 如果 $a > b > 0$, 那么, $a^n > b^n (n \in \mathbf{N}^*)$;
- (8) 如果 $a > b > 0$, 那么, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$.

3. 比较两数大小的一般方法

比较法之一(作差法)步骤: 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 判断与 0 的关系 $\rightarrow$ 结论;

比较法之二(作商法)步骤: 作商 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 判断与 1 的关系 $\rightarrow$ 结论.

【讲练平台】

考点 1. 不等式的性质

例 1 $\begin{cases} 2 < x + y < 4, \\ 0 < xy < 3 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 2 < y < 3 \end{cases}$ 的().

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 非充分非必要条件

解 $\because 0 < x < 1, 2 < y < 3, \therefore 2 < x + y < 4, 0 < xy < 3$, 但是若 $2 < x + y < 4, 0 < xy < 3$, 不一定有 $0 < x < 1, 2 < y < 3$, 如 $x = 2.5, y = 0.5$, 故选(B).

考点 2. 不等式的证明

例 2 已知 a, b, c 都是正实数, 求证: $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

证明 $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + 1 + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1 + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} =$

$$3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,$$

故不等式成立,当且仅当 $a = b = c$ 时取等号.

考点 3. 含参数的不等式

例 3 已知 $0 < x < 1, a > 0, a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小.

$$\text{解法 1} \quad \because |\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)| = \frac{|\lg(1-x)|}{|\lg a|} - \frac{|\lg(1+x)|}{|\lg a|} =$$

$$\frac{1}{|\lg a|} [-\lg(1-x) - \lg(1+x)] = -\frac{1}{|\lg a|} \lg(1-x^2) > 0,$$

$$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|.$$

$$\text{解法 2} \quad \because \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|} = |\log_{(1+x)}(1-x)| = -\log_{(1+x)}(1-x) = \log_{(1+x)} \frac{1}{1-x} =$$

$$\log_{(1+x)} \frac{1+x}{1-x^2} > \log_{(1+x)}(1+x) = 1,$$

$$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|.$$

【基础训练】

1. 下列六个命题:

$$(1) \text{ 若 } 0 > a > b, \text{ 则 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \quad (2) \text{ 若 } \frac{1}{a} > 1, \text{ 则 } 1 > a;$$

$$(3) \text{ 若 } 1 < a < 2, 0 < b < 3, \text{ 则 } -2 < a-b < 2;$$

$$(4) \text{ 若 } 12 < a < 60, 15 < b < 36, \text{ 则 } \frac{4}{5} < \frac{a}{b} < \frac{5}{3};$$

$$(5) \text{ 若 } \frac{c}{a} < \frac{c}{b}, c > 0, \text{ 则 } a > b;$$

$$(6) \text{ 若 } a > b > 0, c > d > 0, \text{ 则 } \sqrt{\frac{a}{d}} > \sqrt{\frac{b}{c}}.$$

其中是真命题的序号是_____.

$$2. \text{ 已知 } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \text{ 则 } \alpha - 2\beta \text{ 的取值范围为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 若 a, b 为实数, 则 $ab(a-b) > 0$ 成立的一个充要条件是().

$$(A) a < 0 < b \quad (B) b < a < 0 \quad (C) \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad (D) a > b > 0$$

4. 比较下列两数的大小:

$$(1) x^2 + 3 \text{ 与 } 3x; \quad (2) x^2 + y^2 + 1 \text{ 与 } x + y + xy;$$

$$(3) \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \text{ 与 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} (a, b \in \mathbf{R}^+); \quad (4) \sqrt{c+1} - \sqrt{c} \text{ 与 } \sqrt{c} - \sqrt{c-1} (c > 1).$$