普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

概率论与数理统计

（第四版）

裘亚峥 任叶庆 刘 诚 编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学教程/韩旭里 主编

概率论与数理统计

（第四版）

裘亚峥 任叶庆 刘 诚 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“大学数学教程”系列教材的概率论与数理统计部分.

全书包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及其分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、正交试验设计、应用数学模型等 11 章内容. 本书体系新颖，结构严谨，内容翔实，叙述清晰，重点突出，难点分散，例题典型，习题丰富，重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学类专业本科生的教材或教学参考书，也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程. 概率论与数理统计/韩旭里主编；裘亚峥，任叶庆，刘诚编. —4 版. —北京：科学出版社，2015. 8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-03-045383-9

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①韩… ②裘… ③任… ④刘… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 ②概率论-高等学校-教材 ③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183467 号

责任编辑：李鹏奇 王 静/责任校对：钟 洋
责任印制：霍 兵/封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 8 月第 四 版 印张：21
2015 年 8 月第十六次印刷 字数：423 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第四版前言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的重点工作之一是注重吸取国内外高等学校在基础数学教学改革方面的进展，不断总结教学实践的经验，努力编写一套高质量的数学基础课教材. 本套教材是在对原《大学数学教程》系列教材使用多年的基础上，进一步修订出版的.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上，淡化单纯面向专业的观念，理顺课程内容之间的关系，加强对应该普遍具备的数学基础知识的阐述，注重有利于学生对知识的理解与深化. 在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生融会贯通的分析问题和解决问题的能力.

第一版教材侧重于将微积分、线性代数、概率论与数理统计的数学基础课内容统一安排教学，侧重适合于统一开设为大学数学一门课程使用. 这样，对大学数学的基本内容，便于学生学习、教师教学和教学管理上的统一安排，有利于使这些基本内容保持同等重要和重视的地位. 第二版教材，在保持原有指导思想的前提下，力求做到既适合于统一开设一门课程使用，也适合于分别开设多门课程使用. 因而，实现了本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课教材，内容经选择适用于对数学要求差别不是很大的其他各类有关专业数学课程的教学.

为了更新教学内容和加强数学思维的训练，本次修订对部分内容进行了调整和补充，进一步精选了例题，补充了部分习题. 每本书修订的其他情况如下：

《高等数学(上册)》是对第二版的《微积分(上册)》的修改，将函数、极限与连续两章进行了一定的调整，删除了一些不常用的内容和与中学有重叠的内容，增加了一些着重应用的数学内容，比如，介绍了一些经济管理领域内的数学概念等，并合并成了一章. 适当引进了一些近似计算方法与实际应用的数学问题. 第 1 章至第 3 章由刘碧玉编写，第 4 章至第 6 章由李军英编写，第 7 章由韩旭里编写.

《高等数学(下册)》是对第二版的《微积分(下册)》的修改，对内容力求简明直

观地描述，着重训练、应用和运算，注重增强理性思维培养的要求. 第 1 章、第 4 章和第 5 章由刘旺梅编写，第 2 章和第 3 章由秦宣云编写，第 6 章由周英告编写，第 7 章由韩旭里编写.

《线性代数》在第二版的基础上，除了精心编写了基于线性映射定义行列式的内容，以加强培养学生的抽象思维能力，还补充了基于排列求和定义行列式的内容，便于读者参考其他教科书，更好地理解行列式的内容. 将逆矩阵内容后移，与初等矩阵合并在一节，使逆矩阵内容的介绍更为紧凑. 第 1 章至第 3 章由刘伟俊编写，第 4 章至第 6 章由杨文胜编写，第 7 章由韩旭里编写.

《概率论与数理统计》在第三版的基础上，对部分内容的叙述和公式的表示进行了适当的修正，对第 7 章和第 8 章的一些概念给出了便于理解的更详细的阐述、对例题和部分习题也作了一些增减，使其层次更加清楚，内容更加丰富和完善，适应多种课时安排的教学. 第 1 章至第 3 章由裘亚峥编写，第 4 章至第 6 章由刘诚编写，第 7 章至第 10 章由任叶庆等作者编写，第 11 章由韩旭里编写.

这套教材既是一个统一的整体，可以作为大学数学课程统一开课使用，进行一体化教学. 各部分之间又有相对独立性，可以按四本教材分别开设课程，独立讲授. 讲完全部内容大约需要 290 学时. 如果减少一些内容，安排 240 学时左右讲授是可以的.《高等数学(上册)》可以考虑安排 80～90 学时，《高等数学(下册)》可以考虑安排 90～106 学时，《线性代数》可以考虑安排 32～40 学时，《概率论与数理统计》可以考虑安排 40～54 学时，教师可以根据教学计划灵活安排.

课程教学体系和教学内容的改革不是一朝一夕就能完成的，需要不断完善、不断适应时代发展的需要. 本套教材前后版本的使用、修订和出版，得到很多教师和教育主管部门领导的帮助和支持，得到科学出版社的热情支持，在此表示衷心感谢. 同时，本教材若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2015 年 5 月

第一版前言

大学数学课程是高等教育中最基础和最重要的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学. 为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的领导和支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践. 我们进行教学改革的特点是，根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程. 按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化教学教材，并经过多年的教学实践，效果是令人满意的. 现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，出版了这套系列教材.

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程的教学. 本系列教材全部内容按大约 260 学时的教学计划编写. 对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用. 对全部教学内容，建议按三个学期整体安排.

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想. 在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合. 对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要的地位. 在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以培养学生的应用意识和提高学习兴趣，提高学生分析问题和解决问题的能力.

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助. 在此，向对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢.

由于编者水平有限，若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2004 年 3 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界与人类的社会活动中，存在着各种各样的现象，其中，有一类现象在一定条件下必然会出现. 例如，向上抛一石子必然下落；在标准大气压下，100℃的纯水必然沸腾；两个同性的电荷一定互斥，等等. 这类现象称为必然现象. 因为其结果是明确的，所以也称为**确定性现象**. 还有一类现象在一定条件下可能出现，也可能不出现. 例如，在相同条件下抛一枚均匀硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前不能预知其抛币后的结果肯定是什么；又如，用同一门大炮向同一目标射击，每次弹着点总是不尽相同，并且在每次射击之前，均无法预知其弹着点的确定位置. 这类现象，虽然在试验或观察之前不能预知其确切的结果，但人们经过长期实践并深入研究后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，其结果呈现出某种规律性. 例如，均匀的硬币重复抛掷多次，正面朝上和反面朝上的次数大致相同. 这种在个别试验中其结果具有不确定性，而在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象称为**随机现象**，或称不确定性现象. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机试验

对随机现象的研究是通过试验进行的. 在这里，试验这个术语既可以是各种各样的科学实验，也可以是对某一事物的某个特征的观测. 如果某一试验满足下列条件：

(1) 在相同条件下，试验可以重复进行；

(2) 试验可能的结果不止一个，但试验前可以明确知道所有可能的结果；

(3) 每次试验的结果，事先不能准确预言，

则称这样的试验为随机试验，简称为试验，记作 E. 今后所涉及的试验均指随机试验. 下面举几个随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_2：抛两颗骰子，观察出现的点数之和；

E_3：记录某电话总机 5 分钟内接到的呼唤次数；

E_4：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

上面几个随机试验的例子有共同的特点：试验结果虽然不能完全预言，但其全部可能结果是已知的. 例如，抛一枚硬币只会有“正面出现”与“反面出现”这两种

可能结果，电话总机 5 分钟内接到的呼唤次数必定是某个非负整数.

要注意的是：对每一随机试验，总是在一定的试验目的之下讨论试验结果的规律性. 例如，从一批灯泡中任取一只进行通电试验，如果试验目的是检验产品是否合格，则试验结果为“合格品”或“不合格品”；如果试验目的是测定其寿命，则试验结果为非负实数.

1.1.2 样本空间、随机事件

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

一般地，称试验 E 的样本空间 S 的子集，即试验的若干个结果组成的集合为 E 的随机事件，简称事件，用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

在 E_1 中，可能的结果只有两个：“正面出现”和“反面出现”. 样本空间为 $S=\{H,T\}$. $\{H\}$（表示“正面出现”）和 $\{T\}$（表示“反面出现”）为 E_1 的随机事件，它们都为基本事件.

在 E_2 中，可能的结果有 11 个，分别为 $2,3,\cdots,12$. 故 $S=\{2,3,\cdots,12\}$，$A=\{5\}$ 和 $B=\{k\,|\,k$ 为正整数且 $k>6\}$ 为 E_2 的随机事件，E_2 的基本事件为 $A_k=\{k\}$，$k=2,3,\cdots,12$.

在 E_3 中，$S=\{0,1,2,\cdots\}$，$A=\{k\,|\,k$ 为正整数且 $20<k<30\}$ 为随机事件.

在 E_4 中，$S=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$，$A=\{t\,|\,0\leqslant t\leqslant 400\}$，$B=\{t\,|\,t>1000\}$ 为随机事件.

在每次试验中，必然发生的事件称为必然事件. 显然，样本空间包含所有的样本点，它作为一个事件为必然事件，记作 S. 例如，“在地球上，上抛一石子必然下落”就是必然事件. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，作为样本空间的子集，它在每次试验中必然不发生的，称为不可能事件. 显然必然事件与不可能事件都是确定性的现象，但为了研究的方便，规定它们为随机事件.

1.1.3 事件的关系与运算

每一随机试验都含有许多随机事件，由于它们共处于同一试验之中，因而是相互联系着的，有必要弄清它们之间的关系，并引进事件间的运算. 以便化复杂事件为简单事件，更好地解决相应的概率问题. 从前面可以看出事件是一个集合，因而事件间关系与事件的运算自然按集合论中集合之间的关系和集合运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义，给出它们在概率论中的定义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,C,A_k,B_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

1. 事件的包含与相等

若 $A \subset B$,则称事件 B 包含事件 A,即事件 A 发生必导致事件 B 发生,如图1-1 所示.

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等. 记作 $A=B$.

2. 事件的和(或并)

"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的和(或并),记作 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$. 显然,当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生,如图 1-2 所示.

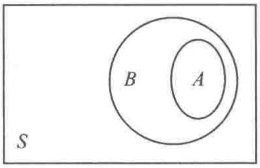

图 1-1

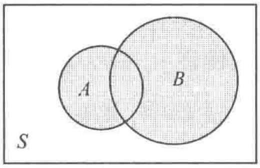

图 1-2

例如,在 E_2 中,若 A 表示"点数之和为奇数",则 $A=\{3,5,7,9,11\}$,B 表示"点数之和大于 8",$B=\{9,10,11,12\}$,则 $A \cup B=\{3,5,7,9,10,11,12\}$.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$的和事件.

3. 事件的积(或交)

"事件 A 与 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的积(或交),记作 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$. 当且仅当 A,B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记作 AB,如图 1-3 所示, 即事件 AB 所包含的样本点为事件 A,B 所共有.

例如,在 E_2 中,若设 $A=\{3,5,7,9\}$,$B=\{8,9,10\}$,则 $AB=\{9\}$.

$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 和 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 的情况由读者自己完成.

4. 事件的差

"事件 A 发生,而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$. 当且仅当 A 发生,B 不发生时,事件 $A-B$ 发生, 如图 1-4 所示.

例如,在 E_2 中,若 $A=\{3,5,7,9\}$,$B=\{8,9,10\}$,则 $A-B=\{3,5,7\}$.

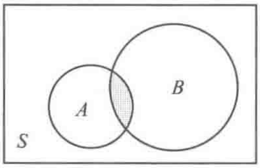

图 1-3

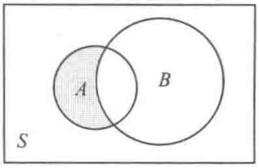

图 1-4

5. 事件互不相容(或互斥)

若 $A \cap B = \varnothing$,即事件 A 与事件 B 不能同时发生,或事件 A 与事件 B 没有共同的样本点,则称事件 A 与事件 B 是互不相容的,或互斥的,如图 1-5 所示.

例如,在 E_2 中,若 $A=\{3,5,7,9,11\}$,$B=\{2,4,6,8,12\}$,则 $AB=\varnothing$,因此 A 与 B 互斥.

在同一试验中,基本事件是两两互不相容的.

6. 对立(或逆)事件

若 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或逆事件).在一次试验中,若事件 A 与 B 是对立事件,则其中必有一个发生,且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,如图 1-6 所示.

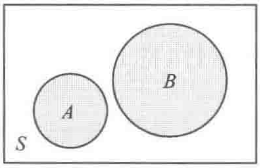

图 1-5

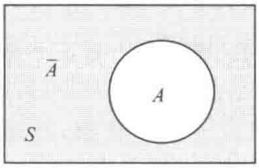

图 1-6

例如,在 E_2 中,若 $A=\{2,3,4\}$,$B=\{5,6,7,8,9,10,11,12\}$,则显然 $A \cup B = S$ 且 $A \cap B = \varnothing$,故 A 与 B 是对立事件,$B=\overline{A}$.

事件运算符合集合运算规律. 显然

$$A \cup \overline{A} = S, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing;$$
$$A \cup S = S, \quad A \cap S = A;$$
$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

设 A,B,C 为事件,则有

交换律:$A \cup B = B \cup A$;$A \cap B = B \cap A$.

结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$；

$A\cap(A\cup B)=A$.

对偶公式（也称为德摩根律）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

更一般地，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i};\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

差的公式：$A-B=A\overline{B}$.

例 1.1 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数：事件 A 表示“奇数点”；B 表示“点数小于 5”；C 表示“小于 5 的偶数点”. 用集合的列举法表示下列事件：$S,A,B,C,A+B,A-B,C-A,AC,\overline{A}+B$.

解 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，　$A=\{1,3,5\}$，

$B=\{1,2,3,4\}$，　$C=\{2,4\}$，

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$，　$A-B=\{5\}$，

$C-A=\{2,4\}$，　$AC=\varnothing$，

$\overline{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$.

例 1.2 设 A,B,C 为 3 个事件，试用 A,B,C 表示下列各事件：

(1) A_1 表示 3 个事件都发生；

(2) A_2 表示 3 个事件至少有一个发生；

(3) A_3 表示 3 个事件都不发生；

(4) A_4 表示 A 发生，但 B 与 C 不发生；

(5) A_5 表示 3 个事件中恰有一个发生；

(6) A_6 表示 A,B,C 中不多于两个发生.

解 (1) $A_1=A\cap B\cap C$；

(2) $A_2=A\cup B\cup C$；

(3) $A_3=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(4) $A_4=A-B-C$ 或 $A_4=A-(B\cup C)$，利用差的公式，$A_4=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$；

(5) A,B,C 中恰有一个发生，即 A 发生而 B,C 不发生，或者 B 发生而 A,C 不发生，或者 C 发生而 A,B 不发生，所以

$$A_5=(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C);$$

(6) $A_6=\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$ 或 $A_6=\overline{ABC}$.

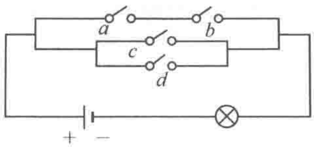

图 1-7

例 1.3　设 A,B,C,D 依次表示图 1-7 开关 a，b，c，d 闭合，E 表示灯亮，试用 A,B,C,D 表示 E.

解　因为当开关 a，b 同时闭合，或者当 c，d 两个开关至少有一个闭合时，电路被接通，灯就会亮，所以

$$E=(A\cap B)\cup C\cup D.$$

习　题　1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时掷两颗骰子，记录两颗骰子点数之和；

(2) 记录一台电视机的使用寿命；

(3) 甲乙两人下棋一局，记录棋赛的结果；

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标.

2. 在某系学生中任选一名学生，设 A 表示“被选出的是男生”，B 表示“该生是三年级学生”，C 表示“该生是运动员”.

(1) 叙述事件 $A\cap B\cap\overline{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下有恒等式 $A\cap B\cap C=C$?

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 成立?

(4) 什么时候关系式 $\overline{A}=B$ 成立?

3. 某射手向目标射击 3 次，用 A_i 表示“第 i 次击中目标”，$i=1,2,3$. 试用 A_i 及其运算符表示下列事件：(1)三次都击中目标；(2)至少有一次击中目标；(3)恰好有两次击中目标；(4)最多有一次击中目标；(5)至少有一次没有击中目标；(6)三次都没有击中目标.

4. 某灯泡厂取样检查出厂灯泡的寿命，设 A 表示“灯泡寿命大于 1500h”，B 表示“灯泡寿命为 1000～2000h”，请用集合形式写出下列事件：$S,A,B,A\cup B,AB,A-B,B-A$.

5. 一工人生产了 n 个零件，设 A_i 表示“第 i 个零件是正品”，$i=1,2,\cdots,n$. 试用文字叙述下列事件：(1) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，(2) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}$，(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left[\overline{A}_i\cap\left(\bigcap\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}A_k\right)\right]$.

1.2　随机事件的概率

一般地，总会发现有些随机事件发生的可能性大些，有些随机事件发生的可能性小些，在实际中常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年洪水达到某一高度这一事件发生的可能性的大小. 希望找到一个合适的数来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小. 这就需要用一个数量指标来定量地刻画随机事件发生的可能性的大小，这个数量指标称为事件的概率. 下面从几个不同的角度给出概率的定义和计算方法.

1.2.1 概率的统计定义

1. 事件的频率

定义 1.1 在相同条件下，进行 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$.

由此定义易见频率具有下述基本性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生越频繁，这意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因而，自然会想：能不能用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

2. 概率的统计定义

经验表明，当 n 较小时，频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大. 此时用频率来表示事件发生的可能性大小显然是不合适的. 而当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数. 例如，在抛硬币的试验中，观察出现正面的次数，这种试验历史上曾有不少人做过，其结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1-1 可以看出：不管谁去抛硬币，当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(H)$ 逐渐稳定于常数 0.5. 对于每一个随机事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应. 这种“频率稳定性”即前面所说的统计规律性. 用这个频率稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的.

定义 1.2 在相同条件下进行大量重复试验，当试验次数充分大时，事件 A 的频率总在某个数值 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即

$$P(A) = p.$$

在第 5 章中将会证明，当 n 很大时，用统计概率来度量事件发生的可能性的大小是可行的.

1.2.2　概率的公理化定义

在实际中，不可能对每一个事件都做大量的试验，从中得到频率的稳定值. 然而，频率的这一规律是定义事件概率的客观基础.

定义 1.3　设 E 是随机试验，S 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A，存在一实数，记作 $P(A)$，如果满足条件

(1) 非负性：对任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：对两两互不相容的事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$，有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k), \tag{1.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由定义 1.3 可以推得概率的一些重要性质.

性质 1.1　$P(\varnothing)=0$.

证　由于 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，则由概率的可列可加性(1.1)得

$$P(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

而由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故必有 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

这一条叫概率的有限可加性.

证　令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$. 由式(1.1)得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 1.3　设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

证　因 $A\cup\overline{A}=S$，$A\overline{A}=\varnothing$，由概率的有限可加性，得

$$P(S)=P(A)+P(\overline{A}).$$

又由 $P(S)=1$，得 $P(A)=1-P(\overline{A})$.