现代物理基础丛书 65

物理学中的群论

（第三版）

——有限群篇

马中骐　著

科学出版社

现代物理基础丛书　65

物理学中的群论

（第三版）

——有限群篇

马中骐　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

《物理学中的群论》第三版分两篇出版，本书是有限群篇，但也包含李代数的基本知识．本书从物理问题中提炼出群的概念和群的线性表示理论、通过有限群群代数的不可约基介绍杨算符和置换群的表示理论、引入标量场，矢量场、张量场和旋量场的概念及其函数变换算符、以转动群为基础解释李群和李代数的基本知识和半单李代数的分类、由晶体的平移不变性出发讲解晶体对称性和晶体的分类．书中附有习题，与本书配套的《群论习题精解》涵盖了习题解答．

本书适合作为凝聚态物理，固体物理和光学等专业研究生的群论课教材或参考书，也可供青年理论物理学家自学群论参考．

图书在版编目(CIP)数据

物理学中的群论：有限群篇/马中骐著．—3 版．—北京：科学出版社，2015

(现代物理基础丛书；65)

ISBN 978-7-03-043973-4

Ⅰ．①物… Ⅱ．①马… Ⅲ．①群论-应用-物理学 Ⅳ．①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 057750 号

责任编辑：刘凤娟／责任校对：张凤琴

责任印制：赵 博／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

天津新科印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 12 月第 二 版 开本：720×1000 1/16

2015 年 4 月第 三 版 印张：14 1/4

2015 年 4 月第十二次印刷 字数：267 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第三版前言

对称性研究在物理学各个领域都起着越来越重要的作用. 群论是研究系统对称性质的有效工具, 因此群论方法已成为物理工作者必备的基础知识. 群论课程是许多物理专业或理论化学专业研究生的必修课或选修课.

作为“中国科学院研究生教学丛书”之一,《物理学中的群论》由北京科学出版社于 1998 年出版. 经过几年的教学实践和改进, 又于 2006 年在科学出版社出版了第二版, 已有 11 次印刷. 该教材是按照 120 学时的教学计划来写作的. 随着近年教学改革的进展, 各院校教学计划都有相当大的变化. 群论课程的教学时间一般都有较大的压缩. 据作者了解, 目前各院校的群论课程一般在 60 学时左右, 原来教材很难适应形势的变化. 很多朋友建议重写一本精读教材, 以适应新形势的需要.

针对缩短了的教学时间, 教学安排应该更有针对性. 在内容的选择上, 应该根据读者的不同专业有所取舍. 粒子物理、核物理和原子物理等专业的研究生, 需要知道各种单纯李代数不可约表示及其波函数的具体计算方法, 但对晶格对称性的细节就需要较少. 凝聚态物理、固体物理和光学等专业的研究生, 则对有限群和晶格对称理论就更重视一些, 对李代数理论虽需要有一般性的了解, 但可能不太关注具体的计算细节. 在一些朋友和研究生的建议下, 作者决定把《物理学中的群论》第三版分两篇出版, 分别适用于不同专业的教学需要. 本书是《有限群篇》, 书中偏重有限群的内容, 但也包含李代数的基本知识, 篇幅大致相当于《物理学中的群论》第二版正文的一半. 书中有些内容是供读者自学参考的, 如 58 页费罗贝尼乌斯定理的证明, 1.5.2 和 3.2.4 小节关于正二十面体对称群的讨论, 5.5 节空间群的不可约表示等. 如果每学时按 45 分钟计算, 预计 60 学时的教学时间可以完成课程教学. 建议使用本书作为教材的教师, 根据学生的具体情况, 还可再做适当增删. 有些内容, 如 3.3 节置换群不可约表示的内积和外积、4.7.5 小节球旋函数、4.6.2 小节的后半部分关于典型李群的具体讨论等内容, 可安排学生自学参考, 不一定都在课堂上讲授. 即将出版的《李代数篇》, 把有限群内容进一步删减, 加入单纯李代数不可约表示的计算方法、SU(N) 群不可约张量基、SO(N) 群旋量表示和洛伦茨群的简单介绍等内容, 以适合粒子物理等专业研究生的群论教学需要.

既然是重新撰写群论教材, 本书尽量融入近十年作者在教学和科研上的新成果和新体会. 本书坚持原有的特点, 从物理中提出问题, 抽象成数学概念, 提炼出具体计算方法, 培养学生独立解决物理学中数学问题的能力. 作者希望本书能更适合当前群论教学的需要.

在立意写作本书和具体写作过程中, 作者得到阮东教授、刘玉鑫教授、李康教授、傅宏忱教授、苏刚教授、龚新高教授、王剑华教授、仝殿民教授、王美山教授、阎凤利教授、高亭教授等的鼓励和支持，得到夫人李现女士的全力支持和协助, 一并在此表示感谢. 作者感谢中国科学院大学把本书纳入中国科学院大学研究生教材系列, 资助本书由科学出版社出版.

马中骐

2014 年于北京

目　　录

第 1 章　群的基本概念

群论是研究系统对称性质的有力工具. 本章首先从系统对称性质的研究中概括出群的基本概念, 通过一些简单的和物理中常见的群的例子, 使读者对群有较具体的认识; 然后, 引入群的各种子集的概念、群的同构与同态的概念和群的直接乘积的概念. 对有限群来说, 群的全部性质都体现在群的乘法表中. 我们将介绍填写群乘法表的方法和如何由群的乘法表来分析有限群性质.

1.1　对　　称

对称是一个人们十分熟悉的用语. 世界处在既对称又不严格对称的矛盾统一之中. 房屋布局的对称给人一种舒服的感觉, 但过分的严格对称又会给人死板的感觉. 科学理论的和谐美, 其中很大程度上表现为对称的美. 在现代科学研究中, 对称性的研究起着越来越重要的作用.

我们常说, 斜三角形很不对称, 等腰三角形比较对称, 正三角形对称多了, 圆比它们都更对称. 但是, 对称性的高低究竟是如何描写的呢?

对称的概念是和变换密切联系在一起的, **所谓系统的对称性就是指它对某种变换保持不变的性质**. 保持系统不变的变换越多, 系统的对称性就越高. 只有恒等变换, 也就是不变的变换, 才保持斜三角形不变. 等腰三角形对底边的垂直平分面反射保持不变, 而正三角形对三边的垂直平分面反射都保持不变, 还对通过中心垂直三角形所在平面的轴转动 $\pm 2\pi/3$ 角的变换保持不变. 圆对任一直径的垂直平分面的反射都保持不变, 也对通过圆心垂直圆所在平面的轴转动任何角度的变换保持不变. 因为保持圆不变的变换最多, 所以它的对称性最高.

量子系统的物理特征由系统的哈密顿量 (Hamiltonian) 决定, 量子系统的对称性则由保持系统哈密顿量不变的变换集合来描写. 例如, N 个粒子构成的孤立系统的哈密顿量为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j^{-1} \nabla_j^2 + \sum_{i<j} U(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|),$$

其中, $\boldsymbol{r}_j$ 和 m_j 是第 j 个粒子的坐标矢量和质量, ∇_j^2 是关于 $\boldsymbol{r}_j$ 的拉普拉斯 (Laplace) 算符, U 是两个粒子间的二体相互作用势, 它只是粒子间距离的函数. 拉普拉斯算符是对坐标分量的二阶微商之和, 它对系统平移、转动和反演都保持不变. 作用势只依赖于粒子间的相对坐标绝对值, 也对这些变换保持不变. 若粒子是全同粒

子, 哈密顿量还对粒子间的任意置换保持不变. 这个量子系统的对称性质就用系统对这些变换的不变性来描述.

保持系统不变的变换称为系统的对称变换, 对称变换的集合描写系统的全部对称性质. 根据系统的对称性质, 通过群论方法研究, 可以直接得到许多精确的、与细节无关的重要性质. 我们还没有学习群论方法, 还无法用群论方法对系统的复杂对称性质进行研究, 但为了使读者对群论方法有一个直观的了解, 下面举一个简单例子说明群论方法的基本思路.

研究一个具有空间反演对称性的量子系统. 系统哈密顿量对空间反演变换保持不变, 因而哈密顿量的本征函数 ψ 通过空间反演, 仍是哈密顿量同一本征值的本征函数. 用 P 代表在空间反演下波函数的变换算符

$$P\psi(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots) = \psi(-\boldsymbol{r}_1,\ -\boldsymbol{r}_2,\ \cdots),$$

则对哈密顿量, ψ 和 $P\psi$ 有相同的本征值, 而且由于哈密顿量是线性算符, ψ 和 $P\psi$ 的任何线性组合仍有相同的本征值. 取如下组合

$$\begin{aligned} &\phi_S \sim \psi + P\psi, \quad &&\phi_A \sim \psi - P\psi, \\ &P\phi_S = \phi_S, &&P\phi_A = -\phi_A. \end{aligned} \tag{1.1}$$

在空间反演中按式 (1.1) 变换的波函数 ϕ_S 和 ϕ_A 分别称为具有偶宇称和奇宇称的波函数. 我们看到, 不管系统的具体性质如何, 只要系统具有空间反演对称性, 它的定态波函数 (即哈密顿量本征函数) 总可组合成具有确定宇称状态的函数. 这就是说, 宇称是该系统的守恒量, 可以用宇称来对该系统的定态波函数进行分类. 进一步, 作为一级近似, 电偶极跃迁的概率与电偶极算符在初末态间的矩阵元模平方成比例, 这个矩阵元表达成初末态波函数和电偶极算符的乘积关于坐标的积分. 因为电偶极算符与坐标算符成比例, 是坐标的奇函数, 它在空间反演中改符号, 所以当初末态宇称相同时, 这个矩阵元的被积函数是坐标的奇函数, 它的空间积分为零. 也就是说, 在宇称状态相同的初末态间电偶极跃迁概率的一级近似为零. 这一性质在量子力学中称为电偶极跃迁选择定则.

这一简单例子说明, 尽管系统哈密顿量可能很复杂, 薛定谔方程难以精确求解, 但从研究系统的对称性质着手, 可以得到系统某些精确的与细节无关的重要性质 (例如, 根据对称性, 可确定系统的守恒量), 可对系统的定态波函数进行分类, 并可得出精确的跃迁选择定则.

1.2　群及其乘法表

保持系统不变的变换称为系统的对称变换, 系统的对称性质由对称变换的集合来描写. 我们先来研究系统对称变换集合的一般性质. 按照物理中的惯例, 两个变

换的乘积 RS 定义为相继做两次变换, 即先做 S 变换, 再做 R 变换. 显然, 两个对称变换的乘积仍是系统的对称变换, 三个对称变换的乘积满足结合律. 不变的变换, 即恒等变换 E 也是一个对称变换, 它与任何一个对称变换 R 的乘积仍是该变换 R. 对称变换的逆变换也是系统的一个对称变换. 上述性质是系统对称变换集合的共同的性质, 与系统的具体性质无关. 把对称变换集合的这些共同性质归纳出来, 得到群 (group) 的定义.

定义 1.1 在规定了元素的"乘积"法则后, 元素的集合 G 如果满足下面四个条件, 则称为群.

(1) 集合对乘积的封闭性. 集合中任意两元素的乘积仍属此集合:

$$RS \in \mathrm{G}, \quad \forall\ R \text{ 和 } S \in \mathrm{G}. \tag{1.2}$$

(2) 乘积满足结合律:

$$R(ST) = (RS)T, \quad \forall\ R,\ S \text{ 和 } T \in \mathrm{G}. \tag{1.3}$$

(3) 集合中存在恒元 E, 用它左乘集合中的任意元素, 保持该元素不变:

$$E \in \mathrm{G}, \quad ER = R, \quad \forall\ R \in \mathrm{G}. \tag{1.4}$$

(4) 任何元素 R 的逆 R^{-1} 存在于集合中, 满足

$$\forall\ R \in \mathrm{G}, \quad \exists\ R^{-1} \in \mathrm{G},\ \text{使 } R^{-1}R = E. \tag{1.5}$$

作为数学中群的定义, 群的元素可以是任何客体, 元素的乘积法则也可任意规定. 一旦确定了元素的集合和元素的乘积规则, 满足上述四个条件的集合就称为群. 系统对称变换的集合, 对于变换的乘积规则, 满足群的四个条件, 因而构成群, 称为系统的对称变换群. 在物理中常见的群大多是线性变换群、线性算符群或矩阵群. 如果没有特别说明, 当元素是线性变换或线性算符时, 元素的乘积规则都定义为相继做两次变换; 当元素是矩阵时, 元素的乘积则取通常的矩阵乘积.

在群的定义中, 群元素是什么客体并不重要, 重要的是它们的乘积规则, 也就是它们以什么方式构成群. 如果两个群, 它们的元素之间可用某种适当给定的方式一一对应起来, 而且元素的乘积仍以此同一方式一一对应 (常称对应关系对元素乘积保持不变), 那么, 从群论观点看, 这两个群完全相同. 具有这种对应关系的两个群称为同构 (isomorphism).

定义 1.2 若群 G' 和 G 的所有元素间都按某种规则存在一一对应关系, 它们的乘积也按同一规则一一对应, 则称两群同构. 用符号表示, 若 R 和 $S \in \mathrm{G}$, R' 和 $S' \in \mathrm{G}'$, $R' \longleftrightarrow R$, $S' \longleftrightarrow S$, 必有 $R'S' \longleftrightarrow RS$, 则 $\mathrm{G}' \approx \mathrm{G}$, 其中符号"$\longleftrightarrow$"代表一一对应, "$\approx$"代表同构.

互相同构的群, 它们群的性质完全相同. 研究清楚一个群的性质, 也就了解了所有与它同构的群的性质. 在群同构的定义里, 元素之间的对应规则没有什么限制. 但如果选择的规则不适当, 使元素的乘积不再按此规则一一对应, 并不等于说, 这两个群就不同构. 只要对某一种对应规则, 两个群符合群同构的定义, 它们就是同构的.

从群的定义出发, 可以证明, 恒元和逆元也满足

$$RE = R, \quad RR^{-1} = E. \tag{1.6}$$

第二个式子表明元素与其逆元是相互的. 由此易证群中恒元是唯一的, 即若 $E'R = R$, 则 $E' = E$. 群中任一元素的逆元是唯一的, 即若 $SR = E$, 则 $S = R^{-1}$. 于是, 恒元的逆元是恒元, 且 $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$. 作为逻辑练习, 习题第 1 题让读者证明这些结论. 证明中除了群的定义外, 不能用以前熟悉的任何运算规则, 因为它们不一定适合群元素的运算. 下面我们认为这些结论已经证明, 可以应用了.

一般说来, 群元素乘积不能对易, $RS \neq SR$. 元素乘积都可以对易的群称为阿贝尔 (Abel) 群. 若群中至少有一对元素的乘积不能对易, 就称为非阿贝尔群. 元素数目有限的群称为有限群, 元素的数目 g 称为有限群的阶 (order). 元素数目无限的群称为无限群, 如果无限群的元素可用一组连续变化的参数描写, 则称为连续群.

把群的子集, 即群中部分元素的集合 $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \cdots, R_m\}$, 看成一个整体, 称为复元素. 作为集合, 复元素不关心所包含元素的排列次序, 且重复的元素只取一次. 两复元素相等, 即 $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ 的充要条件是它们包含的元素相同, 即 $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. 普通元素和复元素相乘仍是复元素. $T\mathcal{R}$ 是由元素 TR_j 的集合构成的复元素, 而 $\mathcal{R}T$ 则由元素 R_jT 的集合构成. 设 $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$, 两复元素的乘积 $\mathcal{RS}$ 是所有形如 R_jS_k 的元素集合构成的复元素. 上面出现的元素乘积, 如 TR_j, R_jT 和 R_jS_k, 均按群元素的乘积规则相乘. 复元素的乘积满足结合律. 如果复元素的集合, 按照复元素的乘积规则, 符合群的四个条件, 也可构成群.

定理 1.1(重排定理)　设 T 是群 $\mathrm{G} = \{E, R, S, \cdots\}$ 中的任一确定元素, 则下面三个集合与原群 G 相同:

$$\begin{aligned} T\mathrm{G} &= \{T, TR, TS, \cdots\}, \\ \mathrm{G}T &= \{T, RT, ST, \cdots\}, \\ \mathrm{G}^{-1} &= \{E, R^{-1}, S^{-1}, \cdots\}. \end{aligned}$$

用复元素符号表达为

$$T\mathrm{G} = \mathrm{G}T = \mathrm{G}^{-1} = \mathrm{G}. \tag{1.7}$$

证明　以 $T\mathrm{G} = \mathrm{G}$ 为例证明. 集合 $T\mathrm{G}$ 的所有元素都是群 G 的元素, 故 $T\mathrm{G} \subset \mathrm{G}$. 反之, 群 G 的任意元素 R 都可表成 $R = T(T^{-1}R)$, 而 $(T^{-1}R)$ 是群 G 的元素, 故 R 属于 $T\mathrm{G}$, $\mathrm{G} \subset T\mathrm{G}$. 证完.

对于有限群，群元素数目有限，因此有可能把元素的乘积全部排列出来，构成一个表，称为群的乘法表 (multiplication table)，简称群表. 为了确定起见，对于 $RS=T$，今后称 R 为左乘元素，S 为右乘元素，而 T 为乘积元素. 乘法表由下法建立：在表的最左面一列，把全部群元素列出来，作为左乘元素，在表的最上面一行，也把全部群元素列出来，作为右乘元素，元素的排列次序可以任意选定，但常让左乘元素和右乘元素的排列次序相同，恒元排在第一位. 表的内容有 $g\times g$ 格，每一格填入它所在行最左面一列的元素 R (左乘元素) 和它所在列最上面一行的元素 S (右乘元素) 的乘积 RS. 如果恒元排在表中第一个位置，因它与任何元素相乘还是该元素，故乘法表内容中第一行和右乘元素相同，第一列和左乘元素相同. 由重排定理，乘法表乘积元素中每一行 (或列) 都不会有重复元素. **乘法表完全描写了有限群的性质**.

对两个阶数相同的有限群，当把群元素分别按一定次序列在乘法表上时，实际上已给出了它们元素之间的一种一一对应关系. 如果在此对应下，它们的乘法表完全相同，则此两群同构. 当然，如果由于群元素排列次序选得不适当，本来同构的群也可能看起来似乎有不同的乘法表. 当阶数确定后，重排定理大大限制了互相不同构的有限群数目. 例如，以后我们将证明，阶数为相同素数的有限群都同构.

我们先来看二阶群和三阶群的乘法表. 当把第一列和第一行按左乘元素和右乘元素填完后，重排定理已完全确定了表中剩余位置的填充，如表 1.1 和表 1.2 所示.

表 1.1 二阶群的乘法表

C_2	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

表 1.2 三阶群的乘法表

C_3	e	ω	ω'
e	e	ω	ω'
ω	ω	ω'	e
ω'	ω'	e	ω

在二阶群中，可让 e 代表恒等变换，σ 代表空间反演变换，则此群正是对空间反演不变的系统的对称变换群，常记为 V_2. 也可让 e 代表数 1，σ 代表数 -1，按普通的数乘积，它们也构成二阶群，记为 C_2. 这两群是同构的，$\mathrm{V}_2\approx\mathrm{C}_2$，从群论观点看它们完全相同. 三阶群中，可设 $e=1$，$\omega=\exp(-\mathrm{i}2\pi/3)$ 和 $\omega'=\exp(\mathrm{i}2\pi/3)$，按复数的乘积，它们构成三阶群，记为 C_3.

这两个例子有一个共同的特点，就是群中所有元素都可由其中一个元素的幂次来表达. 二阶群中，$e=\sigma^2$；三阶群中，$\omega'=\omega^2$，$e=\omega^3$. 推而广之，由一个元素 R 及其幂次构成的有限群称为由 R 生成的循环群，N 是循环群的阶，R 称为循环群的生成元. N 阶循环群的一般形式是

$$\mathrm{C}_N=\{E,\ R,\ R^2,\ \cdots,\ R^{N-1}\},\quad R^N=E,\quad R^{-1}=R^{N-1}. \tag{1.8}$$

循环群中元素乘积可以对易，因而循环群是阿贝尔群. 循环群生成元的选择不是唯

一的. 例如, 三阶循环群中 ω 和 ω' 都可作为生成元. 循环群的乘法表有共同的特点, 当表中元素按生成元的幂次排列时, 表的每一行都可由前一行向左移动一格得到, 而最左面的元素移到最右面去.

循环群的一个典型例子是由绕空间固定轴转动变换构成的群. 按右手螺旋法则, 绕轴的正向旋转 $2\pi/N$ 角的转动记为 C_N. 由 C_N 生成的循环群, 记为 C_N. 此轴常称为 N 次固有转动轴, 简称 N 次轴, C_N 称为 N 次固有转动, 简称 N 次转动. 对二次轴不必规定轴的正向, 因为 $C_2 = C_2^{-1}$. N 次转动和空间反演 σ 的乘积记为 S_N, $S_N = \sigma C_N = C_N\sigma$, 称为 N 次非固有转动. 由 S_N 生成的循环群记为 $\overline{\mathrm{C}}_N$, 有时也记为 S_N, 它的阶数 g 根据 N 是偶数或奇数, 分别是 N 或 $2N$. 此转动轴称为 N 次非固有转动轴.

既然有限群的元素数目是有限的, 那么有限群任一元素的自乘, 当幂次足够高时必然会有重复. 由群中恒元唯一性知, 有限群任一元素自乘若干次后必可得到恒元. 若 $R^n = E$, n 是 R 自乘得到恒元的最低幂次, 则 n 称为元素 R 的阶, R 生成的循环群称为 R 的周期. 恒元的阶为 1, 其他元素的阶可以相等, 也可以不相等, 但都大于 1. 不同元素的周期也可有重复或重合. 请注意不要混淆群的阶和元素的阶这两个不同的概念, 只有循环群生成元的阶才等于该群的阶.

有限群中任一元素 R 的周期构成群中一个子集. 若此子集尚未充满整个群, 则在子集外再任取群中一元素 S, 由 R 和 S 所有可能的乘积构成一个更大的子集. 若它还没有充满整个群, 则再取第三个、第四个元素加入上述乘积, 最后总能充满整个有限群, 即群中所有元素都可表为若干个元素的乘积. 适当选择这些元素, 使有限群中所有元素都可表为尽可能少的若干个元素的乘积, 这些元素称为有限群的生成元, 生成元不能表成其他生成元的乘积. 有限群生成元的数目称为有限群的秩.

现在来研究四阶群的乘法表. 如果群中有一个元素的阶数为 4, 则此群是四阶循环群 C_4, 它的乘法表如表 1.3 所示. 容易检验, 四阶群中元素的阶不能为 3, 否则它的周期构成三阶循环群, 而在乘法表中第四个元素所在行 (和列) 必定会出现重复元素. 余下的情况是, 除恒元外所有元素的阶数都是 2, 这样的四阶群乘法表如表 1.4 所示. 设 σ, τ 和 ρ 分别是空间反演、时间反演和时空全反演, 则此群称为四阶反演群 V_4. 对于给定的四阶群, 如何判断它与哪个群同构呢? 如果四阶群中有阶数大于 2 的元素, 它就与 C_4 群同构; 反之, 如果在四阶群中阶数等于 2 的元素多于一个, 它就与 V_4 群同构.

最简单的非阿贝尔群是正三角形对称群 D_3, 它由六个元素组成: 过三角形中心 O 垂直三角形所在平面的轴是三次轴, 以向上方向为轴的正向, 转动 $2\pi/3$ 角的元素记为 D, 逆元为 $F = D^{-1}$, 恒等变换为 E, 若三角形三个顶点分别记为 A, B 和 C, 则三个轴 OA, OB 和 OC 都是二次轴, 相应转动 π 角的元素分别也记为 A, B 和 C. 三角形顶点和对称变换元素用相同的符号标记, 一般不会引起混淆. 这些转

动是保持正三角形不变的全部变换, 因而它们的集合构成正三角形的对称变换群. 恒元的阶为 1, 三次转动元素 D 和 F 的阶为 3, 二次转动元素 A, B 和 C 的阶为 2.

表 1.3 四阶循环群 C_4 的乘法表

C_4	E	R	S	T
E	E	R	S	T
R	R	S	T	E
S	S	T	E	R
T	T	E	R	S

表 1.4 四阶反演群 V_4 的乘法表

V_4	e	σ	τ	ρ
e	e	σ	τ	ρ
σ	σ	e	ρ	τ
τ	τ	ρ	e	σ
ρ	ρ	τ	σ	e

建立群表的方法有很多, 下面结合 D_3 群, 介绍两种典型的方法. 在平面上建立平面直角坐标系 OXY, 画正三角形 $\triangle A'B'C'$, 中心在原点, A' 点在正 x 轴上, 三个顶点的坐标 (图 1.1) 分别为: $A'(2,\ 0)$, $B'(-1,\ -\sqrt{3})$ 和 $C'(-1,\ \sqrt{3})$. 把同样大小的正三角形 $\triangle ABC$ 放在平面上, A 和 A' 重合, B 和 B' 重合, C 和 C' 重合. 现在固定坐标平面, 用上述六种变换来变动 $\triangle ABC$, 使三个顶点 A, B 和 C 分别以不同方式与 A', B' 和 C' 点重合. 六种对称变换的结果列于表 1.5. 现在可利用表 1.5 来计算两变换的乘积. 例如, 计算变换乘积 DA, 点 A 在变换 A 中保持不变, 再经变换 D 变到点 C', 点 B 经变换 A 变到点 C', 然后把它看成新的 C 点, 经变换 D 变到点 B'. 两点已经完全确定了三角形变换后的位置, C 点经变换 DA 只能变到点 A'. 既然 A, B 和 C 三点经变换 DA 分别变到 C', B' 和 A' 点, 从表中查出它与变换 B 的结果相同, 可见 $DA = B$. 同理可计算其他元素的乘积. 以后为方便起见, 在与表 1.5 类似的表中把撇都省略掉.

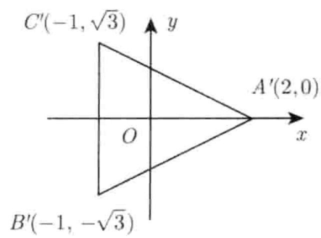

图 1.1 正三角形的坐标

学会了计算群元素乘积的方法，就可以来填写 D_3 群的乘法表. 因 D_3 群含六个元素, 乘法表中有 36 个位置要填写. 事实上, 我们不必用上法计算 36 次, 因为许多乘积可用更简单的方法算出来. 在表 1.6 中先把第一行和第一列填好, 它们代表恒元和群元素的乘积. 因为三次固有转动轴的三个元素 E, D 和 F 构成三阶循环群, 它们的乘法表已由表 1.2 给出, 可以先填好. 二次转动轴的元素 A, B 和 C 的阶为 2, 它们的平方是恒元 E, 这样在后三行对角线位置都填入 E. 再根据刚才的计算, $DA = B$, 把 B 填入第二行第四列, 第二行的剩余两格可以根据每行和每列

元素不重复的原则 (重排定理), 分别填以 C 和 A, 重排定理也决定了第三行后面三格的填充. 再根据 A, B 和 C 是二阶元素, 在 $DA = B$ 两边, 用 A 右乘得 $D = BA$, 再用 B 左乘得 $BD = A$, 从而把 D 和 A 分别填入第五行的第四和第二列. 余下的格子都可根据重排定理, 由左向右逐列填过去. 这样只用到 D_3 群群元素的阶数和公式 $DA = B$, 就完成了乘法表的填写. 由乘法表可知, D_3 群的秩为 2, 两个生成元可取 D 和 A, 则 $F = D^2$, $E = D^3$, $B = DA$ 和 $C = AD$. 一般说来, 对阶数为 g 的群, 只需要知道群元素的阶数分布和若干对元素的乘积规则, 就可以算出全部 $g \times g$ 个乘积公式来.

表 1.5　正三角形的对称变换

	E	D	F	A	B	C
A	A'	C'	B'	A'	C'	B'
B	B'	A'	C'	C'	B'	A'
C	C'	B'	A'	B'	A'	C'

表 1.6　正三角形对称群 D_3 的乘法表

	E	D	F	A	B	C
E	E	D	F	A	B	C
D	D	F	E	B	C	A
F	F	E	D	C	A	B
A	A	C	B	E	F	D
B	B	A	C	D	E	F
C	C	B	A	F	D	E

对六阶群, 若有一个元素的阶为 6, 则此群为循环群 C_6. 习题第 5 题中请大家证明: 准确到同构, 六阶群只有循环群 C_6 和正三角形对称群 D_3. 对于给定的六阶群, 如何判断它与哪个群同构呢? 如果六阶群中阶数等于 2 的元素多于一个, 它就与 D_3 群同构; 反之, 如果群中存在阶数大于 3 的元素 (自乘三次还未出现恒元), 则它就与 C_6 群同构.

现在介绍建立群乘法表的第二种典型方法. 把正三角形的变换看成平面上点的坐标变换, 变换前的坐标记为 $(x,\ y)$, 变换后的坐标记为 $(x',\ y')$, 它们都用列矩阵表出, 而变换元素表为 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

对每一个变换, 把变换前后三角形顶点的坐标代入式 (1.9), 就可定出群元素对应的矩阵形式. 注意, A' 点的坐标有一个分量为零, 计算中要尽量多利用. 例如, 变换 D 把 A 点变到 C' 点, 把 B 点变到 A' 点, 于是有等式

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

由前式不难解得 $a = -1/2$ 和 $c = \sqrt{3}/2$, 代入后式得 $b = -\sqrt{3}/2$ 和 $d = -1/2$. 用同样方法可得 6 个群元素的矩阵形式如下.