

泛函分析 在数学物理中的应用

С. Л. СОВОЛЕВ 著

崔志勇 王光烈 严子谦 译

吉林大学出版社

泛函分析 在数学物理中的应用

С. Л. СОБОЛЕВ 著

崔志勇 王光烈 严子谦 译

吉林大学出版社

С. Л. СОБОЛЕВ

НЕКОТОРЫЕ

ПРИМЕНЕНИЯ

ФУНКЦИОНАЛЬНОГО

АНАЛИЗА

В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ

ФИЗИКЕ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией О. А. ОЛЕИНИК

МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1988

泛 函 分 析
在数学物理中的应用

С. Л. СОБОЛЕВ 著

崔志勇 王光烈 严子谦 译

责任编辑：赵洪波

封面设计：张沐沉

吉林大学出版社出版
(长春市东中华路29号)

吉林省新华书店发行
梅河口市美术印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32 1990年12月第1版

印张：10.375 插页2 1992年12月第1次印刷

字数：263千字 印数：1—850册

ISBN 7-5601-0762-1/O·92 定价：3.45元



作者像

索伯列夫院士简历

索伯列夫·谢尔盖·李沃维奇 (Соболев Серге Львович), 1908年10月6日生于彼得堡, 1989年1月7日逝世于莫斯科, 苏联科学院院士(1939), 通讯院士(1933), 社会主义劳动英雄(1951), 1940年加入苏联共产党. 1929年于列宁格勒大学毕业之后, 在苏联科学院地震研究所工作, 1932—1943以及1984年之后在苏联科学院数学研究所工作, 1941—1943曾任该所所长, 1935—1957任莫斯科大学教授, 1943—1957在原子能研究所工作, 1957—1984任苏联科学院西伯利亚分院数学研究所所长和新西伯利亚大学教授, 1987年被选为莫斯科数学会荣誉会员, 从1984年开始任苏联全国数学委员会主席, 从1968年开始任西伯利亚数学杂志主编.

索伯列夫的主要工作在偏微分方程理论、数学物理、泛函分析和计算数学等方面. 他提出了解双曲型偏微分方程的一种新方法. 他与B. И. 斯米尔诺夫一起创立了解层状介质振动的动力问题的函数不变量方法. 在偏微分方程理论中系统地运用泛函分析方法是索伯列夫首创的. 他引进了一类泛函空间(现在被人们称为索伯列夫空间), 并且研究了这些空间之间的嵌入关系. 他引进了偏微分方程广义解的概念, 并且在1935年给出了广义函数的第一个严格定义. 他还利用这些概念研究了偏微分方程若干边值问题. 在计算数学方面, 索伯列夫引进了算法封闭性概念, 给出了多重求积公式误差的模的精确估计.

索伯列夫是柏林大学名誉博士(1963), 爱丁堡皇家学会名誉会员(1963), 法国生活研究所组织委员会成员(1963), 美国数学会会员(1964), 布拉格卡尔洛夫大学名誉科学博士(1965), 意

大利林奇国家科学院外籍院士(1966),民主德国科学院外籍院士(1967),意大利促进科学进步委员会名誉院士(1977),巴黎科学院外籍院士(1978, 1967 为通讯院士)。他曾于 1941、1951、1953、1986 年四次获国家奖金,1981 与 1987 年分别获得捷克斯洛伐克科学院“对科学与人类的贡献”金质与银质奖章。他荣获七次列宁勋章(1945、1949、1951、1953、1958、1967、1975)及十月革命勋章(1978)、劳动红旗勋章(1954)、荣誉奖章(1940)。

主要著作:

数学物理方程,第 4 版,1966.

泛函分析在数学物理中的应用,第 3 版,1988.

高级机械求积公式,1974.

(译自“Математический Энциклопедический словарь”, 1988, Москва, 苏联百科出版社.)

本书俄文第三版中译本说明

自 1950 年本书初版以来,这四十年数学科学发展的历史极其充分地表明,这部早被视作经典著作的书,其所论及的观念和技巧,业已根深蒂固地成为偏微分方程以及其它众多有关领域的现代研究所必需. 1988 年出版的本书第三版,是在作者的学生和朋友 О. А. Олейник 等几位苏联知名数学家的协助下,对原书作了实质性的修改与补充,并添了不少有益的注释而成的. 因此,很值得译成中文以广为流传. 此次翻译参考了 1959 年由科学出版社出版的王柔怀、陈诗华、童勤谟所译的本书初版的译本,王柔怀教授还为我们的译稿作了悉心的校改,谨此一并致谢. 译者还要感谢冯果忱教授为我们及时提供了此书的俄文原本以及作者的简历的译文.

译 者

1990 年 12 月于长春

第一版序言

本书是作者在荣获列宁勋章的国立列宁格勒大学教过的讲义经过修改而成的。讲义是由 X. Л. Смолицкий 与 И. А. Яковлев 所记录的,并经过他们的整理和修改;他们还对讲义的内容作了一系列有价值的更动和补充。此外,在这部讲义的出版过程中,作者本人自然也做了一系列补充。

这样就产生了这部用统一观点来讲述偏微分方程理论中一系列问题的著作。书中讨论了变分方法对 Laplace 方程与多重调和方程的应用以及关于线性和拟线性双曲方程的 Cauchy 问题^{*)}。在阐述数学物理问题之前,我们详细讨论了泛函分析的一些新结果和新方法,它们将是以后的基础。第一章即为此而设,上述这些材料和问题的特殊提法以及它们的研究方法,在一般的数学物理教程,特别是我的《数学物理方程》教程中是没有的,本书是为研究生和科学工作者而写。

作者谨向自己的学生 X. Л. Смолицкий 与 И. А. Яковлев 致以热忱的谢意,没有他们的帮助,也许这部书就不可能在这样短促的时间内写出来。

С. Соболев

*) 有关拟线性双曲方程的段落,在第三版中已被删去。

——编辑注

第三版序言

本书是我的讲义《泛函分析在数学物理中的应用》经过实质性修改后的再版。该讲义于1950年由列宁格勒大学出版社出版,并且未加改动地于1962年在新西伯利亚再版,在中华人民共和国(1959年)、美国(1963年)、日本(1963年)和德意志民主共和国(1964年)翻译出版。

本版中改正了印刷错误和疏漏,精确化了某些定义和定理的陈述,增加了解释并对许多证明做了修改,给出了文献方面的注释,作了一些文字上的改动。

按照 O. A. Олейник 的建议,在书中作为第三章的附录,安排了我的论文《线性正规双曲型方程 Cauchy 问题的新解法》。该文于1936年发表在“Математический Сборник”杂志上(该文结果的摘要包含在简报《泛函空间的 Cauchy 问题》之中,载于1935年的“Доклады НА СССР”上。这篇文章是第三章 § 21 的自然延伸。它包括广义函数理论基础的阐述,以及二阶双曲型方程 Cauchy 问题在泛函(广义函数、分布)空间的解法。该文从法文翻译成俄文是由 В. Л. Лаламопов 完成的。他还为该文写了注释。

五十多年前在我国和国外完成的一些工作所奠定的泛函分析在数学物理中应用的基础(广义导数概念,微分方程的广义解,嵌入定理,广义函数等等),现已成为很多理论进一步研究的出发点,诸如微分方程论,数学物理,函数论,泛函空间理论,以及旨在建立把泛函分析应用于研究微分方程的工具的许多其它分析领域。在建立这种工具的过程中,1950—1951年间出现的 L. Schwartz 关于广义函数(分布)理论的工作,以及由他引进的

广义函数的 Fourier 变换的概念,起了很大的作用. 所论研究工具在半个多世纪内的发展,导致了偏微分方程理论和数学物理的巨大进展,这方面的成就可以从 L. Hörmander 的四卷巨著 “The analysis of linear partial differential operators”(有俄译本)当中看到;在一定意义下,这部著作对迄今为止的线性偏微分方程一般理论的研究做了总结. 这种工具已根深蒂固地成为现代化研究的必需品. 它的基本知识已被包含在相应的大学生必修课中.

本书提供了一些注释,说明近年来对所论问题进行的研究情况,可是,所引的文献无论如何却不能认为是完全的.

这部书既是为数学、力学、物理方面的大学生和研究生,也是为在自己的工作中应用微分方程及其研究方法的科学工作者而写的.

谨向我的学生和朋友 О. А. Олейник 表示深切的谢意,她在本版的实质性修改和补充的准备工作中付出了巨大的和忘我的劳动.

深切感谢 В. И. Буренков,他所作的大量繁重的工作,已经远远超出通常编辑工作的范围.

向 В. И. Лаламодов 表示诚挚的谢意,他翻译了我的论文并为之做了注释.

还要感谢 О. В. Бесов, Б. Р. Вайберг, М. И. Вишник, М. В. Карасев, Б. М. Левитан, В. Г. Мазья, В. Г. Перепелкин,他们提供了再版中用来撰写注释和编排文献目录的材料.

我还感谢我的女儿 Т. С. Соболева,在手稿的准备过程中她给予我很大的帮助.

С. Л. Соболев

目 录

第一章 泛函分析中的特殊问题	(1)
§ 1 引言	(1)
1. 可和函数	(1)
2. Hölder 不等式和 Minkowski 不等式	(3)
3. 逆 Hölder 不等式和逆 Minkowski 不等式	(8)
§ 2 L_p 空间的基本性质	(9)
1. 范数、定义	(9)
2. Riesz-Fischer 定理	(12)
3. L_p 中函数的整体连续性	(12)
4. 均值函数	(14)
5. 可数稠密网	(17)
§ 3 L_p 上的线性泛函	(18)
1. 定义、线性泛函的有界性	(18)
2. Clarkson 不等式	(19)
3. 关于线性泛函的一般形式的定理	(24)
4. 泛函的收敛性	(27)
§ 4 L_p 空间的紧性	(31)
1. 紧性的定义	(31)
2. 关于弱紧性的定理	(31)
3. 关于强紧性的定理	(33)
4. 强紧性定理的证明	(34)
§ 5 广义导数	(37)
1. 基本定义	(37)
2. 均值函数的导数、广义导数的存在性	(39)

3. 微分法则	(41)
4. 与区域的无关性	(44)
§ 6 位势型积分的性质	(46)
1. 位势型积分、连续性	(46)
2. 属于 L_q 的性质	(47)
§ 7 $L_p^{(1)}$ 和 $W_p^{(1)}$ 空间	(49)
1. 定义	(49)
2. $L_p^{(1)}$ 中的范数	(50)
3. $W_p^{(1)}$ 的分解及其赋范	(52)
4. $W_p^{(1)}$ 的特殊分解	(55)
§ 8 嵌入定理	(62)
1. $W_p^{(1)}$ 嵌入 C	(62)
2. $W_p^{(1)}$ 嵌入 L_q	(63)
3. 例子	(64)
§ 9 $W_p^{(1)}$ 的一般赋范方法和嵌入定理的推论	(67)
1. 关于等价范数的定理	(67)
2. 与给定范数等价的范数的一般形式	(69)
3. 与特定范数等价的范数	(71)
4. 球投影算子	(72)
5. 非星形域	(73)
6. 例子	(74)
§ 10 嵌入定理的某些推论	(76)
1. $W_p^{(1)}$ 空间的完备性	(76)
2. $W_p^{(1)}$ 嵌入 $W_p^{(1)}$	(77)
3. $W_p^{(1)}$ 中的不变赋范	(80)
§ 11 嵌入算子的全连续性(Кондрашов 定理)	(82)
1. 问题的提出	(82)
2. 关于特殊积分在 C 中的紧性引理	(83)
3. 关于积分在 L_q 中的紧性引理	(84)

4. 嵌入 C 内的嵌入算子的全连续性	(90)
5. 嵌入 L_q 内的嵌入算子的全连续性	(92)
第二章 数学物理中的变分方法	(94)
§ 12 Dirichlet 问题	(94)
1. 引言	(94)
2. 变分问题的解	(95)
3. Dirichlet 问题的解	(98)
4. Dirichlet 问题解的唯一性	(101)
5. Hadamard 的例子	(105)
§ 13 Neumann 问题	(106)
1. 问题的提出	(106)
2. 变分问题的解	(107)
3. Neumann 问题的解	(109)
§ 14 多重调和方程	(111)
1. $W_2^{(m)}$ 中函数在各种维数的边界流形 附近的性质	(111)
2. 基本边界问题的提出	(113)
3. 变分问题的解	(114)
4. 基本边界问题的解	(116)
§ 15 多重调和方程的基本边界问题的 解的唯一性	(120)
1. 问题的提出	(120)
2. 引理	(121)
3. 区域 $\Omega_k - \Omega_{3k}$ 的结构	(123)
4. 当 $k \leq \left[\frac{s}{2} \right]$ 时引理的证明	(125)
5. 当 $k = \left[\frac{s}{2} \right] + 1$ 时引理的证明	(127)
6. 当 $\left[\frac{s}{2} \right] + 2 \leq k \leq m$ 时引理的证明	(130)

7. 关于边界问题提法的注	(132)
§ 16 特征值问题	(132)
1. 引言	(132)
2. 辅助不等式	(133)
3. 极小化序列和变分方程	(135)
4. 后续特征函数的存在性	(141)
5. 特征值的无穷序列	(144)
6. 特征函数集的封闭性	(145)
第三章 双曲型偏微分方程理论	(149)
§ 17 具有光滑初始条件的波动方程的 Cauchy 问题的解	(149)
1. 基本不等式的推导	(149)
2. 解及其导数增长的估计	(152)
3. 特殊初始条件下的解	(154)
§ 18 波动方程的广义 Cauchy 问题	(158)
1. 两次连续可微的解	(158)
2. 例	(161)
3. 广义解	(163)
4. 初值的存在	(164)
5. 广义 Cauchy 问题的解	(167)
§ 19 变系数线性正规双曲型方程(基本性质)	(168)
1. 特征和次特征	(168)
2. 特征劈锥	(175)
3. 在标准坐标下的方程	(177)
4. 在极坐标下的基本算子 $M^{(0)}$ 与 $L^{(0)}$	(179)
5. 锥面上的一组基本关系式	(184)
§ 20 具有光滑系数的线性方程的 Cauchy 问题	(185)
1. 与基本组中算子共轭的算子	(185)
2. 函数 σ_i 的作法	(187)

3. 函数 σ 的性质的研究	(190)
4. 基本积分恒等式 $Bu = SF$ 的推导	(192)
5. 逆积分算子 B^{-1} 与逐步逼近法	(194)
6. 共轭积分算子 B^*	(197)
7. 共轭积分算子 S^*	(201)
8. 偶数个自变量的 Cauchy 问题的解	(202)
9. 奇数个自变量的 Cauchy 问题	(204)
§ 21 变系数的线性双曲型方程的研究	(205)
1. 化简方程	(205)
2. 广义解的 Cauchy 问题的提法	(208)
3. 基本不等式	(210)
4. 关于近似解的估计式的引理	(214)
5. 广义 Cauchy 问题的解	(220)
6. 古典 Cauchy 问题的提法	(221)
7. 关于导数估计式的引理	(224)
8. 古典 Cauchy 问题的解	(227)
注释	(228)
附录 线性正规双曲型方程 Cauchy 问题的新解法	(249)
§ 1 基本恒等式	(250)
1. Cauchy 问题	(250)
2. 预备性的讨论	(251)
3. 给定函数各阶导数间的某些关系	(255)
4. 构造函数 σ_r	(257)
5. 第一基本恒等式	(263)
6. 逐步逼近法和第二基本公式	(268)
7. 第一个解法	(271)
§ 2 泛函空间	(271)
1. 基本泛函空间	(271)
2. 泛函的某些重要例子、泛函的逼近定理	(273)

3. 线性算子的某些重要例子、共轭算子	(274)
4. 泛函空间中的 Cauchy 问题	(276)
§ 3 广义 Cauchy 问题	(278)
1. 基本逆算子的研究	(278)
2. 双曲型空间	(280)
3. 与 G 共轭的算子	(281)
4. 逆问题	(282)
5. 在泛函空间中算子 L 的右逆和左逆	(283)
6. 广义 Cauchy 问题的存在性和唯一性	(284)
7. 在古典意义下解的存在性	(285)
附录的注释	(286)
参考文献	(303)
补充参考文献	(319)

第一章 泛函分析中的特殊问题

§ 1 引言

在本书研究的所有问题的叙述中,需要多次引用 Lebesgue 可积函数的一些最简单的性质,以及泛函分析中一些最简单的概念和定理;它们现在已是众所周知的了. 所以,我们大都不去叙述其证明,而只重复必要的陈述与定义.

为了理解下述材料,只须熟悉实变函数的重积分理论,例如 С. Л. Соболев 《数学物理方程》^[212] 第六讲,或是 В. И. Смирнов 《高等数学教程》第五卷^[190] 的内容. 有关所讨论的函数论和泛函分析问题的补充知识,可以从 А. Н. Колмогоров 和 С. В. Фомин, Л. В. Канторович 和 Г. П. Акилов, F. Riesz 和 B. S. Nagy 以及 W. Rudin 等人的书^[95, 89, 182, 184] 中找到.

现在我们回忆一下重积分和可和函数的若干性质.

1. 可和函数

对于有界区域 Ω 内的任一 n 元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$, 总能找到一些闭集 F , 使该函数在 F 上连续*).

对于一个非负函数 f , 称上界

$$(BH) \quad \int_{\Omega} f dx_1 \cdots dx_n = \sup_{F \subset \Omega} \int_F f dx_1 \cdots dx_n \quad (1.1)$$

为它的内积分.

一个非负函数的内积分如果存在, 且具有如下性质:

*) 今后如不特殊说明, 总假定区域 Ω 是有界的.