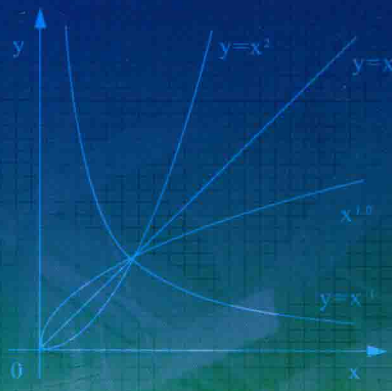
高职高专“十二五”规划教材

YINGYONG SHUXUE JICHU

应用数学基础

刘学才　周　文　主编



化学工业出版社

高◎职◎高◎专◎“十二五”◎规◎划◎教◎材

应用数学基础

刘学才　周　文　主编

化学工业出版社

·北京·

本书用实际案例或配以几何图形直观描述，使抽象的数学概念形象化，降低了学习难度，便于学生学习。全书共7章，其中初等数学重点结合建筑工程、经济管理类及机电类专业的需求，安排了初等数学中的知识及有关面积、体积的计算；一元函数微积分内容包含函数的极限、导数及其应用、积分及其应用；傅里叶级数及拉普拉斯变换、概率统计部分内容包含概率论和数理统计。

本书说理浅显，便于自学，既适合作为高职高专教育“高等数学”课程的教材，也可以作为成人高等教育工科类各专业学生的教材或工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础/刘学才，周文主编．—北京：化学工业出版社，2015.8

ISBN 978-7-122-24094-1

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①刘…②周…　Ⅲ.①应用数学-教材　Ⅳ.①029

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第138225号

责任编辑：蔡洪伟　甘九林　　文字编辑：谢蓉蓉
责任校对：宋　玮　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：三河市延风印装有限公司
787mm×1092mm　1/16　印张16¾　字数440千字　2015年9月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：34.00元

前言

根据教育部、财政部关于建立“国家示范性高等职业院校建设计划”骨干高职院校相关文件的精神，在高职院校工学结合的大背景下，结合湖北职业技术学院建筑及经济管理类、机电类等专业的课程改革，我们作了认真的调查、分析、研究，并参考专业老师的建议，在教务处李佳胜处长、建筑学院院长黄享苟、公共课部刘想元主任的支持下，我们对适用多年的教材《应用高等数学》进行了较大幅度的调整，力求完善，编写完成了《应用数学基础》，是湖北省教育科学“十二五”规划2014年重点课题“高职院校高等数学分层教学的探索与实践”（课题编号2014A060）的研究成果之一。

全书共7章，其中初等数学重点结合建筑工程、经济管理类及机电类专业的需求，安排了初等数学中的知识及有关面积、体积的计算；一元函数微积分内容包含函数的极限、导数及其应用、积分及其应用；傅里叶级数及拉普拉斯变换、概率统计部分内容包含概率论和数理统计。全书由刘学才、周文主编，叶菊芳副主编，邹小云参编，最后由主编修改、统稿、定稿。

本书在编写过程中，力求体现以下特点：

① 适合当前高职高专学生使用。针对高职学生的特点，对教学内容予以不同程度的精简与优化。对定理、性质等以解释清楚为度，不追求理论上的严密性与系统性。在淡化理论的同时也适度考虑一些必要的证明，意在培养学生必要的逻辑推理能力。

② 重视直观化描述。对常用数学概念和结论的引入与叙述，尽可能用实际案例或配以几何图形直观描述，力求使抽象的数学概念形象化，以降低学习难度，有助于学生更好地掌握数学知识。

③ 紧密结合建筑及经济管理各专业人才培养的目标。根据专业的需要确定教学内容，安排了很多来自建筑工程实际的例题和习题，体现了数学知识尽量与专业知识相结合的原则，为学生学习专业知识打下坚实的理论基础。

④ 突出应用性，体现新颖性。学以致用，有利于提高学生数学知识的应用意识与学习兴趣，并使之具有一定的把实际问题转化为数学模型的能力。

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2015.6.1

目录

第1章　基础数学

大千世界万事万物，无不在一定的空间中运动变化，而在这过程中都存在一定的数量关系．数学是研究现实中数量关系与空间形式的科学．初等数学研究的是规则、平直的几何对象和均匀有限过程的常量，亦称常量数学．

1.1　一次函数、正比例函数、反比例函数、二次函数

1.1.1　一次函数与正比例函数

案例 1【行驶路程】

汽车以 60 千米/小时的速度匀速行驶，行驶路程为 y（千米）与行驶时间 x（小时）之间的关系．

案例 2【水池的蓄水量】

某蓄水池有水 15 立方米，现打开进水管进水，进水速度为 5 立方米/小时，多长时间后这个水池内有水 40 立方米？

概念和公式的引出

正比例函数　形如 $y=kx(k\neq 0)$ 的函数为正比例函数．

一次函数　形如 $y=kx+b(k\neq 0,b$ 为常数）的函数为一次函数．

进一步的练习

练习 1　【日常生活中的函数问题】

（1）某辆汽车油箱中原有汽油 60 升，汽车每行驶 50 千米耗油 6 升，你能写出耗油量 z（升）与汽车行驶路程 x（千米）之间的关系式吗？

因为　路程＝速度×时间，所以　$z=0.12x$

（2）你能算出每行驶一千米的耗油量吗？若油箱中的汽油为 y(升)，则你能写出 y 与 x 的关系吗？

一千米的耗油量＝6÷50＝0.12(升)

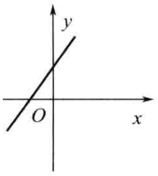
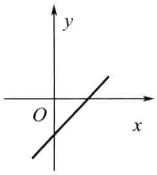
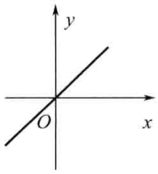
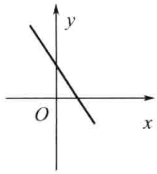
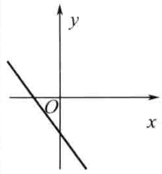
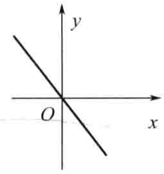
所以　$y=60-0.12x$

（3）某种大米的单价是 2.2 元/千克，当购买 x 千克大米时，花费为 y 元。y 是 x 的一次函数吗？是正比例函数吗？

$y=2.2x$，可见 y 是 x 的一次函数，且是正比例函数．

一次函数、正比例函数的图像与性质，见表 1-1.

表 1-1

一次函数	$k=kx+b(k\neq 0)$					
k,b 符号	$k>0$			$k<0$		
	$b>0$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$b<0$	$b=0$
图像						
性质	y 随 x 的增大而增大			y 随 x 的增大而减小		

正比例函数（$b=0$）的图像是过原点的一条直线．当 $k>0$ 时，图像经过第一、三象限；当 $k<0$ 时，图像经过第二、四象限．

1.1.2 反比例函数

案例 3【行驶路程】

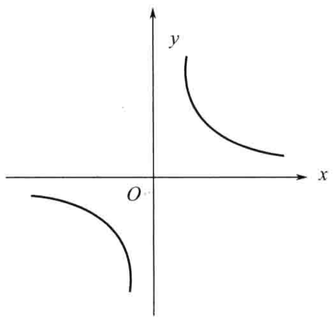
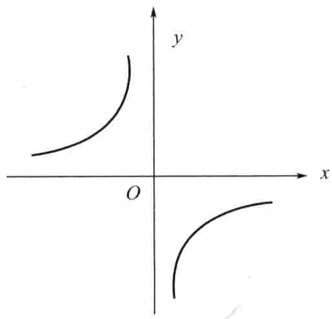
A 地到 B 地的路程为 1200 千米，某人开车要从 A 地到 B 地，汽车的速度 v（千米/小时）和时间 t（小时）之间的关系式为 $vt=1200$，建立 t 和 v 之间的关系式．

概念和公式的引出

反比例函数　形如 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的函数为反比例函数．

反比例函数的图像与性质，见表 1-2.

表 1-2

函数解析式	$k>0$	$k<0$
$y=\dfrac{k}{x}$		
增减性	在每一象限内，y 随 x 增大而减小	在每一象限内，y 随 x 增大而增大

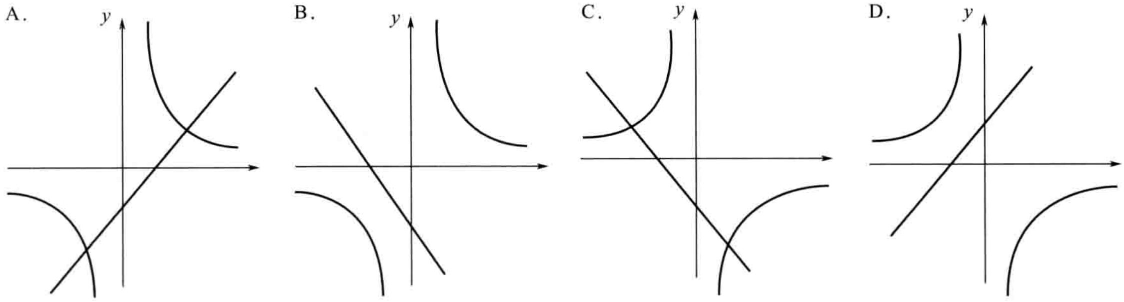
反比例函数图像中每一象限的每一支曲线会无限接近 X 轴 Y 轴，但不会与坐标轴相交（$k\neq 0$）．

进一步的练习

练习 2 一个矩形的面积为 20 平方米，相邻的两条边长分别为 x 米和 y 米，试建立函数 y 和 x 的函数关系．

$$\left[y=\frac{20}{x}(0<x<20)\right]$$

练习 3 $y=\frac{a}{x}(a\neq 0)$ 与 $y=a(x-1)(a\neq 0)$ 在同一坐标系中的大致图像是（ ）．



首先把一次函数化为 $y=ax-a$，再分情况进行讨论，即：$a>0$ 时；$a<0$ 时，分别讨论出两函数所在象限，即可选出答案．

解：$y=a(x-1)=ax-a$，

当 $a>0$ 时，反比例函数在第一、三象限，一次函数在第一、三、四象限；当 $a<0$ 时，反比例函数在第二、四象限，一次函数在第一、二、四象限．故选：A.

练习 4 某学校需刻录一些电脑光盘，若到电脑公司刻录，每张需 8 元，若学校自刻，除租用刻录机 120 元外，每张还需成本 4 元，问这些光盘是到电脑公司刻录还是学校自己刻，费用较省？

分析：此题要考虑 x 的范围．

解：设总费用为 y 元，刻录 x 张．

电脑公司：$y_1=8x$.

学校：$y_2=4x+120$.

当 $y_1=y_2$ 时（$x=30$），电脑公司刻录或学校自己刻费用一样．

当 $y_1>y_2$ 时（$x>30$），电脑公司刻录比学校自己刻费用要省．

当 $y_1<y_2$ 时（$x<30$），学校自己刻比电脑公司刻录费用要省．

练习 5 我市某蔬菜生产基地在气温较低时，用装有恒温系统的大棚栽培一种在自然光照且温度为 18℃的条件下生长最快的新品种．图 1-1 是某天恒温系统从开启到关闭及关闭后，大棚内温度 y(℃) 随时间 x(小时) 变化的函数图像，其中 BC 段是双曲线 $y=\frac{k}{x}$的一部分．请根据图中信息解答下列问题：

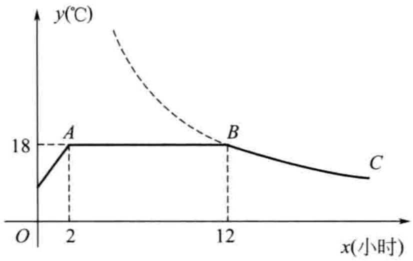


图 1-1

（1）恒温系统在这天保持大棚内温度 18℃的时间有多少小时？[10 小时]

（2）求 k 的值．[$k=216$]

（3）当 $x=16$ 时，大棚内的温度约为多少度？[13.5℃]

1.1.3 二次函数

案例 4

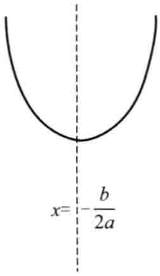
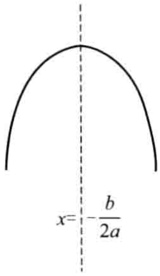
要用总长为 60 米的篱笆围成一个矩形的场地，矩形面积 S 随矩形一边长 L 的变化而变化，当 L 是多少时，围成的矩形面积 S 最大？

概念和公式的引出

二次函数　把形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0,a,b,c$ 均为常数）的函数称为二次函数 .

性质与图像，见表 1-3.

表 1-3

$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$	$a>0$	$a<0$
图像		
定义域	$(-\infty,+\infty)$	
对称轴	$x=-\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
值域	$\left(\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$	$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$
单调区间	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 递减 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 递增	$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 递增 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 递减

进一步的练习

练习 6　$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的对称轴为 $x=2$，且经过点 $P(3,0)$. 则 $a+b+c=($　$)$.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

练习 7　心理学家发现，学生对概念的接受能力 y 与提出概念所用的时间 x（单位：分钟）之间满足函数关系：$y=-0.1x^2+2.6x+43(0<x<30)$. y 值越大，表示接受能力越强.

（1）x 在什么范围内，学生的接受能力逐步增强？x 在什么范围内，学生的接受能力逐步降低？

（2）第 10 分钟时，学生的接受能力是多少？

（3）第几分钟时，学生的接受能力最强？

分析：将抛物线 $y=-0.1x^2+2.6x+43$ 变为顶点式为：$y=-0.1(x-13)^2+59.9$，根据抛物线的性质可知开口向下，当 $x<13$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>13$ 时，y 随 x 的增大而减小．而该函数自变量的范围为：$0<x<30$，所以两个范围应为：$0<x<13$、$13<x<30$. 将 $x=10$ 代入，求函数值即可．由顶点解析式可知在第 13 分钟时接受能力为最强．解题过程如下：

解：（1）$y=-0.1x^2+2.6x+43=-0.1(x-13)^2+59.9$.

所以，当 $0<x<13$ 时，学生的接受能力逐步增强．

当 $13<x<30$ 时，学生的接受能力逐步下降．

（2）当 $x=10$ 时，$y=-0.1\times(10-13)^2+59.9=59$.

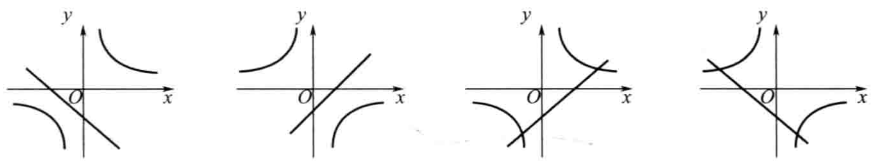
第 10 分钟时，学生的接受能力为 59.

（3）$x=13$ 时，y 取得最大值，

所以，在第 13 分钟时，学生的接受能力最强．

☆ 习题 1.1

1. 在同一平面直角坐标系中，函数 $y=x-1$ 与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像可能是（　　）．



A　　B　　C　　D

2. 如图 1-2，点 P 是正比例函数 $y=x$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 在第一象限内的交点，$PA\perp OP$ 交 x 轴于点 A，$\triangle POA$ 的面积为 2，则 k 的值是__________．

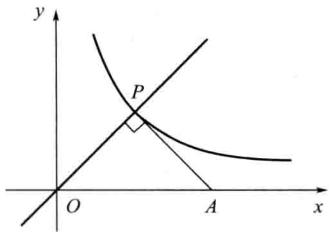


图 1-2

3. 已知正比例函数 $y=-4x$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图像交于 A、B 两点，若点 A 的坐标为 $(x,4)$，则点 B 的坐标为__________．

4. 经过点 $(2,0)$ 且与坐标轴围成的三角形面积为 2 的直线解析式是__________．

5. 在二次函数 $y=x^2+bx+c$ 中，函数 y 与自变量 x 的部分对应值如表 1-4：

表 1-4

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	7	2	-1	-2	m	2	7

则 m 的值为__________．

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数 $y=kx$ 的图像与反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图像有一个交点 $A(m,2)$．

（1）求 m 的值；

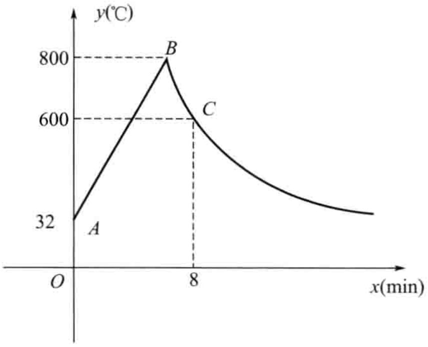


图 1-3

(2) 求正比例函数 $y=kx$ 的解析式；

(3) 试判断点 $B(2,3)$ 是否在正比例函数图像上，并说明理由．

7. 工匠制作某种金属工具要进行材料煅烧和锻造两个工序，即需要将材料烧到 800℃，然后停止煅烧进行锻造操作，经过 8min 时，材料温度降为 600℃．煅烧时温度 y(℃) 与时间 x(min) 成一次函数关系；锻造时，温度 y(℃) 与时间 x(min) 成反比例函数关系（如图 1-3）．已知该材料初始温度是 32℃．

(1) 分别求出材料煅烧和锻造时 y 与 x 的函数关系式，并且写出自变量 x 的取值范围；

(2) 根据工艺要求，当材料温度低于 480℃时，须停止操作．那么锻造的操作时间有多长？

8. 某商店经销一种销售成本为每千克 40 元的水产品，据市场分析，若按每千克 50 元销售，一个月能售出 500 千克；销售单价每涨 1 元，月销售量就减少 10 千克．针对这种水产品的销售情况，请解答以下问题：

(1) 当销售单价定为每千克 55 元时，计算月销售量和月销售利润；

(2) 设销售单价为每千克 x 元，月销售利润为 y 元，求 y 与 x 的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）；

(3) 商店想在月销售成本不超过 10000 元的情况下，使得月销售利润达到 8000 元，销售单价应定为多少？

1.2 不等式、一元一次不等式、一元二次不等式

不等关系是客观世界中量与量之间的一种主要关系，而不等式则是反映这种关系的基本形式．你还记得小孩玩的跷跷板吗？你想过它的工作原理吗？看一看在古代，我们的祖先就懂得了跷跷板的工作原理，并且根据这一原理设计出了一些简单机械，并把它们用到了生活实践当中．由此可见，“不相等”处处可见．

1.2.1 不等式

案例 1【跨栏成绩】

2006 年 7 月 12 日，在国际田联超级大奖赛洛桑站男子 110 米栏比赛中，我国百米跨栏运动员刘翔以 12 秒 88 的成绩夺冠，并打破了尘封 13 年的世界纪录 12 秒 91，为我国争得了荣誉．如何体现两个纪录的差距？

通常利用观察两个数的差的符号，来比较它们的大小．因为 $12.88-12.91=-0.03<0$，所以得到结论：刘翔的成绩比世界纪录快了 0.03 秒．

对于两个任意的实数 a 和 b，有：

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$
$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$
$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

因此，比较两个实数的大小，只需要考察它们的差即可．

概念和公式的引出

不等式　表示不相等关系的式子．

不等式的基本性质

性质 1　如果 $a>b$，且 $b>c$，那么 $a>c$．（不等式的传递性）

性质 2　如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$．

性质 3　如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；

如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$．

进一步的练习

练习 1　用符号“>”或“<”填空，并说出应用了不等式的哪条性质．

（1）设 $a>b$，$a-3$ ____ $b-3$；

（2）设 $a>b$，$6a$ ____ $6b$；

（3）设 $a>b$，$-4a$ ____ $-4b$；

（4）设 $a<b$，$5-2a$ ____ $5-2b$．

解：（1）$a-3>b-3$，应用不等式性质 2；

（2）$6a>6b$，应用不等式性质 3；

（3）$-4a<-4b$，应用不等式性质 3；

（4）$5-2a>5-2b$，应用不等式性质 2 与性质 3.

1.2.2　一元一次不等式

案例 2【射击比赛】

某射击运动员在一次比赛中前 6 次射击共中 52 环，如果他要打破 89 环（10 次射击）的纪录，第 7 次射击不能少于多少环？

解：设第 7 次射击的成绩为 x 环，由于最后三次射击最多共中 30 环，要破纪录则需有 $x>7$，因为 x 是正整数，所以 $x\geqslant 8$.

答：第 7 次射击不能少于 8 环．

概念和公式的引出

一元一次不等式：只含有一个未知数，且未知数的次数是一次的不等式．

一元一次不等式组：由几个含有同一个未知数的一次不等式组成的不等式组．

不等式组的解集：不等式组中所有不等式的解集的公共部分．

不等式的解集：一个含有未知数的不等式的解的全集．

解一元一次不等式：解法和解一元一次方程很类似，但要牢记不等式两边乘以（或除以）同一个负数，必须改变不等式的方向．

解一元一次不等式组的步骤：

（1）先求出不等式组里每个不等式的解集；

（2）再求出各个不等式的解集的公共部分，就可以得到这个不等式组的解集；

（3）一个不等式组里各个不等式的解集如果没有公共部分，那么这个不等式组无解．

进一步的练习

练习 2　【日常生活中的随机问题】

燃放某种礼花弹时，为了确保安全，人在点燃导火线后要在燃放前转移到 10 米以外的安全区域．已知导火线的燃烧速度为 0.02 米/秒，人离开的速度为 4 米/秒，那么导火线的长度应为多少厘米？

解： 设导火线的长度应为 x 厘米，根据题意，得 $\frac{0.01x}{0.02}\times 4>10$ 即 $x>5$. 想一想：$x=5,6,8$ 能使不等式 $x>5$ 成立吗？

练习 3　【汽车的经济时速】

汽车的经济时速是指汽车最省油的行驶速度．某种汽车在每小时 70～110 公里（千米）之间行驶时（含 70 公里和 110 公里），每公里耗油 $\frac{1}{18}+\frac{450}{x^2}$ 升．若该汽车以每小时 x 公里的速度匀速行驶，1 小时的耗油量为 y 升．

（1）求 y 关于 x 的函数关系式（写出自变量 x 的取值范围）；

（2）求该汽车的经济时速及经济时速的百公里耗油量（结果保留小数点后一位）．

分析：（1）根据耗油总量＝每公里的耗油量×行驶的速度，列出函数关系式即可；

（2）经济时速就是耗油量最小的行驶速度．

解：（1）∵汽车在每小时 70～110 公里之间行驶时（含 70 公里和 110 公里），每公里耗油 $\frac{1}{18}+\frac{450}{x^2}$ 升，

$$\therefore y=x\left(\frac{1}{18}+\frac{450}{x^2}\right)=\frac{x}{18}+\frac{450}{x}(70\leqslant x\leqslant 110).$$

（2）根据材料得：当 $\frac{x}{18}=\frac{450}{x}$ 时有最小值，解得：$x=90$.

∴该汽车的经济时速为 90 千米/小时；

当 $x=90$ 时百公里耗油量为 $100\times\left(\frac{1}{18}+\frac{450}{8100}\right)\approx 11.1$ 升．

案例 3【列车速度】

资料显示：随着科学技术的发展，列车运行速度不断提高，运行时速达 200 公里以上的旅客列车称为新时速旅客列车．在北京与天津两个直辖市之间运行的，设计运行时速达 350 公里的京津城际列车呈现出超越世界的“中国速度”，使得新时速旅客列车的运行速度值界定在 200 公里/小时与 350 公里/小时之间．

如何表示列车的运行速度的范围？

可用不等式：$200<v<350$；集合：$\{v\mid 200<v<350\}$；

在数轴上是位于 2 与 3.5 之间的一段不包括端点的线段．

概念和公式的引出

一般地，由数轴上两点间的一切实数所组成的集合叫做区间．其中，这两个点叫做区间端点．不含端点的区间叫做开区间．如集合 $\{x\mid 2<x<4\}$ 表示的区间是开区间，用记号 $(2,4)$ 表示．其中 2 叫做区间的左端点，4 叫做区间的右端点．

含有两个端点的区间叫做闭区间，如集合 $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$ 表示的区间是闭区间，用记号 $[2,4]$ 表示．

只含左端点的区间叫做右半开区间，如集合$\{x \mid 2 \leqslant x < 4\}$表示的区间是右半开区间，用记号$[2,4)$表示．

只含右端点的区间叫做左半开区间，如集合$\{x \mid 2 < x \leqslant 4\}$表示的区间是左半开区间，用记号$(2,4]$表示．

案例3中，新时速旅客列车的运行速度值（单位：公里/小时）用区间表示为$(200, 350)$．各种区间表示的集合见表1-5（表中a、b为任意实数，且$a<b$）．

表 1-5

区间	(a,b)	$[a,b]$	$(a,b]$	$[a,b)$	$(-\infty,b)$
集合	$\{x \mid a<x<b\}$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	$\{x \mid a<x \leqslant b\}$	$\{x \mid a \leqslant x<b\}$	$\{x \mid x<b\}$
区间	$(-\infty,b]$	$(a,+\infty)$	$[a,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	
集合	$\{x \mid x \leqslant b\}$	$\{x \mid a<x\}$	$\{x \mid a \leqslant x\}$	$\mathbf{R}$	

1.2.3 一元二次不等式

利用一元二次函数$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像可以解不等式$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0$.

（1）当$\Delta=b^2-4ac>0$时，方程$ax^2+bx+c=0$有两个不相等的实数解x_1和$x_2(x_1<x_2)$，一元二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴有两个交点$(x_1,0)$，$(x_2,0)$［如图1-4(a)所示］．此时，不等式$ax^2+bx+c<0$的解集是(x_1,x_2)，不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$．

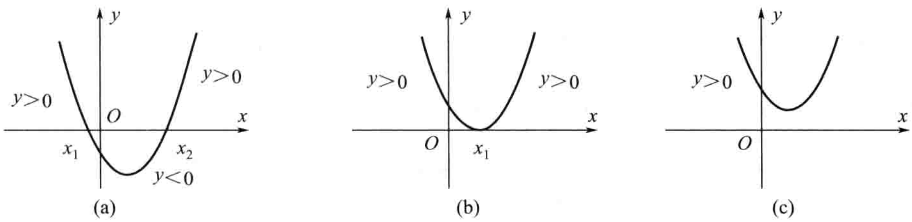


图 1-4

（2）当$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程$ax^2+bx+c=0$有两个相等的实数解x_0，一元二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴只有一个交点$(x_0,0)$［如图1-4(b)所示］．此时，不等式$ax^2+bx+c<0$的解集是$\varnothing$；不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$．

（3）当$\Delta=b^2-4ac<0$时，方程$ax^2+bx+c=0$没有实数解，一元二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与x轴没有交点［如图1-4(c)所示］．此时，不等式$ax^2+bx+c<0$的解集是$\varnothing$；不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$\mathbf{R}$.

概念和公式的引出

当$a>0$时，一元二次不等式的解集见表1-6：

表 1-6

方程或不等式	解集		
	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	$\{x_1,x_2\}$	$\{x_0\}$	$\varnothing$

续表

方程或不等式	解集		
	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$	$(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c\geqslant0$	$(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$	(x_1,x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\leqslant0$	$[x_1,x_2]$	$\{x_0\}$	$\varnothing$

表中 $\Delta=b^2-4ac$，$x_1<x_2$. 方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 x_1，x_2.

进一步的练习

练习 4 解下列各一元二次不等式：

(1) $x^2-x-6>0$；　　(2) $x^2<9$；

(3) $5x-3x^2-2>0$；　　(4) $-2x^2+4x-3\leqslant0$.

分析： 首先判定二次项系数是否为正数，再研究对应一元二次方程解的情况，最后对照表格写出不等式的解集.

解： (1) 因为二次项系数为 $1>0$，且方程 $x^2-x-6=0$ 的解集为 $\{-2,3\}$，故不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

(2) $x^2<9$ 可化为 $x^2-9<0$，因为二次项系数为 $1>0$，且方程 $x^2-9=0$ 的解集为 $\{-3,3\}$，故 $x^2<9$ 的解集为 $(-3,3)$.

(3) $5x-3x^2-2>0$ 中，二次项系数为 $-3<0$，将不等式两边同乘 -1，得 $3x^2-5x+2<0$. 由于方程 $3x^2-5x+2=0$ 的解集为 $\left\{\frac{2}{3},1\right\}$. 故不等式 $3x^2-5x+2<0$ 的解集为 $\left(\frac{2}{3},1\right)$，即 $5x-3x^2-2>0$ 的解集为 $\left(\frac{2}{3},1\right)$.

(4) 因为二次项系数为 $-2<0$，将不等式两边同乘 -1，得 $2x^2-4x+3\geqslant0$. 由于判别式 $\Delta=(-4)^2-4\times2\times3=-8<0$，故方程 $2x^2-4x+3=0$ 没有实数解. 所以不等式 $2x^2-4x+3\geqslant0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，即 $-2x^2+4x-3\leqslant0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

练习 5 x 是什么实数时，$\sqrt{3x^2-x-2}$ 有意义.

解： 根据题意需要解不等式 $3x^2-x-2\geqslant0$.

解方程 $3x^2-x-2=0$ 得 $x_1=-\frac{2}{3},x_2=1$.

由于二次项系数为 $3>0$，所以不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[1,+\infty)$.

即当 $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[1,+\infty)$ 时，$\sqrt{3x^2-x-2}$ 有意义.

1.2.4 含绝对值的不等式

任意实数的绝对值是如何定义的？其几何意义是什么？

对任意实数 x，有：

$$|x|=\begin{cases}x & x>0\\0 & x=0\\-x & x<0\end{cases}$$

其几何意义是：数轴上表示实数 x 的点到原点的距离．

案例 4 在不等式 $|x|<2$ 和 $|x|>2$ 的解集在数轴上如何表示？

根据绝对值的意义可知，方程 $|x|=2$ 的解是 $x=2$ 或 $x=-2$，不等式 $|x|<2$ 的解集是 $(-2,2)$ ［如图 1-5(a) 所示］；不等式 $|x|>2$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ ［如图 1-5(b)所示］．

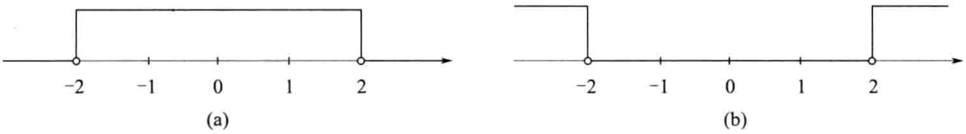


图 1-5

概念和公式的引出

一般地，不等式 $|x|<a\,(a>0)$ 的解集是 $(-a,a)$；不等式 $|x|>a\,(a>0)$ 的解集是 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$．

试一试：写出不等式 $|x|\leqslant a$ 与 $|x|\geqslant a\,(a>0)$ 的解集．

进一步的练习

练习 6 解下列各不等式：

(1) $3|x|-1>0$； (2) $2|x|\leqslant 6$.

分析：将不等式化成 $|x|<a$ 或 $|x|>a$ 的形式后求解．

解：(1) 由不等式 $3|x|-1>0$，得 $|x|>\frac{1}{3}$，所以原不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$；

(2) 由不等式 $2|x|\leqslant 6$，得 $|x|\leqslant 3$，所以原不等式的解集为 $[-3,3]$．

练习 7 解不等式 $|2x-1|\leqslant 3$

解：由原不等式可得 $-3\leqslant 2x-1\leqslant 3$，

于是 $-2\leqslant 2x\leqslant 4$，

即 $-1\leqslant x\leqslant 2$，

所以原不等式的解集为 $[-1,2]$．

习题 1.2

1. 填空：

(1) 设 $3x>6$，则 $x>$__________． (2) 设 $1-5x<-1$，则 $x>$__________．

2. 解下列各一元二次不等式：

(1) $2x^2-4x+2>0$；(2) $-x^2+3x+10\geqslant 0$.

3. 解下列各不等式：

(1) $2|x|\geqslant 8$；(2) $|x|<2$；(3) $|x|-1>0$.

4. 解下列各不等式：

(1) $|x+4|>9$；(2) $\left|x+\frac{1}{4}\right|\leqslant\frac{1}{2}$；(3) $|5x-4|<6$；(4) $\left|\frac{1}{2}x+1\right|\geqslant 2$.