全国硕士研究生入学统一考试

数学试题

概率论与数理统计历年考研真题详解

（1987－2015）

胡庆军　王炯琦　编著

清华大学出版社

概率论与数理统计历年考研真题详解

（1987－2015）

胡庆军 王炯琦 编著

清华大学出版社

内容简介

本书汇集了1987—2015年共29年间全国工学、经济学硕士研究生入学统一考试数学试卷(数学一、数学三和数学四)中概率统计的全部试题，共281道题；并将其按照知识点归纳为8章：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验.每章包括了考研内容与考试要求、主要知识点归纳，并按照考点分节给出了详细解答及相关注释.另外，为方便查阅，附录中按年份将这些试题一并给出，并标注了索引页码.

本书可供高等院校工科、理科(非数学专业)各专业的学子学习、考研复习之用，也是考研辅导教师的良师益友.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计历年考研真题详解：1987—2015/胡庆军，王炯琦编著.--北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-40494-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①胡… ②王… Ⅲ.①概率论—研究生—入学考试—题解 ②数理统计—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第136824号

责任编辑：陈 明
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：14 **字 数**：336千字
版 次：2015年8月第1版 **印 次**：2015年8月第1次印刷
定 价：32.00元

产品编号：065018-01

前　言

自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来，至今已29年，其考查内容一直为高等数学、线性代数和概率论与数理统计（以下简称概率统计）三个部分.按各专业对考生的要求，2009年之前数学试卷分为数学一、数学二、数学三和数学四.从2009年开始，数学三和数学四合并为新的数学三后，数学试卷分为数学一、数学二和数学三.每套试卷均按150分制，时间为180分钟.数学一和数学三考查内容所占比例（从2007年开始）为高等数学（56%）、线性代数（22%）和概率统计（22%）；数学二不考概率统计.数学一、数学三试卷通常包含概率统计的三个客观题（填空题和选择题，每小题4分）和两个大题，概率统计所占的总分数为33～34分.

《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《数学考试大纲》）将概率统计的考查内容分为8个部分：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验.数学一的考研大纲要求8个部分的全部内容；数学三要求第1～7部分的内容，但第7部分的区间估计不作要求.

对于研究生入学数学考试而言，从1987年以来，几十年的试题一定含有稳定的、普遍的、反复出现的共性.这些试题是参加命题的专家、教授的智慧结晶，它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》原则下的命题指导思想、特点和趋势；这些试题是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律的最宝贵的第一手资料.

编者基于多年的教学和考研辅导经验，将历年考研概率统计试题的特点和规律总结如下：

1. 2004年之前，数学一、数学三和数学四的概率统计试题多数是不相同的，而且，数学三和数学四的试题难度要大于数学一.而从2004年开始，数学一、数学三和数学四的试题多数是相同的，且从2009年开始，数学三和数学四合并为新的数学三后，数学一和数学三的概率统计试题多数题是相同的，只有个别题有差别，且不相同的试题在数学三里其难度有减轻的迹象.还有，数学三对数理统计的要求降低了，不考区间估计和假设检验.

2. 概率论(第1～4章)的每个知识点都很重要,在考题中是常出现的.例如,全概率公式、求随机变量函数(一个随机变量的函数、两个随机变量的函数)的分布(最近十多年几乎每年都有一个大题出现)、求与随机变量相关事件的概率、求随机变量的期望、方差及函数的期望.古典概型常与其他各章的知识点连在一起考查,且古典概型的概率计算仅用到最基本的排列组合,没有出现过难题.

3. 从1997年开始,数学一试卷几乎每年都有一个参数估计方面的大题,主要包括矩估计法、最大似然估计法、估计量的无偏性判断、估计量求期望和方差;但一致估计出现的次数很少.区间估计也很少出现.

4. 第6章中统计量求期望和方差是数学一试卷数理统计部分中常考问题之一;数学三中常出现抽样分布的题型,但数学一中不常见.

5. 第5章知识点不常出现;第8章知识点也不常出现,但不排除未来会出现.

6. 很多试题综合性强,要用到多个知识点,但每个知识点都是基本的;有些试题是混合题,涉及多个章节的知识点.这就要求考生基本概念清楚,基本理论融会贯通,基本公式和基本方法运用自如,这样才能快捷正确地解题.

基于以上分析总结,编者将本书的编排原则确定如下:

1. 每章第1节列出了考研大纲中的考研内容与考试要求(便于考生查阅,篇幅很小很小!);第2节根据历年考研试题涉及的知识点及考试要求,归纳了该章的主要知识点,便于考生查阅、对照、熟记,是考生考研复习的行动指南.

2. 每章第3节选入与该章有关的历年考研试题,再按考查的知识点分成几个小节,每个题后做出详细解答和相关注释.如果一个试题涉及多个知识点,甚至是跨章的知识点,则将该试题纳入知识点所在的“最后一章”的混合题里.例如,2011年(**数学一、三**)第4题(见附录,下同)涉及第2章的概率分布、第3章的联合概率分布及函数的概率分布、第4章的相关系数,则将该试题纳入4.3.5节混合题(二).

3. 4.3.4节混合题(一)收入了与期望、方差有关的混合题;4.3.5节混合题(二)收入了与协方差、相关系数有关的混合题;由于第8章考题太少,因而8.3节未再分小节.

4. 在正文(第1～8章)的每个试题题首注明该题年份及所属试卷类型,如第3章的第11题(2006年**数学一、三、四**)表示是2006年数学一、数学三及数学四的试题,即三份试卷是用同一个试题.这样便于考生对比不同年份试题的差异、主要知识点的变化,洞察命题的趋势;也便于考生对比不同类型试卷之间的差别,而且,我们看到,近十一年来,数学一与数学三的概率统计试题多数题是

相同的.

5. 附录中按年份列出了各年考研试题,并且在每个试题题尾注明该题所属试卷类型及正文中所在的页码. 如 2004 年第 2 题(**数学一、三、四** P_{140}),表示该题是 2004 年数学一、数学三及数学四的试题,且在第 140 面有详细解答和相关注释.

本书力求做到主要知识点清晰,历年试题资料完整,解题方法独特,图文并茂,通俗易懂.

限于作者水平,纰漏之处在所难免,恳望读者批评指正.

编　者

2015 年 3 月

目　录

第1章 随机事件与概率

1.1 考研内容和考试要求

考研内容

随机事件与样本空间、事件的关系与运算、完备事件组、概率的概念、概率的基本性质、古典型概率、几何型概率、条件概率、概率的基本公式、事件的独立性、独立重复试验.

考试要求

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算的方法;理解重复独立试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

1.2 主要知识点归纳

1. 对于事件 A,B,事件的关系有

$$A\cup B,A\cap B(\text{也记为 }AB),A-B,\overline{A},$$

分别是事件 A 与 B 的并事件、交事件、差事件,以及事件 A 的对立事件(也称逆事件). 还有关系:

$$A\subset B,AB=\varnothing(\text{不可能事件}),$$

分别表示事件 A 包含在事件 B 中、事件 A 与 B 互不相容.

2. 事件的运算顺序:先逆运算、后交运算,再并运算,有括号者先算括号;对于事件 A, B, C,事件的运算规律有

交换律:$A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$;

结合律:$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

德摩根律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

3. 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 概率的有限可加性:对于事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若

$$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,$$

则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

注 在概率定义中的可列可加性是指:对于可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$,若

$$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j,i,j=1,2,\cdots,$$

则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k).$$

(3) 减法公式一:若事件 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

(4) 减法公式二:对于任何事件 A,B,则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB);$$

(5) 对于事件 A,有

$$P(A)\leqslant 1,\quad P(\overline{A})=1-P(A);$$

(6) 两个事件的加法公式:对于任何事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

(7) 多个事件的加法公式:对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot P(A_1A_2\cdots A_n).$$

4. 对于古典概型,事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 中基本事件个数}}{\text{必然事件 }\Omega\text{ 中基本事件总数}}$$

5. 对于几何概型,设事件

$$A=\{\text{在区域 }G\text{ 中随机地取一点,而该点落在区域 }g\text{ 中}\},$$

其中 $g\subset G$,且 g,G 的度量(如长度、面积、体积等)大小记为 $\mu(g),\mu(G)$,则事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(G)},$$

这就是几何概率计算公式.

6. 对于事件 A,B,若 $P(A)>0$,则在事件 A 已发生的条件下,事件 B 发生的条件概率定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

7. 乘法公式:对于事件 A,B,若 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A).$$

8. 对于样本空间 Ω(也称为必然事件),事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是完备事件组,即满足

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega,\quad B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,$$

且设 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$.

(1) 全概率公式：对于事件 A，有

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A|B_n);$$

(2) 贝叶斯公式：对于事件 A，若 $P(A)>0$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A\mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

9. 事件 A,B 相互独立是指 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$；事件 A,B,C 相互独立是指

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)\cdot P(B),\\P(AC)=P(A)\cdot P(C),\\P(BC)=P(B)\cdot P(C),\end{cases}\tag{1.1}$$

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

若仅有(1.1)式成立，则称事件 A,B,C 两两相互独立；若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦相互独立.

10. 若随机试验 E 只有二种可能结果：A 或 $\overline{A}$，将试验 E 重复独立地进行 n 次，记事件

$$A_i=\{\text{第 } i \text{ 次试验中结果 } A \text{ 出现}\},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则这是一串重复独立试验，且事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

1.3 历年考研真题解析

1.3.1 事件的表示、事件的关系与运算

1. (1988 年**数学三、四**)(是非题)若事件 A,B,C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$.

【　　】

解　如图 1.1 所示，若 $A\subset C, B\subset C$，则 $A\cup C=B\cup C$，但 $A\neq B$. 故答案为“非”.

注释　若事件 A,B,C 满足等式 $AC=BC$，则一定有 $A=B$ 吗？也不一定. 事实上，若

$$C\subset A, C\subset B,$$

则 $AC=BC$. 如图 1.2 所示，但 $A\neq B$.

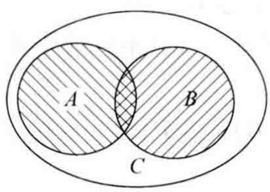

图 1.1

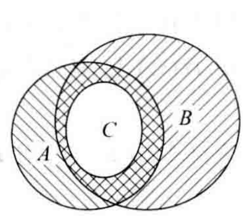

图 1.2

2. (2001 年**数学四**) 对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是　【　　】

(A) $A\subset B$.　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$.　(C) $A\overline{B}=\varnothing$.　(D) $\overline{A}B=\varnothing$.

解　注意到

$$A\cup B=B \iff A\subset B \iff \overline{B}\subset\overline{A} \iff A\overline{B}=\varnothing.$$

如图 1.3 所示,则 $\overline{A}B=\varnothing$ 与 $A\cup B=B$ 不等价,故答案为(D).

3.(1989 年**数学三、四**) 以 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 是 【 】

(A) 甲种产品滞销,乙种产品畅销. (B) 甲、乙两种产品均畅销.

(C) 甲种产品滞销. (D) 甲种产品滞销或乙种产品畅销.

解 记事件 $B=\{$甲种产品畅销$\}$,$C=\{$乙种产品滞销$\}$,则 $A=BC$. 由此

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{“甲种产品滞销”或“乙种产品畅销”}\}.$$

所以答案为(D).

注释 利用事件的表示、事件的运算规律来回答问题是最佳方法.

4.(2000 年**数学三、四**) 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电. 以 E 表示事件"电炉断电",而

$$T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$$

为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则事件 E 等于 【 】

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$. (B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$. (C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$. (D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$.

解 由图 1.4 知,答案为(C).

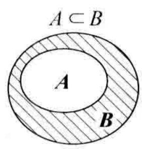

图 1.3

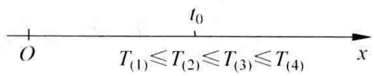

图 1.4

1.3.2 概率的基本性质

5.(1997 年**数学三**) 设 A,B 是任意两个随机事件,则

$$P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

解 由事件运算的分配律,有

$$(\overline{A}\cup B)(A\cup B)=(\overline{A}\cap A)\cup B=\varnothing\cup B=B,$$

$$(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=(\overline{A}\cap A)\cup\overline{B}=\varnothing\cup\overline{B}=\overline{B}$$

$$\Rightarrow\quad(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing(\text{不可能事件}).$$

则

$$P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=P\{\varnothing\}=0.$$

所以答案为 0.

注释 有关事件的概率计算,还常用到事件运算的如下信息:

(1) 对于随机试验 E,样本空间为 Ω,$\varnothing$ 为不可能事件,A,B 为事件,则

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A;$$

$$\overline{A}=\Omega-A,\quad A-B=A\overline{B}=A-AB.$$

(2) 若事件 A,B 满足 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$,$A\cap B=A$.

6.(1994 年**数学一**) 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$,且 $P(A)=p$,则

$P(B)=$________.

解　已知 $P(A)=p$,由

$$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$\Rightarrow\qquad P(B)=1-P(A)=1-p.$$

所以答案为 $1-p$.

注释　本题考查了事件运算的德摩根律、对立事件求概率的公式和概率的加法公式.

7. (1991 年**数学四**) 设 A,B 是两个随机事件,$P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,则

$$P(\overline{AB})=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

解　由 $0.3=P(A-B)=P(A)-P(AB)$,则

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$$
$$\Rightarrow\qquad P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6.$$

所以答案为 0.6.

8. (1990 年**数学一**) 对于随机事件 A,B,已知

$$P(A)=0.4,P(B)=0.3,P(A\cup B)=0.6.$$

若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,则 $P(A\overline{B})=$________.

解　已知 $P(B)=0.3$,$P(A\cup B)=0.6$,由

$$P(A\cup B)=P(B\cup\overline{B}A)=P(B)+P(\overline{B}A)=P(B)+P(A\overline{B})$$
$$\Rightarrow\qquad P(A\overline{B})=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3.$$

所以答案为 0.3.

注释　此题条件“$P(A)=0.4$”是多余的.

9. (1992 年**数学一**) 对于事件 A,B,C,已知

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=0,\quad P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16},$$

则事件 A,B,C 全不发生的概率为________.

解　由题意知,要求 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$. 由

$$ABC\subset AB,\quad P(AB)=0\ \Rightarrow\ P(ABC)=0,$$

则所求概率

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$$
$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$$
$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}.$$

所以答案为 $\frac{3}{8}$.

注释　求解本题的关键点之一是如下事件的表示:

$$\{\text{事件 } A,B,C \text{ 全不发生}\}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C};$$

且 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$,再利用概率的性质计算化简概率 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$.

10. (1992 年**数学四**) 对于事件 A,B,C,已知

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=P(BC)=0,\quad P(AC)=\frac{1}{8},$$

则事件 A,B,C 至少出现一个的概率为________.

解　已知 $P(AB)=0$,由

$$ABC \subset AB \quad \Rightarrow \quad P(ABC) \leqslant P(AB) \quad \Rightarrow \quad P(ABC)=0.$$

再由

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{1}{8}.$$

则事件 A,B,C 至少出现一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC) \\ &= \frac{1}{4}\times 3-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

所以答案为$\frac{5}{8}$.

注释　解题关键之一是如下事件的表示:

$$\{\text{事件 } A,B,C \text{ 至少出现一个}\}=A \cup B \cup C.$$

一般而言,几个事件至少有一个发生表示为并事件;几个事件同时都发生表示为交事件;事件 A 发生且 B 不发生表示为差事件:$A-B$.

11. (2009 年**数学三**) 设事件 A 与 B 互不相容,则　　【　　】

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$.　　(B) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$.

解　由事件 A 与 B 互不相容,即 $AB=\varnothing$(不可能事件),则

$$\overline{AB}=\Omega(\text{必然事件}) \quad \Rightarrow \quad \bar{A}\cup\bar{B}=\Omega \quad \Rightarrow \quad P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\Omega)=1.$$

所以答案为(D).

12. (1987 年**数学三**) 若两个事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$,则　　【　　】

(A) 事件 A 和 B 互不相容.　　(B) AB 是不可能事件.

(C) AB 未必是不可能事件.　　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

解　四个选项中(A)与(B)是同一个含义:

$$AB=\varnothing(\text{不可能事件}).$$

由于考研题是单选题,所以,选项(A)、(B)均不合题意.对于选项(D),如图 1.5 所示,有 $AB=\varnothing$,则

$$P(AB)=0.$$

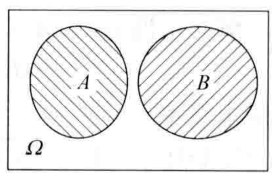

图　1.5

但不能断定

$$P(A)=0 \quad \text{或} \quad P(B)=0.$$

则选项(D)也不合题意,所以答案为(C).

注释　一般而言,由 $P(AB)=0$ 不能断定 $AB=\varnothing$.也就是说,概率为 0 的事件不一定是不可能事件.例如,在区间[0,1]中随机地取一个数,记事件

$$E=\{\text{所取数等于 } 0.45\},$$

按几何概率问题来讲,$P(E)=0$,但 $E\neq\varnothing$,即事件 E 不是不可能事件$\varnothing$.

还有,概率为 1 的事件不一定是必然事件 Ω.例如,在区间[0,1]中随机地取一个数,记事件

$$W=\{\text{所取数既不等于 } 0.45,\text{又不等于 } 0.7\},$$

按几何概率而言，$P(W)=1$，但 $W\neq\Omega$，即事件 W 不是必然事件.

13.（1991 年**数学三、四**）设 A 和 B 是任意两个概率不为零的互不相容事件，则下列结论中肯定正确的是　【　】

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容.　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

(C) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.　(D) $P(A-B)=P(A)$.

解　由于事件 A 和 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$（不可能事件）. 由

$$A-B=A-AB=A\Rightarrow P(A-B)=P(A).$$

所以答案为(D).

14.（1987 年**数学四**）设 A,B 是两个随机事件，则 $P(A-B)=$　【　】

(A) $P(A)-P(B)$.　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C) $P(A)-P(AB)$.　(D) $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$.

解　由 $A-B=A-AB$，且 $AB\subset A$，则

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

所以答案为(C).

15.（2015 年**数学一、三**）若 A,B 为任意两个随机事件，则　【　】

(A) $P(AB)\leqslant P(A)\cdot P(B)$.　(B) $P(AB)\geqslant P(A)\cdot P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

解　由 $AB\subset A,AB\subset B\Rightarrow P(AB)\leqslant P(A),P(AB)\leqslant P(B)$，则

$$P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}.$$

故答案为(C).

16.（1992 年**数学三、四**）设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列结论中正确的是　【　】

(A) $P(C)=P(A\cup B)$.　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(C)=P(AB)$.　(D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.

解　已知当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则 $AB\subset C$，且由

$$1\geqslant P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

则

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

所以答案为(B).

注释　当事件 D 发生时，必然导致事件 E 发生 $\Leftrightarrow$ $D\subset E$.

1.3.3　古典概型的概率计算

17.（1992 年**数学三**）将 C,C,E,E,I,N,S 这七个字母随机地排成一行，则恰好排成 SCIENCE 的概率为________.

解　由古典概型概率计算公式，考虑七个位置的全排列：□□□□□□□ *，则所求概率为

* 这里每个□表示一个位置.

$$p=\frac{1\times2\times1\times2\times1\times1\times1}{7!}=\frac{1}{1260},$$

所以答案为$\frac{1}{1260}$.

18. (1993 年数学一) 一批产品有 10 个正品和 2 个次品,依次从中不放回地取两次,每次取一个产品,则第二次取到次品的概率为________.

解 由古典概型概率计算公式,考虑两个位置的排列:□□,则第二次取到次品的概率为

$$p=\frac{11\times2}{12\times11}=\frac{1}{6}.$$

所以答案为$\frac{1}{6}$.

注释 此题也可利用条件概率和全概率公式计算.事实上,记事件

$$A_i=\{第\ i\ 次取到次品\},\quad i=1,2,$$

则

$$P(A_1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\quad P(\overline{A}_1)=\frac{5}{6};\quad P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{11},\quad P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{2}{11}.$$

由全概率公式,则第二次取到次品的概率为

$$\begin{aligned}p=P(A_2)&=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&=\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

19. (1997 年数学一) 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个黄球, 30 个白球,今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是________.

解 直接用古典概型的概率计算公式,样本空间是考虑两次取球:□□,则第二个人取得黄球的概率为

$$p=\frac{49\times20}{50\times49}=\frac{2}{5}.$$

所以答案为$\frac{2}{5}$.

注释 与上题注释相同,也可用全概率公式求解;此题的结果也说明“抓阄”不分先后,即第二个人取得黄球的概率与第一个人取得黄球的概率相等.

20. (1990 年数学三、四) 从 0,1,2,…,9 这十个数字中任意选出三个不同的数字,求下列事件的概率:

(1) $A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$;

(2) $A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$;

(3) $A_3=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$.

解 从十个数字中任意选出三个不同数字,所有不同取法总数为

$$\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3!}=120.$$

则

(1) $P(A_1)=\frac{\binom{8}{3}}{120}=\frac{7}{15}$;

(2) $P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-P\{三个数字中含 0 且含 5\}=1-\dfrac{1\times1\times\binom{8}{1}}{120}=\dfrac{14}{15}$;

(3) $P(A_3)=P\{三个数字中含 0 但不含 5\}=\dfrac{1\times\binom{8}{2}}{120}=\dfrac{7}{30}$.

注释　$P(A_2)$和 $P(A_3)$的另一种求法：记事件

$$B=\{三个数字中不含 0\},C=\{三个数字中不含 5\}$$

$$\Rightarrow\qquad P(B)=\frac{\binom{9}{3}}{120}=\frac{7}{10},\quad P(C)=\frac{7}{10},\quad P(BC)=\frac{\binom{8}{3}}{120}=\frac{7}{15}.$$

则

$$P(A_2)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)-P(BC)=\frac{7}{10}+\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{14}{15},$$

$$P(A_3)=P(\overline{B}C)=P(C-B)=P(C)-P(BC)=\frac{7}{10}-\frac{7}{15}=\frac{7}{30}.$$

21. (1996 年**数学三**) 考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$,其中 B,C 分别是将一颗骰子连掷两次先后出现的点数.求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解　注意到,一颗骰子连掷两次,样本空间所含基本事件总数为 $6^2=36$,而方程有实根的充分必要条件是 $B^2-4C\geqslant0$,即 $B^2\geqslant4C$;方程有重根的充分必要条件是 $B^2-4C=0$,即 $B^2=4C$.见下表:

C 的可能取值	1	2	3	4	5	6
满足 $B^2\geqslant4C$ 的基本事件个数	5	4	3	3	2	2
满足 $B^2=4C$ 的基本事件个数	1	0	0	1	0	0

用古典概型的概率计算公式,则

$$\begin{aligned}p&=P\{方程有实根\}=P\{B^2-4C\geqslant0\}=P\{B^2\geqslant4C\}\\&=\frac{5+4+3+3+2+2}{36}=\frac{19}{36};\end{aligned}$$

$$q=P\{方程有重根\}=P\{B^2-4C=0\}=P\{B^2=4C\}=\frac{1+1}{36}=\frac{1}{18}.$$

注释　在 2005 年**数学一**、**数学三**和**数学四**,2009 年**数学一**和**数学三**,2010 年**数学三**中均出现了古典概型的概率计算问题,而且是与其他知识点一起考查的.不过,考生应注意到,古典概型对考生的要求是最基本的,通常只要用到最基本的排列、组合就能求解有关事件的概率.

1.3.4　几何概型的概率计算

22. (1988 年**数学一**) 在区间(0,1)中随机地取两个数,则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为________.

解　以 x,y 分别表示所取数,则样本空间