普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础丛书

丛书主编 李德宜 等

微积分 上

张平芳 刘云冰 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
经济数学基础丛书

丛书主编 李德宜 等

微积分(上)

张平芳 刘云冰 主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书依照“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”和“研究生入学考试大纲数学三(经管类)”对高等数学课程的基本要求编写，分上、下两册. 上册内容包括一元函数微分学和一元函数积分学及其应用；下册内容包括微分方程与差分方程、无穷级数、多元函数微积分. 书后分别附有一元函数和多元函数微积分实验指导. 本书在保证科学性的前提下，结合经济管理类学生的实际情况，注重对概念实际背景的介绍和教学，强化高等数学理论知识在经济管理方面的应用.

本书对高等数学知识的讲解由浅入深、循序渐进、通俗易懂、难度适宜，适合作为普通高等院校经济管理类有关专业的微积分课程的教材使用，也可供相关专业人员和教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/张平芳，刘云冰主编. —北京：科学出版社，2015.3
(经济数学基础丛书/李德宜等主编)
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-043825-6

Ⅰ.①微… Ⅱ.①张… ②刘… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 053743 号

责任编辑：吉正霞/责任校对：董艳辉
责任印制：高 嵘/封面设计：蓝 正

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1092 1/16
2015 年 4 月第 一 版 印张：17 1/4
2015 年 4 月第一次印刷 字数：392 000
定价：39.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

普通高等教育“十二五”规划教材
经济数学基础丛书
丛书主编　李德宜　等

《微积分》编委会

主　编　张平芳　刘云冰

副主编　张学英　蒋　君　张艳红　熊　丹

编　委　（按姓氏笔画排序）

丁咏梅　刘云冰　吕绪华　李琳娜

张　青　张平芳　张传洲　张学英

张艳红　徐树立　蒋　君　熊　丹

前　　言

在反复研讨高等院校经济管理类本科高等数学课程的教学大纲及考研大纲的基础上，编者根据多年的教学实践，编写了本书.

本书在保证科学性的前提下，结合经济管理类学生的实际情况，对高等数学知识的讲解力求做到由浅入深、循序渐进、通俗易懂.

近几年高中数学经历了多次教学改革，教学体系和教学内容发生了一些变化，本书适当补充部分必要的初等数学内容，充分注意与中学教材的衔接.

本书注重对概念的实际背景的介绍和教学，强化高等数学理论知识在经济管理方面的应用，适当增加数学在经济中应用的例子.

为了能更好地使学生掌握所学知识，培养学生分析问题和解决问题的能力，本书在每节和每章配备习题时，均在保证基本题的基础上，适当增加一些考研题和英文题目，用于不同层次学生的学习需求.

本书在附录中增加 MATLAB 和 EXCEL 的应用，借助于这两个软件使学生更好地理解教学内容.

为了扩大学生视野，使学生了解高等数学的创立、发展的背景，加深学生对数学文化、数学思维的了解，在每章后附相关的著名数学家简介，如高斯、牛顿、莱布尼茨等.

本书分上、下两册.第一章由熊丹编写，第二章、第三章由张平芳编写，第四章由张艳红编写，第五章、第六章由张学英编写，第七章、第八章由蒋君编写，第九章、第十章由刘云冰编写，附录由熊丹编写.在编写过程中，全书由张平芳提出编写思路和编写提纲，由编写人员研究讨论确定编写方案，由张平芳、刘云冰统稿、定稿.本书由李德宜教授主审.

李德宜教授对本书进行了深入细致的审阅，提出了许多宝贵的意见和建议，我们在此表示衷心的感谢！

由于本书编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，敬请各位同行和读者赐教.

编　者

2015 年 1 月

目　　录

第一章　函　　数

函数是研究变量之间关系的数学工具,是微积分学的主要研究对象.本章在回顾集合概念的基础上介绍函数的概念、表示法、特性及经济中的常用函数.

第一节　集　　合

集合是数学中的一个基本概念,是集合论的研究对象,在现代数学中起着非常重要的作用.

一、集合的概念

我们常常要研究具有某种特性的事物组成的全体,例如,某班的全体学生,某一批产品,全体整数等,这些事物的全体就是集合.

一般来说,集合是指具有某种特定性质的事物的全体,或是一些确定对象的汇总,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.构成集合的事物或对象,称为集合的元素,通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.集合的元素具有唯一性、确定性和排列的无序性.

元素与集合之间用属于与不属于来表示它们之间的关系.若 A 是给定的一个集合,a 是 A 中的一个元素,则称元素 a 属于集合 A 或称元素 a 在集合 A 中,记为 $a\in A$;反之,若 a 不是集合 A 的元素,则称元素 a 不属于集合 A 或元素 a 不在集合 A 中,记为 $a\notin A$.

下面是微积分学中常用的几个数集(以数为元素的集合):

$\varnothing$ 表示不含任何元素的集合,称为空集.

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合,称为自然数集,记作 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合,称为整数集,记作 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合,称为有理数集.

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合,称为实数集.

人们对于数的认识是逐步深入的,首先是自然数集,然而自然数对减法运算不封闭(即自然数相减不一定是自然数),于是就有了整数集,整数对除法运算不封闭,从而产生了有理数集,随着更深入的研究,无理数产生.有理数与无理数统称为实数.

在中学数学中我们借助于数轴(数轴是一条具有原点、正方向和单位长度的直线)将数直观地标记在一根数轴上.实数与数轴上的点是一一对应的.为了简便起见,常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别,用相同的符号表示,如点 a 和实数 a 是相同的意思.

二、集合的表示

集合通常有两种表示法:一种是列举法,即在花括号{ }内把集合的全体元素一一列举出来,元素间用逗号分开,如 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$;另一种表示法是描述法,即若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,在花括号{ }内画一条竖线,竖线前方写代表元素

的字母,竖线后方是描述集合中元素特征的语句,具体可表示为 $M=\{x \mid x \text{具有性质} P\}$.

一般地,列举法适用于元素个数有限的集合,而描述法适用于元素个数无限的集合.

例如,(1) 所有大于2小于10的自然数构成的集合

$$A=\{3,4,5,6,7,8,9\} \quad \text{或} \quad A=\{x \mid 2<x<10, x \in \mathbf{N}\}.$$

(2) 由方程 $x^2+3x+2=0$ 的实数根构成的集合

$$A=\{-1,-2\} \quad \text{或} \quad A=\{x \mid x^2+3x+2=0, x \in \mathbf{R}\}.$$

(3) 抛物线 $y^2=4x$ 上的所有点构成的集合

$$A=\{(x,y) \mid y^2=4x, x \geqslant 0\}.$$

(4) 在直角坐标系中,由第一象限中所有的点构成的集合

$$A=\{(x,y) \mid x>0, y>0\}.$$

三、集合的关系

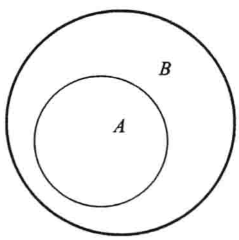


图 1-1

(1) 包含关系:对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 中的任何一个元素都属于集合 B,即若 $x \in A$,则有 $x \in B$,就称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$(或 $B \supseteq A$),读作"A 包含于 B"(或"B 包含 A"),如图 1-1 所示.

若集合 A 是集合 B 的子集,而集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A,则称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subset B$.

例如,$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

关于子集有以下结论:

(i) 空集是任意集合的子集;

(ii) 任何集合是其自身的子集;

(iii) 如果 $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$,即"集合的包含关系具有传递性".

(2) 相等关系:对于两个集合 A 与 B,如果满足 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

例如,$A=\{2,3\}, B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$,则 $A=B$.

四、集合的运算

定义 1 设有两个集合 A 与 B,由 A 和 B 中的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并,记为 $A \cup B$(读作"A 并 B"),即 $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$,如图 1-2 所示.

集合的并有下列性质:

(1) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$;

(2) 对任何集合 A,有 $A \cup \varnothing = A$.

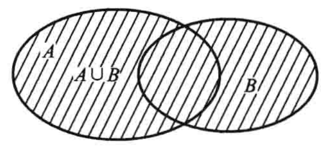


图 1-2

定义 2 设有两个集合 A 与 B,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交,记为 $A \cap B$(读作"A 交 B"),即 $A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$,如图 1-3 所示.

集合的交有下列性质:

(1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$;

(2) 对任何集合 A，有 $A \cap \varnothing = \varnothing$.

定义 3　设有两个集合 A 与 B，由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合，称为集合 A 与 B 的差，记为 $A-B$，即 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$，如图 1-4 所示.

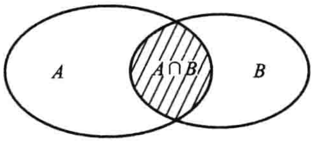


图 1-3

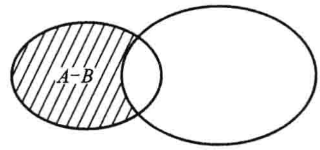


图 1-4

定义 4　研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个规定的集合称为全集，记为 I；全集是相对的，一个集合在某一条件下是全集，而在另一条件下可能不是全集.

例如，微积分课程所讨论的数集常常把全体实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

定义 5　已知全集 I，集合 $A \subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为集合 A 在集合 I 中的补集，记为 $\overline{A}$（读作"A 补"），即 $\overline{A}=\{x \in I$ 且 $x \notin A\}=I-A$.

例如，$I=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid 1 \leqslant x<5\}$，则 A 的余集是 $\overline{A}=\{x \mid x<1$ 或 $x \geqslant 5\}$.

补集具有性质：$A \cup \overline{A}=I$，$A \cap \overline{A}=\varnothing$.

集合的运算满足以下运算规律.

(1) 交换律：$A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$；

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$；

(3) 分配律：$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup(B \cap C)$；$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap(B \cup C)$；

(4) 德・摩根律：$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$.

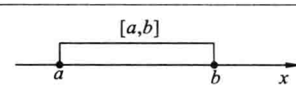
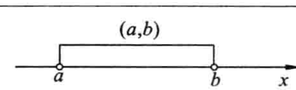
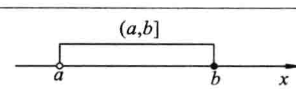
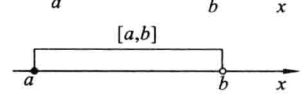
本书所用到的有关集合的内容，在中学阶段已经学习过，这里只作简单复习，证明从略.

五、两种特殊的数集 —— 区间和邻域

(1) 数轴上介于某两点之间的线段上点的全体组成的集合，称为区间.

表 1 是有限区间的定义和表示.

表 1　有限区间的定义和表示

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开半闭区间	$a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	 

除此之外，还有无限区间．实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$，其中 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作"负无穷大"和"正无穷大"．满足 $x \geqslant a, x > a, x \leqslant b, x < b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b)$．

（2）邻域

定义 6　设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 δ **邻域**，点 x_0 称为此邻域的中心，δ 称为此邻域的半径，记作 $U(x_0,\delta)$（图 1-5(a)）．即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

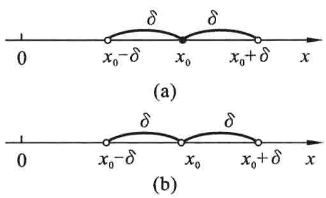


图 1-5

对邻域半径没有要求时，点 x_0 的邻域可简记为 $U(x_0)$．

有时用到邻域时需要把邻域中心去掉，把邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心 x_0 去掉后所得到的集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心 δ 邻域（或空心邻域），记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$（图 1-5(b)），即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

为了方便，称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左半邻域，$(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右半邻域．

例如，$U(-1,3)=\{x \mid |x-(-1)|<3\}$，表示以 -1 为中心，3 为半径的邻域，即区间 $(-4,2)$，相应的去心邻域为 $\mathring{U}(-1,3)=\{x \mid 0<|x-(-1)|<3\}$，即区间 $(-4,-1)\cup(-1,2)$，其中 $(-4,-1)$ 是 -1 的左半邻域，$(-1,2)$ 是 -1 的右半邻域．

习题 1-1

1. 下列六个关系式：① $\{a,b\}\subseteq\{b,a\}$；② $\{a,b\}=\{b,a\}$；③ $\{0\}=\varnothing$；④ $0\in\{0\}$；⑤ $\varnothing\in\{0\}$；⑥ $\varnothing\subseteq\{0\}$，其中正确的个数为（　　）．

（A）6 个　　（B）5 个　　（C）4 个　　（D）少于 4 个

2. 集合 A 含有 10 个元素，集合 B 含有 8 个元素，集合 $A\cap B$ 含有 3 个元素，则集合 $A\cup B$ 的元素个数为（　　）．

（A）10 个　　（B）8 个　　（C）18 个　　（D）15 个

3. 集合 $A=\{x \mid x\leqslant 1\}$，$B=\{x \mid x>a\}$，如果 $A\cap B=\varnothing$，那么 a 的取值范围是（　　）．

（A）$a>1$　　（B）$a\geqslant 1$　　（C）$a<1$　　（D）$a\leqslant 1$

4. $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,6\}$，则 $A-(A-B)$ 等于（　　）．

（A）B　　（B）$\{2,3\}$　　（C）$\{1,4,5\}$　　（D）$\{6\}$

5. 设集合 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,4,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数是（　　）．

（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

6. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\dfrac{12}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$，用列举法表示集合 $A=$ ________．

7. 集合 $A=\{(x,y) \mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y) \mid x-y=2\}$，则 $A\cap B=$ ________．

8. 已知集合 $A=\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x \mid m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 m 的取值范围．

9. 解下列不等式．

（1）$|x-4|<7$；（2）$0<(x-2)^2<4$；（3）$|ax-x_0|<\delta$（$a>0,\delta>0,x_0$ 为常数）．

第二节 函 数

一、函数的概念

1. 函数概念

定义 1 设非空数集 $D \subseteq \mathbf{R}$,若对每个 $x \in D$,按照对应法则 f,总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的函数值,记为 $f(x)$,即 $y = f(x)$,因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系,称为函数关系.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

构成函数的三要素是定义域 D(也可记作 D_f)、值域及对应法则 f. 关于函数的定义域,若讨论的是函数表达式,则其定义域为使表达式有意义的一切实数构成的集合,称为自然定义域. 如果是实际问题,则根据问题的实际意义具体确定.

定义域的求法有以下四个原则:

(1) 在分式中,分母不能为零;

(2) 在根式中,负数不能开偶次方根;

(3) 在对数式中,真数必须大于零,底数应大于零且不等于 1;

(4) 如果函数的解析表达式中含有分式、根式、对数式中的两者或两者以上的,求定义域时应取各部分定义域的交集.

如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的. 例如,函数 $f(x) = x$ 与函数 $g(x) = \sqrt{x^2}$ 定义域相同,但对应法则不同,值域也不同,从而是两个不同的函数.

2. 函数的表示方法

常用的函数表示法有解析法、表格法和图像法三种.

解析法(又称公式法):用数学表达式表示变量之间的对应关系,这种表示函数的方法称为解析法. 解析法是函数的精确描述,是最常用的方法,在微积分中起着重要的作用.

根据函数的解析表达式的形式不同,函数可分为显函数和隐函数.

(1) 显函数:函数 y 由自变量 x 的解析表达式直接表示. 例如,$y = \sin x + e^x - 5$.

若函数在其定义域的不同范围内,对应法则用不同式子来表达的函数,则称为分段函数. 例如,绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 隐函数:函数的自变量与因变量的对应关系由方程 $F(x, y) = 0$ 确定. 例如,方程 $x^2 + y^2 = 1\ (y > 0)$ 可确定函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$. 从方程中解出函数称为隐函数的显化,但并非所有隐函数都可以显化,如,笛卡儿(Descartes) 叶形线 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$.

例 1 常见的分段函数:

(1) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$,图形如图 1-6 所示.

(2) 取整函数 $y = [x]$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(图 1-7),定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$,值域为 $R_f = \mathbf{Z}$. 例如,$[2.3] = 2$,

$$[-1.7] = -2, [-4] = -4.$$

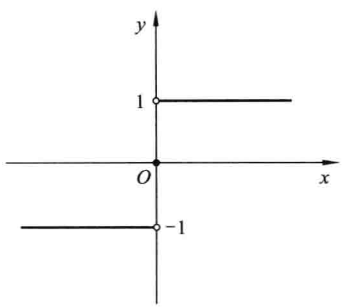


图 1-6

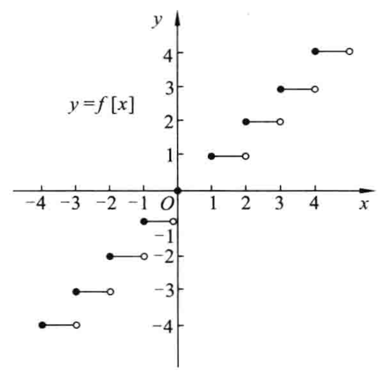


图 1-7

(3) 狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

它的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,值域 $R_f = \{0, 1\}$.

注 分段函数是一个函数,只是自变量 x 在不同的范围里,要用不同的表达式计算.

表格法(又称列表法):用自变量的一些数值与相应因变量的对应数值列成表格来表示变量之间的对应关系,这种表示函数的方法称为表格法. 例如,我们中学学过的平方表、立方表、对数表等. 函数的列表法便于直接由自变量的值去查找相应的因变量的值,但用表格法表示函数关系有时是不够全面的.

图像法(又称图示法):用平面直角坐标系中的曲线或点来表示变量 x 与变量 y 之间的对应关系,这种表示函数的方法称为图像法. 坐标平面上的点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x), x \in D$ 的图形.

图像法表示函数具有直观性,便于观察函数所具有的变化规律,是研究函数必不可少的工具. 生活中常见的例子有心电图、股市走向图等. 但是这种表示法不便于精确计算.

必须注意的是:函数的三种表示法各有其优缺点,在具体应用时,通常是把这三种表示法配合着进行使用,在微积分的学习过程中或分析社会经济现象时常采用图像法,即将函数的图像画出来以便帮助分析.