普通高等教育应用技术本科规划教材

高等数学（第2版）

下册

主 编 杨策平 郑 列
副主编 张凯凡 李家雄 王 红

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育应用技术本科规划教材

高等数学

（第2版）

下册

主　编　杨策平　郑　列
副主编　张凯凡　李家雄　王　红

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书根据高等院校“高等数学课程教学”基本要求，并结合21世纪工科类高等数学课程教学内容与课程体系改革发展要求编写而成.

本书分上下两册，下册包括空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、数学软件简介等内容. 每节后配有习题，书末还附有习题的参考答案.

本书内容充实，体系新颖，选题灵活，并附有配套的练习册，可作为高等院校工科、理科和经济管理类专业的教材，也可作为工程技术人员的参考书，对报考硕士研究生的学生以及广大教师与科技人员，也具有较高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 杨策平，郑列主编. -- 2版. --上海：同济大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5608-5884-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… ②郑… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第152037号

普通高等教育应用技术本科规划教材

高等数学(第2版)下册

主编 杨策平 郑 列 副主编 张凯凡 李家雄 王 红

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 大丰科星印刷有限责任公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 15.5

印 数 1—3100

字 数 310000

版 次 2015年7月第2版 2015年7月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5884-5

定 价 33.00元

普通高等教育应用技术本科规划教材

编　委　会

前　言

当人类进入21世纪之后，随着社会的进步、经济的发展、计算机技术的广泛应用，数学在其中的作用变得越来越突出，科学技术研究中所用到的数学方法越来越高深，数学化已成为当今社会发展中各个研究领域中的重要趋势.

为赶超世界先进水平，近年来我国高等院校积极开展高等教育的教育教学改革，努力向国外先进水平看齐，其中高等数学的教学内容和教学方法改革首当其冲，这大大提高了高等数学的适用性.

本书是根据当前科学技术发展形势的需要，结合编者多年来对高等数学教学内容和教学方法改革与创新的成果而编写的，其主要特点是注重数学与工程技术的有机结合，其中的许多例题和习题本身就是来自于实际的应用.同时，我们对数学中的纯理论性的东西如概念、定理、方法的介绍也注意结合学生的实际，尽量采用学生易于理解、容易接收的方式，进行深入浅出的讲解，从而最大限度地降低学生学习的难度.

本书由杨策平、郑列主编，张凯凡、李家雄、王红任副主编.参加编写的人员有：杨策平、郑列、张凯凡、李家雄、王红、刘磊、方瑛、许松林、耿亮、黄毅、常涛、张水坤、蔡振锋、费锡仙、胡二琴、朱莹、陈华、贺方超等老师，最后由杨策平、郑列、王红统稿、定稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议以便再版时予以修订.

编　者

2015年7月

目　　录

第 7 章　空间解析几何

§7.1　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

在空间取定一点 O，以 O 为公共原点作三条两两互相垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称坐标轴，这样就构成了空间直角坐标系，记作$O-xyz$坐标系，点 O 称为坐标原点. 在空间直角坐标系中，一般都采用右手系，即 x，y，z 轴的方向符合右手规则，这就是：以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7-1 所示.

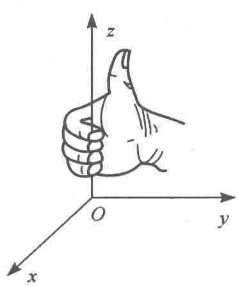

图 7-1

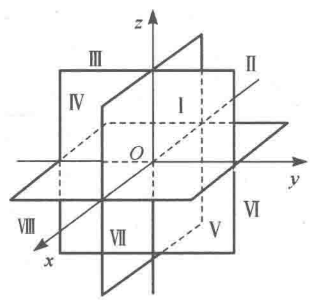

图 7-2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面，分别叫做 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面；这三个平面将空间划分成八个部分，称为空间直角坐标系的八个卦限. 由 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴确定的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 平面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 平面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 表示（图 7-2).

建立了空间直角坐标系后，就可建立空间的点与由三个实数组成的有序数组的一一对应关系.

设 M 为空间中的任一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A, B, C 三点，若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x, y, z，于是点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z)，则称该数组 (x, y, z) 为点 M 在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的坐标，如图 7-3 所示. x, y, z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

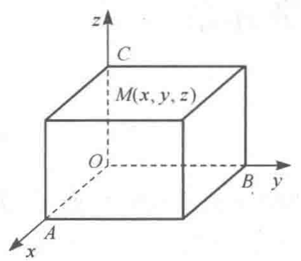

图 7-3

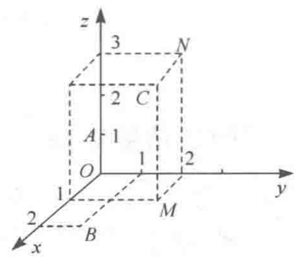

图 7-4

反之，若任意给定一个有序数组 (x, y, z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的三个点 A, B, C，过这三个点分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面只有一个交点 M，该点就是以有序数组 (x, y, z) 为坐标的点，因此空间中的点 M 就与有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应的关系.

显然，原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$；x 轴、y 轴、z 轴上的点的坐标分别是 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$；三个坐标面 xOy, yOz, zOx 上的点的坐标分别是 $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$, $(x, 0, z)$.

例 1 在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，画出点 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, 2, 3)$.

解 根据点 A 的坐标特征可知：点 A 在 z 轴上，点 B 在 xOy 平面上. 画点 C 时，先在 x 轴的正方向上取 1 个单位的点，y 轴的正方向上取 2 个单位的点，过这两点在 xOy 平面上分别作 y 轴与 x 轴的平行线，交于点 M，过 M 作 Oz 的平行线，在此平行线上，点 M 的上方取 3 个单位便得到点 C(图 7-4).

二、空间两点间的距离

在数轴上，$M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ 两点之间的距离为

$$d=\left|M_1M_2\right|=\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}.$$

在平面上，$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$两点之间的距离为

$$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

设在空间上任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求它们之间的距离 $d=\left|M_1M_2\right|$.

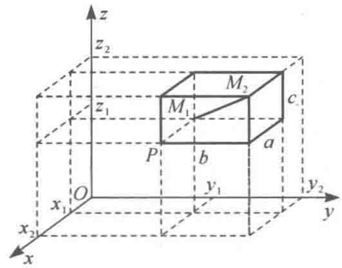

图 7-5

事实上，过两点 M_1，M_2 分别作垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以$\left|M_1M_2\right|$为对角线的长方体(图 7-5). 由于长方体的三个棱长分别为

$$a=\left|x_2-x_1\right|,\quad b=\left|y_2-y_1\right|,\quad c=\left|z_2-z_1\right|,$$

所以

$$\left|M_1M_2\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

特别地，点 $M(x, y, z)$与坐标原点 $O(0, 0, 0)$的距离为

$$\left|OM\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 2　设 $A(-1, 2, 0)$与 $B(-1, 0, -2)$为空间两点，求 A 与 B 两点间的距离.

解　由公式(1)可得 A 与 B 两点间的距离为

$$\left|AB\right|=\sqrt{[-1-(-1)]^2+(0-2)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{2}.$$

例 3　在 z 轴上求与点 $A(3, 5, -2)$和点 $B(-4, 1, 5)$等距的点 M.

解　由于所求的点 M 在 z 轴上，因而 M 点的坐标可设为$(0, 0, z)$，又由于

$$\left|MA\right|=\left|MB\right|,$$

由公式(1)，得

$$\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(5-z)^2}.$$

从而解得

$$z=\frac{2}{7},$$

即所求的点为 $M\left(0, 0, \dfrac{2}{7}\right)$.

习题 7-1

1. 研究空间直角坐标系各个卦限中点的坐标特征，指出下列各点在哪个卦限.

$A(1, -2, 3)$，$B(2, 3, -4)$，$C(2, -3, -4)$，$D(-2, -3, 1)$.

2. 研究在各个坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特征，指出下列各点在哪个坐标面或坐标轴上.

$A(3, 4, 0)$，$B(0, 4, 3)$，$C(3, 0, 0)$，$D(0, -1, 0)$.

3. 求点 $M(x, y, z)$ 与 x 轴，xOy 平面及原点的对称点坐标.

4. 试证以 $A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

§7.2 向量及其坐标表示法

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如，力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做向量(或矢量).

在数学上用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$(图 7-6). 向量可用粗体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示，例如，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$，或 $\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$ 等.

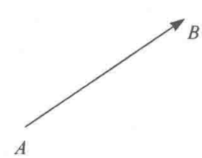

图 7-6

向量的大小叫做向量的模. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 模等于 0 的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的. 我们规定，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不论起点是否一致，如果大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的. 允许平行移动的向量称为自由向量，本书所讨论的向量均为自由向量.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量被认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此，两向量平行又称两向量共线.

类似还有共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$（图 7-7）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

上述作出两向量之和的方法叫做向量加法的三角形法则.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量（图 7-8）等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这就是向量加法的平行四边形法则.

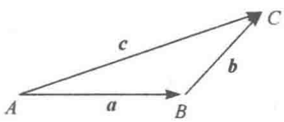

图 7-7

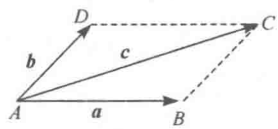

图 7-8

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和.

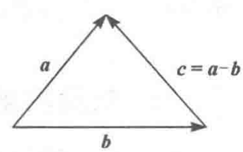

图 7-9

根据向量的三角形法则，若向量 $\boldsymbol{b}$ 加向量 $\boldsymbol{c}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$（图 7-9）.

2. 向量与数的乘法

下面，我们给出向量与数的乘法的定义：

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$，它的方向由 λ 的符号所决定：

当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，其中 λ，μ 都是数；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，其中 λ，μ 都是数；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ 是数.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点(图 7-10).

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$，

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

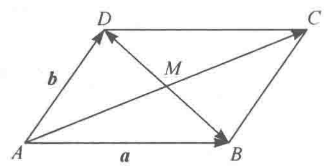

图 7-10

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫做单位向量. 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，称之为 $\boldsymbol{a}$ 的单位化向量，并有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

三、向量的坐标表示法

向量的运算仅靠几何方法研究有些不便. 为此需将向量的运算代数化. 下面先介绍向量的坐标表示法.

在坐标轴上分别取与 x 轴，y 轴和 z 轴方向相同的单位向量称为基本单位向量，分别用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，表示.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O，终点为 $P(x, y, z)$，过点 $P(x, y, z)$ 作三个平面分别垂直于三条坐标轴，设垂足依次为 A，B，C(图 7-11)，根据向量与数的乘法运算得向量 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，由向量的加法的三角形法则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$