高等学校试用教材

高等数学

（下册）

张建国　杜春雨　主编

中国林业出版社

高等学校试用教材

高等数学

（下册）

主编
张建国　杜春雨
副主编
李晓爱　胡　月　王春艳

中国林业出版社
1998・北京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/张建国，杜春雨主编．－北京：中国林业出版社，1998.9

ISBN 7-5038-2085-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①张… ②杜… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 22003 号

中国林业出版社出版

（100009 北京西城区刘海胡同 7 号）

北京昌平县百善印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

1998 年 9 月第 1 版 1998 年 9 月第 1 次印刷

开本：850mm×1168mm 1/32 印张：10.75

字数：240 千字 印数：1～5200 册

定价：11.80 元

前　言

高等数学是变量数学，是以极限论为基础，以微积分为核心，研究变量之间的数量关系与空间形式的科学.

早在16世纪，初等数学理论就已经基本成熟.而在航海、采矿、建筑和战争中获得飞速发展的刚体力学、弹性力学、流体力学等新的学科急需处理实践中出现的变化现象.17世纪初，法国数学家笛卡尔把变量引入数学.从此，迎来了变量数学的新时代.牛顿·莱布尼兹天才地总结了变量数学的新方法，创立了微积分学的基本理论.今天，高等数学已成为现代物理、理论力学、量子化学、晶体化学、生物数学、自然地理、数量经济、工程设计和高新技术等研究中必不可少的工具.

作为工具，我们很自然地要求它简便、实用.为此，我们根据多年的教学经验和研究，对高等专科学校高等数学的教学内容进行了改革，尽可能地结合理工科专业学生的实际需要精选内容，对某些理论性较强的定理或公式，不过分强调严格论证，而把重点放在基本概念、基本理论和方法的掌握和灵活应用上.为便于学生专业课的学习，中值定理及导数的应用放在了积分学后面，极限的精确定义和泰勒多项式作为选学内容，并增加了数学建模的内容.

本书是根据高等专科学校理工类高等数学教学大纲编写的.分为上、下两册.上册包括函数与极限、导数与微分、不定积分、定积分、中值定理及导数的应用、微分方程和无穷级数，书末附有积分表；下册包括空间解析几何、多元函数的微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、行列式与矩阵、n维向量与线性方程组、矢量分析与场论初步和数学建模.可作为工科、物理、化学、生物和计算机专业高等数学的专科教材，也可供各类成人教育专业学生使用.

《高等数学》上册主编车秀敏（开封师范高等专科学校）、姚光

同(克山师范专科学校),副主编刘学忠(周口师范高等专科学校)、王国泰(黄河水利职业技术学院)、华守亮(安阳大学);下册主编张建国、杜春雨(开封师范高等专科学校)、副主编李晓爱(平原大学)、胡月(平顶山教育学院)、王春艳(克山师范专科学校).编委有杜跃鹏、朱玉清、于育民、燕列雅(南阳理工学院)、王恒斌(安阳教育学院)、苗振华(鹤壁师范学校)、刘密(抚顺大学)、邵君舟、李青阳(郑州教育学院)、陈裕先(新余高等专科学校)、刘鸣放、王景周(开封师范高等专科学校).

本书由车秀敏、张建国制定编写大纲,所有主编、副主编、编委分章撰写,然后分别由上册主编车秀敏、姚光同;下册主编张建国、杜春雨通审定稿.在本书的编写过程中,编者参阅了一些教材和著作,并得到各参编院校有关领导和中国林业出版社的大力支持,特别是开封师范高等专科学校数学系王治国副教授、张淑芳副教授对本书的修改提出了许多建议,在此我们深表感谢.

高等数学教材改革需要一个较长时间的不断完善的探索过程,编写出一套较成熟有特色的高等学校专科教材是我们追求的目标,本书全体编者尽管作了很大努力,但由于水平有限,书中缺点、错误难免,诚望专家和广大读者指正.

编者

1998 年 6 月于开封

目　录

第八章　空间解析几何

本章我们首先学习有关向量代数的知识，并建立空间直角坐标系，然后研究平面与空间直线，最后介绍一些常见的二次曲面.

第一节　空间向量及其线性运算

一、向量的概念

在日常生活中，我们常遇到的量一般可分为两类. 一类比较简单，在取定了测量单位后，只用一个实数便可表达. 如长度、面积、重量、温度等等. 这种只具有大小的量叫做**数量**. 而另一类，如力、速度、位移等，它们不仅有大小，而且又有方向，这样的量叫做**向量**(或**矢量**).

在数学上，常用有向线段来表示向量. 以 M_1 为始点，M_2 为终点的向量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$，如图 8-1，有时也常用黑体字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F}$ 等表示向量.

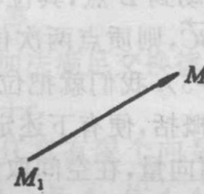


图 8-1

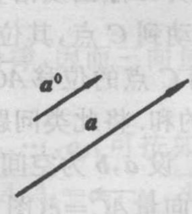


图 8-2

向量的大小叫做**向量的模**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为$|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量叫做**单位向量**. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，

记作 $\boldsymbol{a}^0$(图 8-2). 模长为 0 的向量叫做**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的终点与始点重合,其方向可以看作是任意的.

我们所讨论的向量只考虑它的大小和方向,与它们所处的空间位置无关,这种向量叫做**自由向量**. 向量可以根据需要,平移到空间的任何位置. 因而,模相等,方向相同的两个向量,称为**相等向量**. 如 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,就记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如图 8-3. 即两相等向量,经过平移后必能完全重合.

图 8-3

图 8-4

模相等,方向相反的两个向量叫做**互为反向量**. $\boldsymbol{a}$ 的反向量记作 $-\boldsymbol{a}$ (图 8-4). 显然,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量,即$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

如果两向量方向相同或相反,我们就称这两个向量**平行**或**共线**. 如 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 平行向量的所在直线互相平行或重合. 零向量和任意向量平行(共线).

二、向量的加减法

设质点从 A 点出发沿直线运动到 B 点,其位移为$\overrightarrow{AB}$,又从 B 点沿直线运动到 C 点,其位移为$\overrightarrow{BC}$,则质点两次位移的效果相当于从 A 点到 C 点的位移$\overrightarrow{AC}$(图 8-5). 我们就把位移$\overrightarrow{AC}$规定为位移$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的和. 将此类问题抽象概括,便有下述定义.

定义 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为空间任意两向量,在空间取定点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$(图 8-5)就叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记作

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

求向量和的运算叫做**向量的加法**. 上述定义 1 中求向量和的方法叫向量加法的**三角形法则**.

由定义 1 易知：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

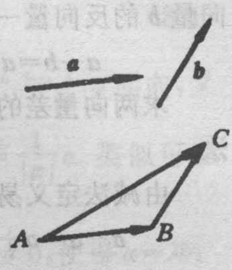


图 8-5

如果我们对空间的任意一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，并以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为一对邻边作平行四边形 $ABCD$（图8-6），则有 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

事实上，注意到 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，由向量加法的三角形法则，得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

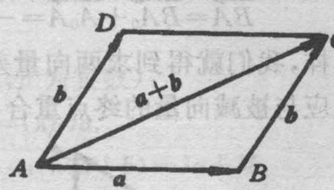


图 8-6

这样，我们又得到一个求两向量和的方法，称为向量加法的**平行四边形法则**. 在物理上，我们常用这个法则求同时作用于同一点的两个力的合力.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由向量加法定义，交换律成立是显然的. 由向量加法的三角形法则，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再与 $\boldsymbol{c}$ 相加，即得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. 由图 8-7 可见它和 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的和相等.

由于向量加法满足交换律和结合律，因而三向量之和可以简单地记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

对于空间任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，可按如下方法求连和. 在空间取定一点 A_0，作 $\overrightarrow{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则向量 $\overrightarrow{A_0A_n}=\boldsymbol{a}$ 就是所给向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

定义 2　对任意两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，定义为

向量 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

求两向量差的运算叫做**向量的减法**.

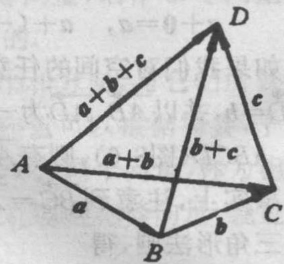


图 8-7

由减法定义易知：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

对于空间两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，任取空间一点 A_0，作 $\overrightarrow{A_0A}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_0B}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA_0}+\overrightarrow{A_0A}=-\overrightarrow{A_0B}+\overrightarrow{A_0A}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

这样，我们就得到求两向量差的作图方法. 注意，这里差向量的终点应与被减向量的终点重合(图 8-8).

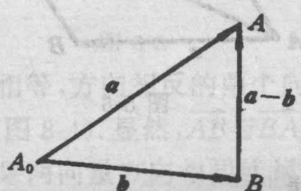


图 8-8

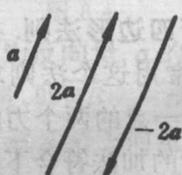


图 8-9

三、数乘向量

定义 3　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}\lambda$，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$. 且当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

由数乘向量的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 就是将 $\boldsymbol{a}$ 沿原来或相反的方向延长 $|\lambda|$ 倍所成向量(图 8-9). 由定义 3 我们易得：

(1) 若 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 且 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

(2) 对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 及其单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，有

$$a^0=\frac{1}{|a|}a \text{ 或 } a=|a|a^0. \tag{8-1}$$

事实上，因为 a^0 与 a 同向，而 $\frac{1}{|a|}>0$，所以 a^0 与 $\frac{1}{|a|}a$ 同向，又 $|a^0|=1$，而 $\left|\frac{1}{|a|}a\right|=\frac{1}{|a|}\cdot|a|=1$，所以，$a^0=\frac{1}{|a|}a$. 类似可证 $a=|a|a^0$.

(3) 非零向量 a,b 平行的充要条件为存在 $\lambda\neq0$，使得 $a=\lambda b$.

事实上，若 $a=\lambda b$，由定义 3 知 $\lambda b\parallel b$，从而 $a\parallel b$；反之，若 $a\parallel b$，则若 a 与 b 方向相同，令 $\lambda=|a|/|b|$；否则，令 $\lambda=-|a|/|b|$. 即总存在数 $\lambda\neq0$，使得 $a=\lambda b$.

向量的数乘运算还满足(设 λ,μ 为实数)：

(4) 结合律　$\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)=(\lambda\mu)a$.

(5) 分配律　$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a,\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.

上述(4)与(5)请读者自证.

例 1　已知平行六面体 $ABCD$-$A'B'C'D'$(图 8-10)，设 $\overrightarrow{AB}=a,\overrightarrow{AD}=b,\overrightarrow{AA'}=c$. 试用 a,b,c 表示对角线向量 $\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{A'C}$.

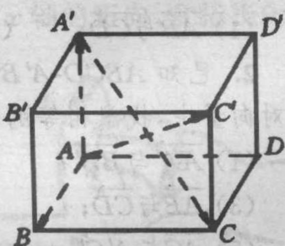


图 8-10

解：因为 $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}$，注意到 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}$，从而知

$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=a+b+c.$$

同理，注意到 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{A'A}=-\overrightarrow{AA'}$，从而

$$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}=a+b-c.$$

例 2　用向量法证明三角形的中位线平行于底边且等于底边长的一半.

解：设 L,M 为△ABC 两边的中点(图 8-11)，则有

$$\overrightarrow{LA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA},\quad \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

由向量加法的三角形法则，

$$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

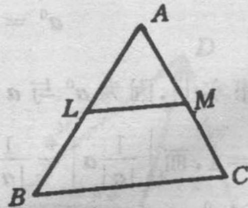


图 8-11

即 $$\overrightarrow{LM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

所以

$$\overrightarrow{LM}\parallel\overrightarrow{BC}\text{且}\ |\overrightarrow{LM}|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|.$$

以上所讨论的向量加、减及数乘运算，统称为**向量的线性运算**.

习 题 8-1

1. 已知平行四边形 $ABCD$(如图 8-6)，试问在下列各对向量中，哪对是相等向量，哪对是互为反向量？

(1) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$；　(2) $\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$.

2. 已知 $ABCD$-$A'B'C'D'$ 为平行六面体(见图 8-10). 在下列各对向量中，找出相等的向量和互为反向量的向量.

(1) $\overrightarrow{AA'}$与$\overrightarrow{BB'}$；　(2) $\overrightarrow{B'C'}$与$\overrightarrow{AD}$；

(3) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$；　(4) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{C'D'}$；

(5) $\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{A'C'}$.

3. 已知平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量法证明该四边形为平行四边形.

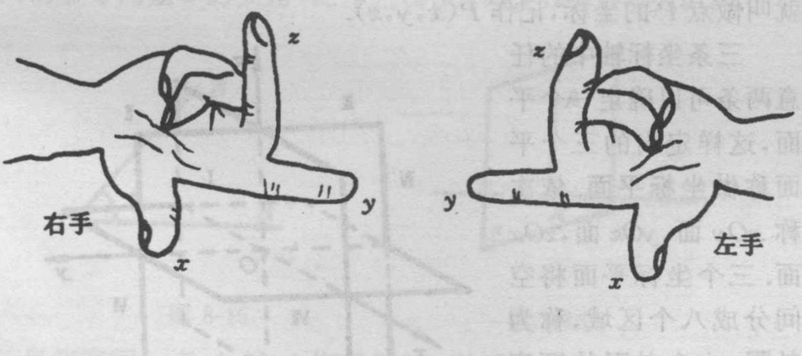
第二节 向量的坐标

一、空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，我们建立了平面直角坐标系. 为了确定空间任意一点的位置，下面介绍空间直角坐标系.

在空间以定点 O 为公共原点作三条互相垂直的，且有相同长度单位的数轴 Ox、Oy、Oz，统称为**坐标轴**. 依次简称为 x 轴、y 轴、z 轴. 或横轴、纵轴、竖轴. 一般情况下，x 轴、y 轴配置在水平面上，z 轴为铅垂线. 这样的三条坐标轴就组成了一个**空间直角坐标系**，记作 $O\text{-}xyz$. O 叫做**坐标原点**.

如果三条坐标轴的正向满足右手法则，即将右手的拇指，食指，中指伸成互相垂直状，并将拇指指向 x 轴的正向，食指指向 y



(a) (b)

图 8-12

轴的正向，此时中指所指的恰为 z 轴的正向，我们就称该坐标系为**右手直角坐标系**(图 8-12(a)). 否则，我们就称该坐标系为**左手直角坐标系**(图 8-12(b)).

以下在未特别指明的情况下，我们所使用的空间坐标系均为

右手直角坐标系.

对空间任一点 P，过 P 依次作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，设与三轴的交点依次为 A，B，C，(图 8-13)，则点 A,B,C 在三轴上的坐标依次称作 P 点的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**. 于是，对空间点 P 就唯一确定了一个有序数组 x,y,z. 反过来，对任给的有序实数组 x,y,z，依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x,y,z 的三点 A,B,C，过此三点依次作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面，则这三个垂直平面的交点 P 就是由有序数组 x,y,z 所确定的唯一的点. 这样，空间的点 P 就和有序实数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 这组有序数 x,y,z 就叫做点 P 的坐标，记作 $P(x,y,z)$.

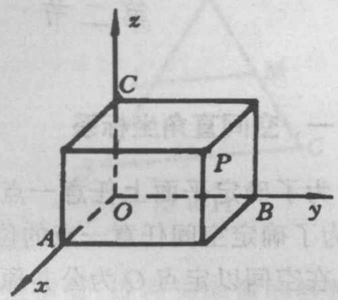


图 8-13

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面称做**坐标平面**. 依次称 xOy 面，yOz 面，zOx 面. 三个坐标平面将空间分成八个区域，称为**卦限**. 八个卦限的顺序如图 8-14 所示，依次叫做第Ⅰ卦限，第Ⅱ卦限，…，第Ⅷ卦限. 读者很容易判定各卦限点的坐标符号，如设 $P(x,y,z)$ 位于第Ⅱ卦限，则有 $x<0,y>0,z>0$. 各卦限点的坐标符号如下表所示.

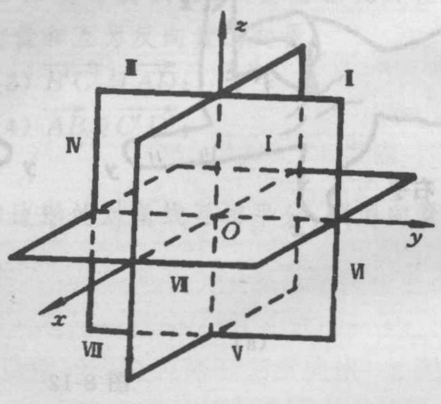


图 8-14

符号 \ 卦限 \ 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

位于坐标轴、坐标面上的点，其坐标具有一定的特征. 如 x 轴上的点，$y=z=0$，yOz 面上的点，$x=0$ 等.

二、向量在数轴上的投影

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两非零向量，则两向量正向的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**（图 8-15），记作 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\theta=0$. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\theta=\pi$.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 l 之间的夹角，是指向量 $\boldsymbol{a}$ 与数轴 l 上与 l 同向的非零向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\angle(\boldsymbol{a},l)$，即 $\angle(\boldsymbol{a},l)=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

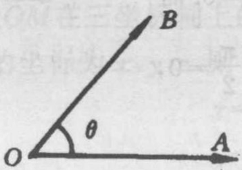


图 8-15

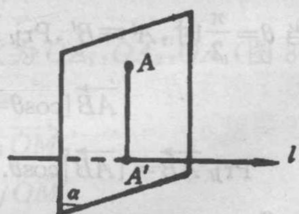


图 8-16

已知空间一点 A，过 A 作已知轴 l 的垂直平面，则该平面与轴 l 的交点 A' 叫做**点 A 在轴 l 上的投影**（图 8-16）.

设空间向量 $\overrightarrow{AB}$ 的始点 A、终点 B 在轴 l 上的投影为 A',B'，则轴 l 上有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$（即 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 l 同向时，$A'B'=|\overrightarrow{A'B'}|$；$\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 l 反向时，$A'B'=-|\overrightarrow{A'B'}|$）叫做**向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影**，记作 $\mathrm{Prj}_l\,\overrightarrow{AB}$. 有时在不需指明轴 l 时简记为 $\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{AB}$. 轴

l 叫做**投影轴**.

若 $\boldsymbol{b}$ 为轴 l 上与 l 同向的非零向量，则$\overrightarrow{AB}$在 l 上的投影还可记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\overrightarrow{AB}$，亦可称为$\overrightarrow{AB}$在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

定理 1（投影定理） 设向量$\overrightarrow{AB}$与轴 l 的夹角为 θ，则有

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta. \tag{8-2}$$

证明：过点 A,B 分别作轴 l 的垂直平面 α,β，设与 l 的交点为 A',B'，过 A' 作$\overrightarrow{AB}$的平行线交 β 平面于点 B''. 由 $\alpha /\!/ \beta$ 知，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B''}$.

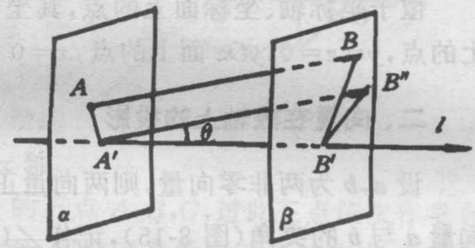


图 8-17

当 $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$时，由图 8-17 易见

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A'B'=|\overrightarrow{A'B''}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$A'\equiv B'$，$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A'B'=0$. 而

$$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

于是 $\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$

当$\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 时，$\overrightarrow{A'B'}$与轴 l 的方向相反，从而

$$\mathrm{Prj}_l\overrightarrow{AB}=A'B'=-|\overrightarrow{A'B'}|=-|\overrightarrow{A'B''}|\cos(\pi-\theta)=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

综上所述定理得证.

推论 相等向量在同一轴上的投影也相等.

定理 2 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 为空间任意 n 个向量，则其和向量在轴上的投影等于各个向量在该轴上的投影和，即

$$\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_2\cdots+\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_n.$$

证略.