

数学文化 与 数学欣赏

主编 马 锐 罗兆富



科学出版社

数学文化与数学欣赏

主 编 马 锐 罗兆富
副主编 成蓉华 杨智明 肖 平



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要培养读者的数学综合素养。全书从数学的重要性出发,以碎片拼接的方式引出数学的发展历程,内容包括自然界数学设计的信念、自由的数学、人的本性的科学与数学原理、新几何和新世界、中国特色的数学文化、数学之美、数学拾趣、名题欣赏、轻松之旅、浪漫的数学情怀、数学的人和事等。尽量采用读者能接受的轻松语言,引领读者进入欣赏数学文化的世界,使读者感悟数学的奇、数学的魅、数学的美、数学的趣、数学的好,从而全方位展示数学的魅力。

本书配有全套的数学课件,适合作为高等院校通识类课程——数学文化教材用书,也可作为通俗读物供教师、各层次学生和其他数学爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学文化与数学欣赏 / 马锐,罗兆富主编. —北京:科学出版社, 2015
ISBN 978-7-03-044090-7

I. ①数… II. ①马… ②罗… III. ①数学—普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 077013 号

责任编辑:李淑丽 孙翠琴 / 责任校对:胡小洁
责任印制:赵 博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 6 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015 年 6 月第一次印刷 印张:19 3/4

字数:480 000

定价:39.80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

数学究竟是什么？这是一个仁者见仁，智者见智的问题。

“数学是科学的皇后”“数学是打开科学大门的钥匙”“数学是人类智慧的王冠上最灿烂的明珠”“数学代表人类抽象思维方面的最高成就与胜利”“数学是观察世界理解世界的一种方式”“数学语言是提供表达精确思想的主要手段”“一门科学只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步。”“数学在人类历史发展和社会生活中发挥着不可替代的作用，也是学习和研究现代科学技术必不可少的基本工具。”

古往今来，不少杰出人物都对数学留下精辟的定义。

的确，数学在自然科学乃至其他科学中的重要地位是不容置疑的。

文化究竟是什么？这也是一个仁者见仁，智者见智的问题。

文化，天地万物的信息产生融汇渗透，是以精神文明为导向的融汇和渗透，是精神文明的保障和导向。

文化是一个非常广泛的概念，给它下一个严格和精确的定义是一件非常困难的事情。不少哲学家、社会学家、人类学家、历史学家和语言学家一直努力，试图从各自学科的角度来界定文化的概念。然而，迄今为止仍没有获得一个公认的、令人满意的定义。只能笼统地说，文化是一种社会现象，是人们长期创造形成的产物，同时又是一种历史现象，是社会历史的积淀物。确切地说，文化是凝结在物质之中又游离于物质之外的，能够被传承的国家或民族的历史、地理、风土人情、传统习俗、生活方式、文学艺术、行为规范、思维方式、价值观念等，是人类之间进行文化交流的普遍认可的一种能够传承的意识形态。

的确，广义的文化是人类创造出来的所有物质和精神财富的总和。

数学的发展是和人类物质文明和精神文明的发展交融在一起的。数学不仅是一种精确的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要组成部分。

欣赏是什么，更是一个仁者见仁，智者见智的问题。

欣赏，享受美好的事物，领略其中的情趣；认为好，喜欢。无论是哪一种解释，都包含一种在喜好、倾慕的前提下愉快地接受、沉浸并享受某种客体的情感。欣赏是一个与主观意识和心理倾向密切相关的概念。例如，音乐欣赏、书画欣赏、雪景欣赏等。因此，欣赏美好的事物，领略其中的趣味，应该是人类的共同追求。

欣赏，作为一种伴随着较为积极的心理倾向活动，对欣赏者的知识水平有什么要求呢？这是一个没有标准答案的问题。我们的看法是，随着欣赏对象的不同，对欣赏者要求也会不一样。对于较为复杂或高级的欣赏客体，那就要求欣赏者具有较高的文化素养。即使是同一个欣赏客体，不同的欣赏者之间也是有层次之分的。例如，对一件书法作品，书法家和普通人都能欣赏，但感受不一样，前者的欣赏是专业的，可称为高级欣赏；而後者的欣赏，只会是“这幅书法写得不错”，可称为初级欣赏或朴素欣赏。

无论是高级欣赏还是初级欣赏，数学完全可以在一种喜好、倾慕的前提下愉快地学习并被

接受。

而且,可以把对数学的朴素欣赏理解为个体认同,喜欢数学的一种心理倾向,一种对数学的美好情感和认知。在朴素欣赏中,一个懂不懂数学或懂得多少数学都没有关系,正如一个五音不全并且不懂五线谱的人同样很喜欢音乐一样。与此稍有不同的是,在数学的所有受众中,不懂数学但仍很喜欢数学的人几乎是凤毛麟角的。如果普通受众不太懂数学,但在长期的社会文化与科学文化氛围中,能感受到数学计算之精准、形式结构之严密、论证推理之充分和数学家们征服世界难题之成功。从而对数学不仅有一种崇敬之情,而且还有一种欣赏之意,并且能使读者学会理性的数学方法,走上从事数学研究与数学传播的道路。

一个社会对数学的重视评价越高,就越容易获得公众对数学的喜爱和认可。

这些都可看成是对数学的朴素欣赏。而数学专业工作者和研究者在数学教育中所提倡的“数学欣赏”则是高级欣赏,它是建立在必要的数学认知基础上的欣赏,因而是高于普通大众对数学文化的朴素欣赏之上的。换言之,高级的数学欣赏是要有一定的数学理解和数学认知作为前提的,这不是本书研究的范围。

本书编写的主要目的:传播数学文化,引领数学欣赏!

我们的“数学文化与数学欣赏”只是想告诉读者,数学不专属于自然科学,也不专属于社会科学,更不属于文学艺术,数学是一种宇宙语言,为一切文明生物所共有、共享。

我们的“数学文化与数学欣赏”只是想带领读者通过数学探幽发微,将数学运用得当,便可以在各种边缘科学中获得重大突破,帮助人们找到迄今从未知晓的规律。

我们的“数学文化与数学欣赏”只是让读者知道,数学的伟大使命就是在混沌之中发现秩序。数学能够提供你无穷无尽的想象空间,帮助人们解决未知世界的难题。

从某种意义上来说,数学完全可以被誉为“科学之王”。

本书的编写团队是一群不懂“文化”、不会“欣赏”的理工科师生组成的,从策划至今,已整整五个年头,个中艰辛,无法言表。多少次想放弃,多少次又从头开始,只是因为对数学文化与欣赏的满腔热爱……至今,终于要与读者见面了,有太多的感谢要说。首先,要感谢首都经贸大学的纪宏教授,一次又一次提供的资料,是我们一次又一次放弃又重新开始的决心。其次,要感谢我们的同行们,他们的支持与鼓励,是我们编写的动力。再次,要感谢提供我们开数学文化讲座的单位,他们提供的平台,让我们无论如何都要完成本书的编写,还要感谢我们的学生李小刚、高芳、罗芬等,你们在资料的收集与整理中付出了辛勤的劳动,让我们加快了本书的编写进程。

编写本书时采用的参考资料甚多,为防止挂一漏万,未在用到处分别指出,只在本书末尾开列主要参考书目。此外,用到的有些资料无法获知作者,在此表示歉意。总之,对参考资料的所有作者衷心感谢!

本书编写团队中,马锐的主要工作是负责策划、统稿、审核和校对,罗兆富的主要工作是执笔编写,成蓉华的主要工作是负责校对、资料查询整理,杨智明和肖平的主要工作是负责校对和视频及PPT电子文档的制作。

限于时间和作者水平,书中难免有不妥之处,望读者指正。

编者

2015年3月

目 录

数学的重要性	1
第一章 数学的发展历程	4
第一节 数学名称的起源	4
第二节 数学的定义	5
第三节 数学发展的几个主要阶段及其特征	6
第四节 数与数系	12
第五节 数学的特点、思想和方法	16
第六节 数学分支巡礼	19
第七节 国际数学奖	30
思考题	36
第二章 对自然界数学设计的信念	37
第一节 数学设计信念的形成	37
第二节 数学设计信念的发展	50
第三节 数学设计信念的结晶	58
思考题	62
第三章 自由的数学	64
第一节 里程碑事件:微积分的发现	64
第二节 英雄的世纪:数学的爆炸式扩张	66
第三节 形而上学的基础	73
第四节 作为人的自由创造物的数学	74
思考题	77
第四章 人的本性的科学与数学	78
第一节 人的本性的科学是演绎科学	78
第二节 伦理学的数学原理	80
第三节 政治学的数学原理	81
第四节 经济学的数学原理	84
思考题	87
第五章 新几何, 新世界	88
第一节 几何学的起源和《几何原本》	88
第二节 试证第五公设	91
第三节 非欧几何的创立和发展	93
第四节 非欧几何的技术性内容	95
第五节 非欧几何的意义	98
思考题	98
第六章 中国特色的数学文化	99
第一节 中国数学的发展历程	99
第二节 中国数学的大一统特征	110

第三节 中国数学的功利性特征·····	113
思考题·····	116
第七章 数学之美·····	117
第一节 美的历程·····	117
第二节 数学美·····	120
思考题·····	126
第八章 数学拾趣·····	127
第一节 斐波那契的兔子·····	127
第二节 神奇的黄金分割·····	137
第三节 艾略特波浪理论·····	150
第四节 分形艺术·····	155
思考题·····	162
第九章 名题欣赏·····	163
第一节 自然数理论·····	163
第二节 连续统假设·····	171
第三节 哥德巴赫猜想·····	174
第四节 费尔马大定理·····	178
第五节 方程和伽罗瓦理论·····	182
第六节 哥尼斯堡七桥问题·····	192
思考题·····	194
第十章 轻松之旅·····	195
第一节 禅师遇数学·····	195
第二节 诗韵与数学·····	208
第三节 神秘的数字·····	234
第四节 大学生逃课记·····	242
思考题·····	250
第十一章 浪漫的数学情怀·····	251
第一节 人生自古有痴情,此恨不关风与月 ·····	251
第二节 云自无心风自忙,人生最苦为卿狂 ·····	256
第三节 问世间情为何物,心灵渴望归宿 ·····	268
第四节 都到信息存真伪,统计方法取其真 ·····	270
思考题·····	271
第十二章 数学的人和事·····	272
第一节 庞伽莱:最后一位数学全才 ·····	272
第二节 陈省身的几何人生:一个世纪的归程 ·····	274
第三节 华罗庚:传奇的数学家生涯 ·····	279
第四节 张益唐:孤独的数学家 ·····	282
第五节 陈景润趣事·····	285
第六节 数学家轶事·····	288
附录·····	295
思考题·····	308
参考文献·····	309

数学的重要性

一、2014 年度美国最佳工作排行:数学家完胜!

美国职场调查网站 CareerCast.com 公布 2014 年度最佳工作,数学家打败所有职业,以年薪 10.1 万美元荣登当年榜首,2022 年前就业成长预估达 23%,前景看好。最棒工作其次是大学教授、统计学家;最糟工作则是伐木工人、报业记者。

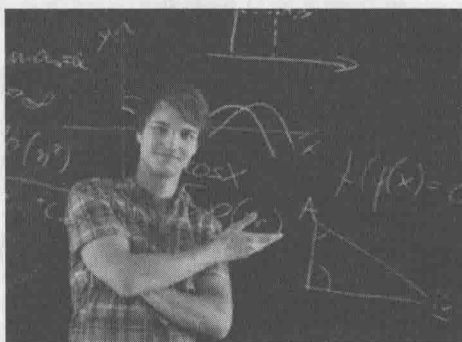
1. Mathematician(数学家)

年薪: \$101360; 2022 年前就业成长预估达 23%; 得分(越低越好):63 分。

上榜理由:良好的工作环境、收入和职业前景,相对较低的工作压力。

2014 年的最佳职业就是——数学家!

数学家负责研究一个公司或组织的决策更合理,无论是石油开采还是汽车制造。他们的就业领域非常广泛,包括能源、交通和 IT 行业等。过去人们都认为数学家是专业学者,但是现在公共和私营部门,以及非营利组织都聘用数学家,他们发挥了更大的作用。

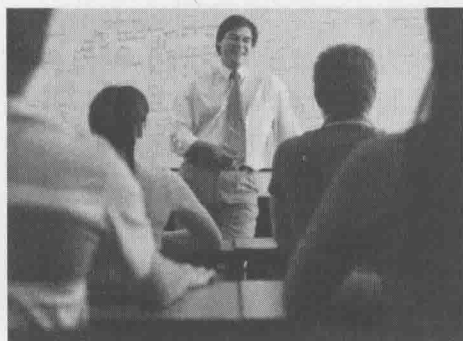


2. University Professor (Tenured)(大学教授(终身))

年薪:68970; 2022 年前就业成长预估达 19%; 得分(越低越好):73 分。

上榜理由:优越的工作环境(所有职业中排名首位),无工作压力。

这里的关键词是“终身”,也就是一辈子不愁工作,每七年就可以享受一次为期六个月的休假。另外,他们一般每周教三到四节课,还可以参与课程设置。



3. Statistician(统计员)

年薪: \$75560; 2022 年前就业成长预估达 27%; 得分(越低越好):96 分。

4. Actuary(保险精算师)

年薪: \$93680; 2022 年前就业成长预估达 26%; 得分(越低越好):103 分。

5. Audiologist(听觉病矫治医师)

年薪: \$69720; 2022 年前就业成长预估达 34%; 得分(越低越好):110 分。

6. Dental Hygienist(牙科保健员)

年薪: \$ 70210; 2022 年前就业成长预估达 33%; 得分(越低越好): 120 分。

7. Software Engineer(软件开发工程师)

年薪: \$ 93350; 2022 年前就业成长预估达 22%; 得分(越低越好): 125 分。

8. Computer Systems Analyst(电脑系统分析师)

年薪: \$ 79680; 2022 年前就业成长预估达 25%; 得分(越低越好): 126 分。

9. Occupational Therapist(职能治疗师)

年薪: \$ 75400; 2022 年前就业成长预估达 29%; 得分(越低越好): 129 分。

10. Speech Pathologist(语言病理学家)

年薪: \$ 69870; 2022 年前就业成长预估达 19%; 得分(越低越好): 138 分。

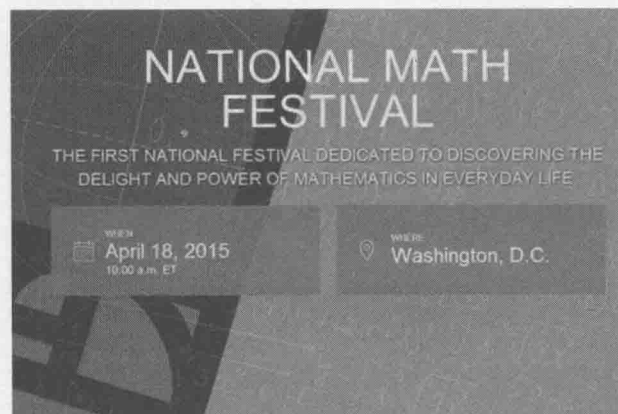
最差职业排在第一名的是伐木工人, 这种职业危险性大, 收入呢, 一年 2 万 4340 美元, 当然这是中位收入。

最差职业排在第二名的是报纸记者, 其年中位收入只有 3 万 7090 美元, 网络媒体的兴起, 抢了报纸的饭碗, 报纸记者也要走投无路了。记者挣得少, 工作又很辛苦甚至可能还危险。所以报纸记者在 200 种职业中排名第 199 位, 也就是最差职业第二名。

二、数学盛宴: 美国国家数学节

数学是不是越来越火了? 至少美国人想把它做火!

2015 年 2 月 3 日美国国家数学研究所(Mathematical Science Research Institute, MSRI)与美国普林斯顿高等研究院(Institute for Advanced Study, IAS)联合宣布: 首届美国国家数学节将在 4 月 18 日星期六于美国首都华盛顿召开。而美国国家数学研究所与普林斯顿高等研究院将成为这次数学节的主办单位。



史密森学会(Smithsonian Institution, SI)将成为这界数学节的协办单位, 将组织不下 30 场的演出、展览及讲座, 并开展终身学习者激励初学者的活动。所有活动向公众开放并且免费。各类活动将在伊妮德答豪普特花园、狄龙·利波雷中心、美国国家自然历史博物馆、美国国家航空航天博物馆、美国非洲艺术馆、弗里尔美术馆和萨克勒美术馆等地分别举行。

这次数学节, 并非某学习机构, 或者某商家刻意为之的商业节日, 从主办单位和协办单位的背景就可见一斑。

美国国家数学研究所, 成立于 1982

年, 著名数学大师陈省身是创立人之一, 并担任第一任所长。美国国家数学研究所是当今世界最卓越的数学合作研究机构, 每年有数以千计的数学家与该机构展开合作。当然, 美国国家数

Days until #MathFest2015

073 11 41 54

Days Hours Minutes Seconds

美国国家数学节官网(MathFest.org)的开幕倒计时

学研究所被人称道的不仅是其高质量及领先世界的基础学术研究,而数学教育及数学公众传播方面的工作也常常被人“点赞”。

普林斯顿高等研究院,1930年成立于美国新泽西州普林斯顿。普林斯顿高等研究院与普林斯顿大学虽有渊源,但其并不是普林斯顿大学的一部分。普林斯顿高等研究院是各个领域的最一流学者做最纯粹的尖端研究,而不受任何教学任务、科研资金限制或者赞助商压力的研究机构。曾经在这里工作的“大人物”的名字都如雷贯耳:爱因斯坦、哥德尔、冯·诺伊曼、小平邦彦、杨振宁、李政道等。今天,在数学方面,此机构还有不少于5名的菲尔兹及沃尔夫奖得主的固定研究人员。

史密森学会 1846 年根据美国国会法令创立,直接隶属于国会,是唯一由美国政府资助、半官方性质的第三部门博物馆机构,同时也拥有世界最大的博物馆系统和研究联合体。史密森学会的管理经费由美国政府拨款。该组织囊括 19 座博物馆、9 座研究中心、美术馆和国家动物园,以及 1365 亿件艺术品和标本。董事会由美国最高法院首席大法官、副总统、3 名参议员、3 名众议员和 6 名非官方人士组成。

有了强力机构对盛会的支持,美国国家数学研究所所长 Eisenbud 信心十足地表示:数学在我们每一个人身边——从彩虹的色彩到我们开的汽车以及开车经过的大桥,从现代智能手机和互联网贸易到最新的医疗技术,从“下五洋捉鳖”的深海研究到“上九天揽月”天文研究——这次盛会将成为数学展示它趣味与美的舞台。数学,每个人能懂,每个人能乐享其中。

数学将给我们从未有过的体验,让我们一起期待吧!

第一章 数学的发展进程

第一节 数学名称的起源

数学,在中国古代最早称为算术,后又称为算学,也称为数学。将数学作为这一学科的规范名称,则要追溯到二十世纪三十年代。在中国历史上,“算”字从什么时候开始使用已不可考证。但数学史家李俨认为“算术”这一名称在汉代已通行使用,标志是《九章算术》一书的书名。这时的算术是指数学的全体,与现代算术的含义不一样。

在两宋时代,由于国内商业与海外贸易的极大发展的需要,出现了众多数学家,随之而来的是大量书籍的涌现,使中国传统数学达到了高峰。这时期“算学”和“数学”是混用的。例如,朱世杰的《四元玉鉴》(1303年)的序中就同时使用了算学和数学这两个词。而朱世杰的另一部数学著作的书名就叫《算学启蒙》。

自元代中期后的几百年间,中国数学水平呈下降趋势,其表现是:年轻人看不懂基本的数学书。这期间虽有明代的徐光启译《欧几里得几何》前六卷,但也没有引起大的反响。在这样的背景下,算学、数学并用的状况只延续了几百年。直至1935年9月,中国数学会名词审查委员会对数学名词重新审查,仍主张“算学”和“数学”两个名词并存混用。1939年6月,为确定起见,中国教育部决定用“数学”而废“算学”。

在西方,“数学”一词来自希腊语。在古希腊时代,它意味着某种“已学会或被理解的东西”或“已获得的知识”,还有“可学会的东西”,即“通过学习可获得的知识”。“数学”一词从表示一般知识到表示数学专门知识,经历了一个比较漫长的过程,直到亚里士多德(Aristotle,约前384~前322)时代才宣告完成。数学名称的专有化其意义十分深远,在当时古希腊只有“诗歌”一词的专有化才能与数学名称的专有化相媲美。

“诗歌”原来的意思是“已经制造或完成的某些东西”,“诗歌”一词的专有化于柏拉图(Plato,约前427~前347)时代完成。不知是什么原因,辞典编辑或涉及名词专有化的知识问题从来没有提到过诗歌,也没有提到数学,但是数学名称的专有化的确受到人们的关注。

柏拉图关心数学的各个方面,在他那充满奇妙幻想的神话故事《费德洛斯篇》中是这样描述的:“故事发生在古埃及的洛克拉丁区域,在那里住着一位老神仙,他的名字叫赛斯,对于赛斯,朱鹭是神鸟,他在朱鹭的帮助下发明了数、计算、几何学和天文学,还有棋类游戏等。”

第一个用完全概念化的语言谈论数学的是亚里士多德,从他开始,人们才谈论统一的、有着自己发展目的的数学。亚里士多德在《形而上学》第一卷中说:数学科学或数学艺术源于古埃及,因为在古埃及有一批祭司有空闲、自觉地致力于数学研究。

亚里士多德提出,“数学”一词的专门化使用是源于毕达哥拉斯(Pythagoras,约前572~前497)的想法。对于毕达哥拉斯学派,数学是一种“生活的方式”。事实上,从公元二世纪的拉丁作家奥卢斯·格利乌斯(Aulus Gellius,生卒年不详)和公元三世纪的希腊哲学家波菲利(Porphyrios,约233~305)以及公元四世纪的希腊哲学家扬布利科斯(Iamblichus,约250~330)的某些记载片段中可见,当时毕达哥拉斯学派对于成年人有一个“一般的学位课程”,其中有正式成员和临时成员。临时成员称为“旁听者”,正式成员称为“数学家”。这里“数学家”仅

表示一类成员,而并不是他们精通数学,后来深化成“数学”这一名词。

第二节 数学的定义

数学是一门从定义、公理(公设)出发,通过逻辑演绎得出结论的学科,而给数学本身一个定义却不是一件容易的事情。

R. 柯朗和 H. 罗宾认为:“数学,作为人类思维的表达形式,反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理及对完美境界的追求。它的基本要素是逻辑和直观、分析和推理、共性和个性。虽然不同的传统学派可以强调不同的侧面,然而正是这些互相对立力量的相互作用,以及它们综合起来的努力,才构成了数学科学的生命力、可用性和它的崇高价值。”

在数学成为一门独立的学科后,历史上诸多数学家和哲学家都试图给出一个比较恰当的数学定义。然而人们发现,数学本身是一个历史的概念,数学的内涵随着时代的变化而变化,给数学下一个令人满意的定义是不可能的。有些定义在某个历史时期看来是适当的,但过了一段时间,人们就发现它已经不能完整地描述数学研究的内容了。正因为如此,既然很难找到一个令大家都满意的定义,数学家们就暂时先放下这个问题,尽量避免给出数学的正式定义,而是换一种比较自由的方式来谈他们眼中的数学是什么。在这里我们就从历史的角度来谈谈“什么是数学”这个问题。

历史上,数学有过各种的定义。

数学史上第一个有名的定义是公元前四世纪的希腊哲学家亚里士多德给出的定义:“数学是量的科学。”其中“量”的涵义是模糊的,显然不能单纯理解为“数量”。尽管如此,由于亚里士多德定义的直观性和可理解性,所以影响十分久远。

亚里士多德定义的背景是:公元前六世纪之前的数学主要是关于“数”的研究。这一时期古埃及、巴比伦、印度及中国等地区发展起来的数学,主要是计数、初等算术与算法,几何学则看成应用算术;公元前六世纪之后,希腊数学兴起,特别是几何的理论化与系统化,其标志是欧几里得(Euclid,前 330~前 275)的《几何原本》问世,突出了对“形”的研究。于是数学成为关于数与形的研究。从那时起直到十七世纪,数学的对象没有本质变化。

在十七世纪,笛卡儿(R. Deacartes, 1596~1650)的时代,数学的研究对象发生了重大的变化。整个十七八世纪,是英雄的世纪,是数学英才辈出的世纪,牛顿(Sir I. Newton, 1643~1727)、莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646~1716)、拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange, 1736~1813)、欧拉(L. Euler, 1707~1783)等一个个光辉的名字,引领数学向前飞速发展。在这一光辉的时代,关于运动与变化的科学——微积分诞生和发展了。微积分的诞生和发展使科学家们能够从数学上研究行星运动、机械的运动、流体运动等。因此,在牛顿与莱布尼茨以后,数学成为研究数、形以及运动与变化的学问。

尽管数学的形式和内容已发生了很大的变化,可是十九世纪的恩格斯(F. Engels, 1820~1895)还是这样来论述数学的本质:“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系。”根据恩格斯的论述,数学可以定义为:数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的科学。

这个定义经苏联在二十世纪五十年代传入中国,影响深远。今天的中国数学,无不打上了苏联数学的烙印。就连《汉语大词典》也已采用这一定义。在其他的词典中,也可找到别的定义,但都大同小异。数学的这个定义,离数学的现实却是渐行渐远了。

然而就是在恩格斯时代,数学的进展给数学带来了很大的变化。题材的巨大膨胀,新领域的开辟,旧领域的扩大,这在十九世纪都是十分明显的。特别是分析学的严密化揭示人们有必要去理解实数集合的结构。

为了处理这个问题,康托尔(G. Cantor, 1845~1918)引进了无穷集合的概念。康托尔解决了不少经久未解决的问题,而且颠覆了许多前人的想法。集合论的诞生和发展,使数学又突出了对“结构”的研究。由此又有了数学定义的集合说:“今日数学以集合论为基础,每一个数学概念都用集合来描述,并且所有的数学关系都被表示为某种集合之间的连锁式成员资格关系。”

最引人注目的是罗素定义,罗素(B. Russell, 1872~1970)是英国数理哲学家,他写道:“纯粹数学完全包含这样的论断,如果某命题对于某些事物是真的,那么另外的某命题对于那些事物就是真的。它根本不讨论第一个命题是否确实是真的,也不管所假定的那些事物是否是真的。如果我们的假设是关于一般事物而不是某些特殊事物的话,我们的推论就构成了数学。这样的数学可以定义为一种科目,我们绝不知道其中说的是什么,也不知道所说的是真还是假。”^①罗素的这个定义曾引起巨大的争议,因为直译过来就是“数学简直就是一个莫名其妙的科目”。不过它仍然指出了数学的一些特性。

在二十世纪八十年代,以一批美国学者为代表的数学家,给出了更贴近数学现实的一个定义:“数学这个领域已被称为模式的科学,其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和性。”^②因为模式就是从不断重复出现的事件中发现和抽象出的规律,是解决问题形成经验的高度归纳总结。只要是一再重复出现的事物,就可能存在某种模式。这个定义简单地将数学定义为关于模式的科学,还是有一定道理的。

第三节 数学发展的几个主要阶段及其特征

数学发展具有阶段性,因此研究者根据一定的原则把数学史分成若干时期。目前,学术界通常将数学发展划分为以下五个时期。

- (1) 数学萌芽期(公元前 600 年以前);
- (2) 初等数学时期(公元前 600 年至十七世纪中叶);
- (3) 变量数学时期(十七世纪中叶至十九世纪二十年代);
- (4) 近代数学时期(十九世纪二十年代至第二次世界大战);
- (5) 现代数学时期(二十世纪四十年代至今)。

一、数学萌芽期(公元前 600 年以前)

这一时期大体上是从远古到公元前六世纪。世界上最古老的几个国家都位于大河流域:黄河流域的中国、尼罗河下游的埃及、幼发拉底河与底格里斯河的巴比伦国和印度河与恒河的印度。这些国家都是在农业的基础上发展起来的,因此他们就必须掌握四季气候变迁的规律。

现在对古巴比伦数学的了解主要是根据巴比伦泥版。这些数学泥版表明,巴比伦自公元前 2000 年左右即开始使用 60 进位制的记数法进行较复杂的计算了,并出现了 60 进位的分

① B. Russell, 1901. Recent Work on the Principles of Mathematics, International Monthly vol. 4

② Renewing U. S. 1990. Mathematics; A plan for the 1990s, The National Academy Press

数,用与整数同样的法则进行计算;已经有了关于倒数、乘法、平方、立方、平方根、立方根的数表;借助于倒数表,除法常转化为乘法进行计算,巴比伦数学具有算术和代数的特征,几何只是表达代数问题的一种方法,这时还没有产生数学的理论。对埃及古代数学的了解,主要依据是两卷纸草书——《莱因德纸草书》(Rhind Papyrus,公元前1650年左右的埃及数学著作,公元1858年由英国的埃及学者莱因德(A. H. Rhind)购得,故名。现藏于伦敦大英博物馆)和《莫斯科纸草书》(莫斯科纸草书又叫戈列尼雪夫纸草书,1893年由俄国贵族戈列尼雪夫在埃及购得,现藏莫斯科普希金精细艺术博物馆)。从这两卷文献中可以看到,古埃及是采用10进位制的记数法。埃及人的数学兴趣是测量土地,几何问题多是讲度量法的,涉及田地的面积、谷仓的容积和有关金字塔的简易算法。但是由于这些算法是为了解决尼罗河泛滥后土地测量和谷物分配、容量计算等日常生活中必须解决的课题而设想出来的,因此并没有出现对公式、定理、证明加以理论推导的倾向。埃及数学的一个主要用途是天文研究,也在研究天文中得到了发展。由于地理位置和自然条件,古希腊受到埃及、巴比伦这些文明古国的许多影响,成为欧洲最先创造文明的地区。

在这漫长的萌芽时期中,数学迈出了十分重要的一步,形成了最初的数学概念,如自然数、分数;最简单的几何图形,如正方形、矩形、三角形、圆形等。一些简单的数学计算知识也开始产生了,如数的符号、记数方法、计算方法等。中小学数学中关于算术和几何的最简单的概念,就是在这个时期的日常生活实践基础上形成的。

数学萌芽时期的特点是数学知识的积累,但这些知识是片断和零碎的,缺乏逻辑因素,基本上看不到命题的证明,这个时期的数学还未形成演绎的科学。

二、初等数学时期(公元前600年至十七世纪中叶)

到了公元前六世纪,希腊几何学的出现成为第一个转折点,数学从此由具体的、实验的阶段,过渡到抽象的、理论的阶段,开始创立初等数学。此后又经过不断的发展和交流,最后形成了几何、算术、代数、三角等独立学科。通常将从公元前六世纪到公元十七世纪初的这一时期称为常量数学或初等数学时期。这一时期也可以分成两段,一是初等数学的开创时代,二是初等数学的交流和发展时代。

(一) 初等数学的开创时代

这一时代主要是希腊数学。从泰勒斯(Thales,约前640~前546)到公元641年亚历山大图书馆被焚,前后延续千余年之久,一般把它划分为以下四个阶段:

(1) 伊奥尼亚阶段(前600~前480年)

(2) 雅典阶段(前480~前330年)

(3) 希腊化阶段(前330~前200年)

(4) 罗马阶段(前200~600年)

伊奥尼亚阶段的主要代表有米利都(Miletus)的伊奥尼亚学派、毕达哥拉斯学派和巧辩学派。在这个阶段上数学取得了极为重要的成就,开始了命题的逻辑证明,发现了不可通约量,提出了几何作图的三大难题——三等分任意角、倍立方和化圆为方,并且试图用“穷竭法”去解决化圆为方的问题。所有这些成就,对数学后来的发展产生了深远的影响。

雅典阶段的主要代表有柏拉图学派、亚里士多德吕园学派、埃利亚学派和原子学派。他们在数学上取得的成果,十分令人赞叹,如柏拉图强调几何对培养逻辑思维能力的重要作用;亚里士多德建立了形式逻辑,并且把它作为证明的工具。所有这些成就把数学向前推进了一

大步。

上述两个阶段称为古典时期。这一时期的数学发展,在希腊化阶段上开花结果,取得了极其辉煌的成就,产生了三个名垂青史的大数学家——欧几里得、阿基米德(Archimedes,前287~前212)和阿波罗尼乌斯(Apollonius,约前262~前190),欧几里得的《几何原本》第一次把几何学建立为演绎体系,从而成为数学史乃至思想史上一部划时代的著作;阿基米德善于将抽象的数学理论和具体的工程技术结合起来,他根据力学原理去探求几何图形的面积和体积,第一个播下了积分学的种子;阿波罗尼乌斯综合前人的成果,写出了有创见的《圆锥曲线》一书,它成为后来所有研究这一问题的基础和出发点。这三大数学家的丰功伟绩,把希腊数学推向光辉的顶点。

随着罗马成为地中海一带的统治者,希腊数学也就转入到罗马阶段,在这个阶段也出现了许多有成就的数学家,其中特别值得一提的是托勒密(C. Ptolemy, 90~168,也是影响人类达1000余年之久的“地心说”理论的集大成者和代表者)结合天文学对三角学的研究、尼可马修斯(Nichomachus)的数论专著《算术入门》和丢番图(Diophantus,约246~330)的《算术》,后两本著作把数学研究从形转向数,在希腊数学中独树一帜,尤其是《算术》一书,它对后来数学发展的影响,仅次于《几何原本》。

总之,在这一时代,数学已经开始发展成为一门独立科学,建立了真正意义上的数学理论。数学的两个部门——算术和几何,已经作为演绎系统建立起来。数学发生了非常明显的变化,即从经验形态上升为理论形态。

(二) 初等数学的交流和发展时代

从公元六世纪到十七世纪初是初等数学在各个地区之间交流,并且取得了重大进展的时期。

在亚洲地区,有中国数学、印度数学和日本数学,印度数学的成就主要在算术和代数方面,最为人称道的是位值制记数法,现行的“阿拉伯数码”源于印度。

七世纪以后,建立了以巴格达为中心的阿拉伯数学。它主要受希腊数学和印度数学的影响。这一时期出现了以花拉子米(AL-Khwarizmi, 783~850)为代表的一大批数学家,为世界数学宝库增添了光彩。代数是阿拉伯数学中最先进的部分,“代数(algebra)”这个名词出自花拉子米的著作《代数学》,它的研究对象被规定为方程论;几何从属于代数,不重视证明;三角学是他们的最大贡献,他们引入正切、余切、正割、余割等三角函数,制作精密的三角函数表,发现平面三角与球面三角等若干重要的公式,使三角学脱离天文学独立出来。

在欧洲,从五世纪开始到文艺复兴前夕,在基督教神学和中世纪经院的权威和教条统治下,阻碍了人们思想的自由发展。十五世纪欧洲的文艺复兴时期,欧洲的数学得以进一步发展,十五世纪的数学活动集中在算术、代数和三角方面。缪勒的名著《三角全书》是欧洲人对平面和球面三角学所作的独立于天文学的第一个系统的阐述,十六世纪塔尔塔里亚(N. Tartaglia, 1499~1557)发现三次方程的代数解法,接受了负数并使用了虚数。十六世纪最伟大的数学家是韦达(F. Vieta, 1540~1603),他写了许多关于三角学、代数学和几何学的著作,其中最著名的《分析方法入门》改进了符号,使代数学大为改观;斯蒂文(S. Stevin, 1548~1620)创设了小数。十七世纪初,对数的发明是初等数学的一大成就。1614年,苏格兰的耐普尔(J. Napier, 1550~1617)首创了对数,1624年布里格斯引入了相当于现在的常用对数,计算方法因而向前推进了一大步。

这个时期的特征是初等数学的主体部分(算术、代数与几何)已全部形成,并且发展成熟。

例如,在算术方面,除了继承原有的计算技术之外,还发明了对数,代数也有很大的发展,韦达建立了符号代数。在三角学方面,雷琼蒙塔努斯(J. Regiomontanus, 1436~1476)著了《三角全书》,其中包括平面三角和球面三角;在几何方面,透视法满足了绘画的需要,投影法满足了绘制地图的需要等。

(三) 中国在这一时期对数学的贡献

中国是具有五千年历史和灿烂文化的文明古国。中国数学的发展和成就,在世界数学史上占有非常重要的地位。在世界数学的宝库里,中国古代数学是影响深远、风格独特的体系。

在初等数学时期,中国在数学领域取得了许多伟大成就,出现了许多闻名世界的数学家,如刘徽(约 225~295)、祖冲之(429~500)、王孝通(唐代数学家,生卒年代已不可考,武德九年(626年)时曾任通直郎太史丞,并参加修改历法工作,著有《缉古算经》)、李冶(1192~1279)、秦九韶(1202~1261)、朱世杰(1249~1314)等;出现了许多专门的数学著作,特别是《九章算术》的完成,标志着我国的初等数学已形成了体系。这部书在中国数学史上乃至在世界数学史上都占有重要的地位,一直受到中外数学史家的重视。我国传统数学在线性方程组、同余式理论、有理数开方、开立方、高次方程解法,以及圆周率计算等方面,都长期居于世界领先地位。

三、变量数学时期(十七世纪中叶至十九世纪二十年代)

这一时期是世界数学文化史上的辉煌时期,人们通常称之为牛顿时代。这一时期是欧洲人的天下,最典型的学科标志就是由常量数学转向变量数学。变量数学的第一个里程碑是解析几何的诞生。

1637年,法国哲学家、数学家笛卡儿用法文写成一生中唯一的数学著作《几何学》,将其作为名著《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(或简称《方法论》)的三个附录之一,在莱顿(Leiden)匿名出版。这标志着解析几何的诞生,从此变量被引入数学,为微积分的创立搭建了历史的舞台。

1665年,英国科学家牛顿发表了《流数简论》,标志着微积分的诞生。微积分的创立是牛顿最卓越的数学成就。他将自古希腊以来求解无限小问题的各种技巧统一为两类普通的算法——微分和积分,并确立了这两类运算的互逆关系,从而完成了微积分发明中最关键的一步,为近代科学发展提供了最有效的工具,开辟了数学上的一个新纪元。

严格地说,微积分是牛顿和莱布尼茨各自独立创立的。莱布尼茨是十七八世纪之交德国最重要的数学家、物理学家和哲学家,一个举世罕见的科学天才。他博览群书,涉猎百科,其著作涉及数学、力学、机械、地质、逻辑、哲学、法律、外交、神学和语言学等。在数学方面,莱布尼茨的贡献也远不止微积分,他的研究及成果渗透到数学的许多领域。

微积分诞生之后,数学迎来了一次空前繁荣的时期,对十八世纪的数学产生了重要而深远的影响。但是牛顿和莱布尼茨的微积分都缺乏清晰的、严谨的逻辑基础,于是在微积分的发展过程中,出现了这样的局面:一方面是微积分创立之后立即在科学技术上获得应用,从而迅速地发展;另一方面是微积分学的理论在当时是不严密的,出现了越来越多的悖论和谬论。数学的发展又遇到了深刻的令人不安的危机。例如,有时把无穷小量看成不为零的有限量而从等式两端消去,而有时却又令无穷小量为零而忽略不计。例如,要计算 x^2 的导数,用微积分的方法必须先取 x 的一个不为 0 的增量 Δx , 由 $(x+\Delta x)^2 - x^2$ 得到 $2x\Delta x + (\Delta x)^2$, 然后再被 Δx 除,得到 $2x + \Delta x$, 最后突然令 Δx 等于 0, 于是求得导数为 $2x$ (那时并没有极限理论,极限理论是二百年后的十九世纪才出现的)。爱尔兰主教、哲学家贝克莱(G. Berkeley, 1685~1753)说,这

是“依靠双重错误得到了不科学但却正确的结果”。因为无穷小量在最初的微积分理论中一会儿说是0,一会儿说不是0。因此,贝克莱嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”。这种攻击正是抓住了原初微积分理论中的缺陷,是切中要害的。数学史上称之为“贝克莱悖论”。

尽管微积分存在缺陷,但经过一个世纪的努力,欧拉、拉格朗日、达朗贝尔、柯西等数学家在严格化基础上重建了微积分,进而在以后的两个世纪里,它以惊人的速度飞快发展,在许多领域中得到了广泛的应用,取得了空前辉煌的成就。作为显示数学理论无比威力的例证之一是海王星的发现。1781年英国天文学家威廉·赫歇尔(F. W. Herschel, 1738~1822)通过观察,发现了天王星。1830年天文学家发现天王星的运行轨道的观测位置与理论计算位置不符,因而推测在天王星之外可能还有一颗未知的行星在影响它的运动。英国天文学家与几何学家亚当斯(J. C. Adams, 1819~1892)和法国天文学家勒维利(Le Verrier, 1811~1877)于1845年、1846年先后按三体运动的推测,用严格的数学方法算出了这颗未知行星的运行轨道。1846年9月23日晚上,在柏林天文台工作的加勒(J. G. Galle, 1812~1910)将望远镜指向秋夜的星空,对准了勒维利预报的方位,果然找到了这颗新的行星,这就是海王星。

微积分之所以有如此神奇的力量,是因为通过这种方法,能找到“无限短”时间内物理运动规律的所谓“微分形式”,然后进行“积分”,从而合乎逻辑地得到适合于表示物体运动规律的函数关系。正如爱因斯坦所说:“微分定律的明晰概念是牛顿最伟大的理智成就之一。”

四、近代数学时期(十九世纪二十年代至第二次世界大战)

经过近两个世纪的开拓,在十八世纪行将结束的时候,数学家对自己从事的这门科学却奇怪的存在着一种普遍悲观的情绪。拉格朗日在1781年给达朗贝尔的一封信中说:“在我看来似乎数学的矿井已经挖掘很深了,除非发现新的矿脉,否则迟早势必放弃它……科学院中几何(数学)处境将会有一天变成目前大学中阿拉伯语的处境一样。”

然而,在十九世纪二十年代却出现了一个伟大的数学成就,它就是把微积分的理论基础牢固地建立在极限的概念上。法国数学家柯西(A. L. Cauchy, 1789~1857)于1821年在《分析教程》一书中,发展了可接受的极限理论,然后极其严格地定义了函数的连续性、导数和积分,强调了研究级数收敛性的必要,给出了正项级数的根式判别法和积分判别法。而在这一时期,非欧几何的出现成为数学史上的一件大事。非欧几何的出现,改变了人们认为欧氏几何唯一地存在是天经地义的观点。它的革命思想不仅为新几何学开辟了道路,而且成为二十世纪初爱因斯坦(A. Einstein, 1879~1955)的相对论产生的前奏和准备,这时人们发现了与通常的欧几里得几何不同的、但也是正确的几何——非欧几何。非欧几何所导致的思想解放对现代数学和现代科学有着极为重要的意义,因为人类终于开始突破感官的局限而深入到自然的更深刻的本质。非欧几何的发现,黎曼(G. F. B. Riemann, 1826~1866)和罗巴切夫斯基(N. I. Lobachevsky, 1792~1856)功不可没,黎曼推广了空间的概念,开创了几何学一片更广阔的领域——黎曼几何学。后来,哈密顿(W. R. Hamilton, 1805~1865)发现了一种乘法交换律不成立的代数——四元数代数。不可交换代数的出现,改变了人们认为存在与一般的算术代数不同的代数是不可思议的观点。它的革命思想打开了近代代数的大门。另一方面,由于一元方程根式求解条件的探究,引进了群的概念。十九世纪二三十年代,挪威数学家阿贝尔(N. H. Abel, 1802~1829)和法国青年伽罗瓦(E. Galois, 1811~1832)开创了近世代数学的研究。这时,代数学的研究对象扩大为向量、矩阵等,并渐渐转向代数系统结构本身的研究。十九世纪还发生了第三个有深远意义的数学事件:分析的算术化。1874年德国数学家魏尔斯特