幼师教材
YOUSHI JIAOCAI

学前教育专业统编教材

数 学

（下 册）

SHU XUE

主审 王明亭 朝泽明
主编 李红军 田发银 郭瑞英

郑州大学出版社

幼师教材
YOUSHI JIAOCAI

学前教育专业统编教材

数 学

（下 册）

SHU XUE

主审 王明亭 朝泽明
主编 李红军 田发银 郭瑞英

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学(上、下册)/李红军,田发银,郭瑞英主编. —郑州:郑州大学出版社,2011.7

学前教育专业统编教材

ISBN 978-7-5645-0482-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李…②田…③郭… Ⅲ.①数学-师范学校:中等专业学校-教材 Ⅳ.①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 104868 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:王　锋　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

河南省瑞光印务股份有限公司印制

开本:787 mm×1 092 mm　1/16

总印张:26.5

总字数:630 千字

版次:2011 年 7 月第 1 版　　印次:2011 年 7 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0482-3　　总定价:38.00 元(上、下册)

前言

QIANYAN

学前教育专业的《数学》教材是根据当前学前教育专业的发展需要，结合该学科教学大纲的精神与要求，在充分调查研究及编写老师酝酿讨论的基础上进行编写的，分上、下两册.

《数学》的编写目的是使学生通过学习满足对数学基本知识的需要，为以后从事幼儿教育工作提供必要的基础知识，同时为一部分学生继续深造奠定基础.

为适应学前教育专业特定的教学对象、专业目标、学制、学时要求，本书各章均有知识要点及方法总结，便于学生抓住重点、突破难点；在内容的深度、广度上注意到了适应学生的入学水平和接受能力；重视数学思想、方法的渗透，淡化解题技巧的训练；注重知识的产生过程，使学生能循序渐进地"研究性"学习相关知识，从而培养学生的创新能力，在实现培养目标的同时，落实素质教育的要求. 教材的编写始终以先进的哲学思想和科学的世界观、方法论为指导，内容具有高度的思想性、科学性、系统性；章节编排及文字叙述注重启发性、探究性、适用性，使学生在获得知识的同时得到严谨的科学态度、思维方法等方面的训练，激励学生发奋图强，勇于创新. 本书强调、突出专业特色，注重基础和应用，系统阐述了中等数学的基本概念和基本理论、方法，并在相关章节融入了数学与学前教育相结合的内容.

全书均按自然课时分节，配备练习(附有参考答案)，以方便教师备课及学生自学. 每章最后都有该章的知识结构图、要点及方法总结、拓展的例题及练习题，为学生的发展提供一定的空间，也为教师的教学留有一定余地. 本书部分章节加 * 内容为选学内容.

由于编者水平有限，书中难免还有不当、疏漏甚至错误之处，恳请各位专家、同行和读者赐教，给予批评指正.

编者

2011 年 5 月

目录

MULU

注:加“ * ”者为选学内容.

第7章

数列与数学归纳法

数列是初等数学的重要内容之一,它与初等数学的许多内容有着密切的联系,在科学技术与日常生活中有着广泛的应用.

在我国古代的数学著作中,曾对数列做过大量的研究,比如《庄子 · 天下篇》中就有“一尺之棰,日取其半,万世不竭”的论述,意思是说,一尺长的木棒,每天取走它的一半,永远也取不完.

如果把每天取走的木棒长度依次写出来,就得到一列数

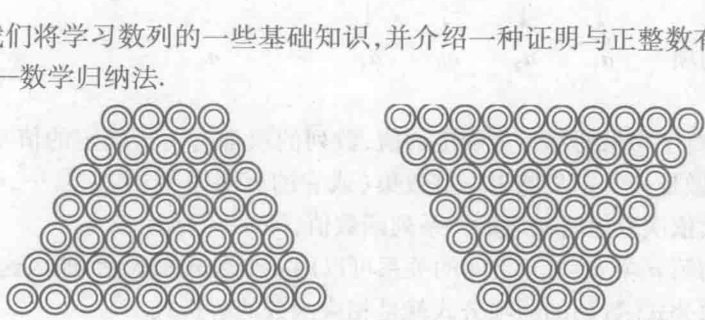
$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots.$$

它们的和是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

学习了本章的知识,你就会用公式计算出这个和,并发现无论天数 n 有多么大,这个和永远小于1.

在本章,我们将学习数列的一些基础知识,并介绍一种证明与正整数有关的数学命题的论证方法——数学归纳法.



$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

7.1 数列

7.1.1 数列及其通项公式

我们看下面的几个例子：

小于 10 的正奇数按从小到大的顺序依次排成一列数

$$1,3,5,7,9. \qquad ①$$

正整数 1,2,3,4,…的倒数依次排成一列数

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots. \qquad ②$$

小明家里有爷爷、奶奶、爸爸、妈妈和小明共五人，他们的年龄依次排成一列数

$$64,61,35,33,6. \qquad ③$$

$\sqrt{2}$精确到 0.1,0.01,0.001,0.000 1,…的不足近似值排成一列数

$$1.4,1.41,1.414,1.414\,2,\cdots. \qquad ④$$

-1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，…排成一列数

$$-1,1,-1,1,\cdots. \qquad ⑤$$

无穷多个 1 排成一列数

$$1,1,1,1,\cdots. \qquad ⑥$$

上面每个例子中都有一列数，每一列数都是按照一定的次序排列起来的，像这样按照一定次序排列起来的一列数叫做数列. 数列中的每一个数叫做这个数列的项. 在第 1 个位置上的数叫做数列的第 1 项（或首项），在第 2 个位置上的数叫做数列的第 2 项，…在第 n 个位置上的数叫做数列的第 n 项，….

项数有限的数列叫做有穷数列，项数无限的数列叫做无穷数列. 例如，数列①、③是有穷数列，数列②、④、⑤、⑥是无穷数列.

如果依次用 $a_1,a_2,a_3,\cdots$来表示数列中的各项，数列的一般形式就可以写成

$$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_n,\cdots.$$

其中，a_n 是数列的第 n 项，叫做数列的通项，a_n 的下标 n 叫做这一项的序号. 我们常把一般形式的数列简记作$\{a_n\}$.

数列中的各项与它们的序号之间有下面的对应关系：

序　号	1	2	3	4	…	n
	↓	↓	↓	↓		↓
数列的项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n

这就是说，对于序号的每一个确定的值，数列的项都有一个确定的值与它相对应，因此，数列可以看做是一个定义域为正整数集（或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$）的函数，当自变量从小到大依次取值时相应的一系列函数值，即 $a_n=f(n)$.

如果数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式. 数列的通项公式就是相应函数的解析式.

例如：数列①的通项公式是 $a_n=2n-1(n\leqslant 5,n\in \mathbf{N}^*)$；

数列②的通项公式是 $a_n=\frac{1}{n}$；

数列⑤的通项公式是 $a_n=(-1)^n$；

数列⑥的通项公式是 $a_n=1$.

像数列⑥这样，各项都是同一个常数的数列叫做常数列.

想一想 数列③有通项公式吗？

如果知道了一个数列的通项公式，那么只要依次用 1,2,3,…代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项.

例 7.1 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n(n+3)$；　　(2) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$.

解：(1)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$4,10,18,28,40;$$

(2)在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为

$$-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},-\frac{5}{6}.$$

如果已知一个数列的前若干项，也可以通过对已知各项与其序号之间关系的分析、归纳，总结出数列的一个通项公式.

例 7.2 写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2,4,6,8；

(2) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$；

(3) $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16}$.

分析：为了推测通项公式，我们研究数列的已知各项（或每一项的某个组成部分），并把它们与序号相比较，找出相互联系的规律.

解：(1)这个数列的前 4 项 2,4,6,8 分别是相应序号的 2 倍，所以它的一个通项公式是

$$a_n=2n.$$

(2)这个数列的前 4 项 $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5}$ 都是分式，分母都是序号加上 1，分子是分母的平方减去 1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}，即\ a_n=\frac{n^2+2n}{n+1}.$$

(3)这个数列的前 4 项 $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16}$ 的符号是正、负相间的，分子都是 1，分母依次为 $2,2^2,2^3,2^4$，是以 2 为底数、以序号为指数的幂，所以它的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}.$$

练习 7.1

1. 分别写出下面的数列：

(1) 20 以内的质数按从小到大的顺序构成的数列；

(2) π 精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, …的近似值(四舍五入)构成的数列.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=n^2-2n$；　　(2) $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$；

(3) $a_n=3\times(-1)^{n+1}$；　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

3. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $0,-2,-4,-6$；

(2) $\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}$；

(3) $-\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{4}$；

(4) $1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出每个数列的一个通项公式：

(1) 3, 6, ( ), 12, 15, ( ), 21, …；

(2) ( ), 4, 9, 16, ( ), 36, 49, …；

(3) $1,\sqrt{2}$, ( ), $2,\sqrt{5}$, ( ), $\sqrt{7}$, …；

(4) $\frac{1}{2},\frac{3}{4}$, ( ), $\frac{7}{16},\frac{9}{32}$, ( ), $\frac{13}{128}$, ….

7.1.2　数列的递推公式

正奇数列 1, 3, 5, 7, …的通项公式是 $a_n=2n-1$，只要依次用 $n=1,2,3,4,\cdots$ 代替公式中的 n，就可以求出这个数列的各项，因此我们常用通项公式来给出数列. 观察这个数列还容易发现，从第 2 项起，它的每一项都比前一项增加了 2，因此这个数列也可用下面的方法给出：

$$a_1=1,\quad a_n=a_{n-1}+2\quad(n\geqslant 2).$$

这就是说，由这个数列的第 1 项以及项 a_n 与 a_{n-1} 之间的关系式，也可以写出这个数列.

再如数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …虽然它的通项公式①不容易写出，但通过观察可以认识到它的规律，即从第 3 项起，每一项都等于与它相邻的前两项的和，即

① $a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

$$a_1=1,$$
$$a_2=1,$$
$$a_n=a_{n-2}+a_{n-1}\quad(n\geqslant 3).$$

像这样，如果已知数列的第1项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式. 递推公式也是给出数列的一种方法.

例 7.3 已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项是1，以后各项由公式 $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$ 给出，写出这个数列的前5项.

解： $a_1=1$,

$$a_2=a_1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$
$$a_3=a_2+\frac{1}{a_2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$
$$a_4=a_3+\frac{1}{a_3}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=\frac{29}{10},$$
$$a_5=a_4+\frac{1}{a_4}=\frac{29}{10}+\frac{10}{29}=\frac{941}{290}.$$

在数学及现代工程技术中，递推是一种常用的、非常重要的思想方法.

练习 7.2

1. 根据下面数列 $\{a_n\}$ 的递推公式，写出它的前5项：

(1) $a_1=1,\quad a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}\quad(n\geqslant 2)$;

(2) $a_1=\frac{1}{2},\quad a_n=4a_{n-1}+1\quad(n\geqslant 2)$;

(3) $a_1=1,\quad a_2=-2, a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\quad(n\geqslant 3)$.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 的递推公式：$a_1=\frac{1}{8},\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant 2)$，写出数列的前4项，并猜想它的通项公式.

7.2 等差数列及其通项公式、前 n 项的和

7.2.1 等差数列及其通项公式

观察下面的数列有什么共同特点：

2006年9月份里星期日的日期为

$$3, 10, 17, 24. \quad ①$$

正奇数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots. \qquad ②$$

一个梯子共 8 级,各级的宽度依次是

$$72,\ 68,\ 64,\ 60,\ 56,\ 52,\ 48,\ 44. \qquad ③$$

不难看出:

对于数列①,从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 7;

对于数列②,从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 2;

对于数列③,从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于 −4.

这就是说,这些数列具有这样的共同特点:从第 2 项起,每一项与前一项的差都等于同一个常数.

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫做等差数列. 这个常数叫做等差数列的公差,公差通常用字母 d 表示.

上面的三个数列都是等差数列,它们的公差依次是 7,2,−4.

特别地,常数列,如

$$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,$$

是公差为 0 的等差数列.

例 7.4 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=-2n+3$.

(1) 计算 $a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3$;

(2) 计算 $a_{n+1}-a_n$;

(3) 试问这个数列是等差数列吗?

解: (1) 由通项公式得

$a_2-a_1=-2\times2+3-(-2\times1+3)=-2$,

$a_3-a_2=-2\times3+3-(-2\times2+3)=-2$,

$a_4-a_3=-2\times4+3-(-2\times3+3)=-2$.

(2) 由通项公式得

$a_{n+1}-a_n=-2(n+1)+3-(-2n+3)=-2$.

(3) 因为 n 是任意正整数,(2) 的结果已说明这个数列从第 2 项起,每一项与它前一项的差都等于 −2,故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且公差 $d=-2$.

如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1,公差是 d,那么根据等差数列的定义得到

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ a_4-a_3=d,\ \cdots,$$

于是有

$$a_1=a_1+0d,$$

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$

$$\cdots\cdots$$

由此归纳出等差数列的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

例 7.5 (1)已知等差数列的首项为 5,公差为$\frac{2}{3}$,求这个数列的第 40 项;

(2)求等差数列 8,5,2,…的第 20 项.

解:(1)由 $a_1=5,d=\frac{2}{3},n=40$,代入等差数列的通项公式得

$$a_{40}=5+(40-1)\times\frac{2}{3}=31.$$

(2)由 $a_1=8,d=5-8=-3,n=20$,得

$$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$$

练习 7.3

1. 指出下面数列中哪些是等差数列,并求出这些等差数列的公差:

(1)1, 1.1, 1.3, 1.9, 2.1, …;

(2)-2, 1, 4, 7, 10, …;

(3)4, 2, 0, -2, -4, …;

(4)$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ….

2. (1)求等差数列 5,9,13,…的第 4 项与第 10 项;

(2)求等差数列 10,8,6,…的第 20 项;

(3)求等差数列 0,-3,-6,…的第 n+1 项.

例 7.6 已知等差数列-3,-7,-11,…,问-85 是不是这个数列的项?-215 是不是这个数列的项?如果是,是第几项?

解:这个等差数列中,$a_1=-3,d=-7-(-3)=-4$,所以,通项公式为

$$a_n=-3-4(n-1).$$

如果-85 是这个数列中的项,则方程

$$-85=-3-4(n-1)$$

有正整数解. 解这个方程得 $n=\frac{43}{2}$,不是正整数,说明-85 不是这个数列的项.

如果-215 是这个数列的项,则方程

$$-215=-3-4(n-1)$$

有正整数解. 解这个方程得 $n=54$,所以-215 是这个数列的第 54 项.

例 7.7 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_4=10,a_7=19$,求 a_1 与 d,并写出这个等差数列的通项公式.

解:由题意可知

$$\begin{cases}a_1+3d=10,\\a_1+6d=19,\end{cases}$$

这是一个以 a_1 和 d 为未知数的二元一次方程组，解这个方程组，得

$$a_1=1,\quad d=3.$$

所以这个等差数列的通项公式是

$$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2.$$

例 7.8 梯子的最高一级宽 44 cm，最低一级宽 72 cm，中间还有 6 级，各级的宽度成等差数列. 求中间各级的宽度.

解：设梯子各级宽度组成的等差数列为 $\{a_n\}$，依题意知

$$a_1=44,\ a_8=72,\ n=8.$$

由等差数列的通项公式，得

$$a_8=a_1+(8-1)d,$$

即

$$72=44+7d,$$

解得

$$d=4.$$

因此

$$a_2=44+4=48,\ a_3=48+4=52,\ a_4=52+4=56,$$
$$a_5=56+4=60,\ a_6=60+4=64,\ a_7=64+4=68.$$

答：梯子中间各级的宽度从上到下依次是 48 cm、52 cm、56 cm、60 cm、64 cm、68 cm.

练习 7.4

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) 已知 $d=-\dfrac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1；

(2) 已知 $a_1=9$，$a_{10}=5\dfrac{2}{5}$，求 d；

(3) 已知 $a_1=-7$，$a_n=20$，$d=3$，求 n.

2. 已知等差数列 $0,-3\dfrac{1}{2},-7,\cdots$，则 -20 是这个数列中的项吗？-42 是这个数列中的项吗？如果是，是第几项？如果不是，说明理由.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中：

(1) 已知 $a_5=10$，$a_{12}=31$，求 a_1 与 d；

(2) 已知 $a_3=9$，$a_9=3$，求 a_{12}；

(3) 如果 a_n 和 a_m 是这个等差数列中的任意两项，求证公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$.

4. 在 15 和 50 之间插入四个数，使它们同这两个数成等差数列，求这四个数.

5. 安装在一个公共轴上的 5 个皮带轮的直径成等差数列，其中最大与最小的皮带轮的直径分别是 216 cm 和 120 cm，求中间三个皮带轮的直径.

6. 在通常情况下，从地面到 10 km 的高空，高度每增加 1 km，气温将下降一个固定的数值，如果 1 km 高度的气温是 8.5 ℃，5 km 高度的气温是 −17.5 ℃，求 2 km 和 8 km 高度

的气温.

7. 思考题:设数列$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列,问:

(1)如果将它的前 m 项去掉,剩余部分组成的新数列还是等差数列吗?

(2)取出数列中的所有奇数项组成一新数列,这个新数列是等差数列吗?

(3)从数列中的某一项 a_r 开始截取出若干项(不少于三项),得一新数列,这个新数列是等差数列吗?

(4)把数列的前 n 项倒置过来,组成新数列 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1$,这个新数列是等差数列吗?

以上各数列如果是等差数列,它们的首项与公差各是多少?

7.2.2 等差中项

如果在 a 与 b 中间插入一个数 A,使 a、A、b 成等差数列,那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项,那么 $A-a=b-A$,所以

$$2A=a+b,$$

$$A=\frac{a+b}{2};$$

反过来,如果 $A=\frac{a+b}{2}$,那么 $2A=a+b$,$A-a=b-A$,即 a、A、b 成等差数列.

容易看出,在一个等差数列中,从第 2 项起,每一项(有穷数列的末项除外)都是它前一项与后一项的等差中项.

例 7.9 已知$\{a_n\}$是等差数列:

(1)$2a_5=a_3+a_7$ 是否成立?$2a_5=a_1+a_9$ 是否成立?

(2)$2a_n=a_{n-2}+a_{n+2}(n>2)$是否成立?$2a_n=a_{n-k}+a_{n+k}(n>k>0)$是否成立?

解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由通项公式得

$$\begin{aligned} a_3+a_7&=a_1+(3-1)d+a_1+(7-1)d\\ &=2[a_1+(5-1)d]=2a_5,\\ a_1+a_9&=a_1+a_1+(9-1)d\\ &=2[a_1+(5-1)d]=2a_5, \end{aligned}$$

所以,$2a_5=a_3+a_7$ 和 $2a_5=a_1+a_9$ 都成立.

(2)由等差数列的通项公式,当 $n>2$ 时,有

$$\begin{aligned} a_{n-2}+a_{n+2}&=a_1+(n-3)d+a_1+(n+1)d\\ &=2[a_1+(n-1)d]=2a_n, \end{aligned}$$

当 n、$k\in\mathbf{N}^*$,$n>k$ 时,有

$$\begin{aligned} a_{n-k}+a_{n+k}&=a_1+(n-k-1)d+a_1+(n+k-1)d\\ &=2[a_1+(n-1)d]=2a_n, \end{aligned}$$

所以,$2a_n=a_{n-2}+a_{n+2}(n>2)$ 和 $2a_n=a_{n-k}+a_{n+k}(n>k>0)$都成立.

例 7.10 已知三个数成等差数列,其和为 15,首末两数的积为 9,求此数列.

解：根据等差数列的定义，可设这三个数分别为 $a-d$、a、$a+d$，依题意得

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15,\\(a-d)(a+d)=9.\end{cases}$$

解此方程组，得 $a=5$，$d=\pm4$.

因此，所求数列为 1，5，9 或 9，5，1.

练习 7.5

1. 求下列各组数的等差中项：

(1) $\dfrac{8-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{12+\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $(a+b)^2$，$(a-b)^2$.

2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4+a_5+a_6=270$，求 a_3+a_7.

3. 三个数成等差数列，它们的和等于 18，它们的平方和等于 116，求这个等差数列.

7.2.3　等差数列的前 n 项和

在实际生活中，我们常常遇到要求等差数列前 n 项和的问题. 例如，如图 7.1 堆放着一堆钢管，共 7 层，最上层有 4 根，下面每一层比上一层多一根，求这堆钢管共有多少根？

这堆钢管自上而下各层钢管数组成一个首项 $a_1=4$、公差 $d=1$ 的等差数列，求这堆钢管有多少根，就是求这个等差数列前 7 项的和. 当然，逐项相加可以算出结果，但是当项数很多时，计算起来就比较麻烦，所以有必要推导等差数列前 n 项和的计算公式.

为了求出图 7.1 所示的钢管总数，我们设想，在这堆钢管的旁边，如图 7.2 那样倒放着同样的一堆钢管，由于图 7.2 所示的那堆钢管自上而下每层比上一层少一根，这样，当两堆钢管合在一起时，每层的钢管数都相等. 即

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

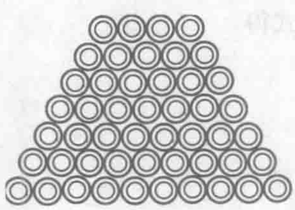


图 7.1

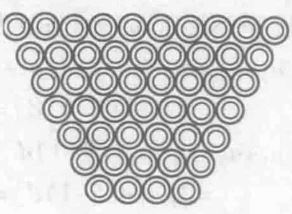


图 7.2

由于共有 7 层，两堆钢管总数应是 $(4+10)\times7$，因此所求的钢管数就是

$$(4+10)\times7\div2=49(\text{根}).$$

显然，上面的做法对等差数列的前 n 项和的计算具有一般性.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d].\quad ①$$

再把各项的次序反过来，上式又可以写成

$$\begin{aligned}S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1\\ &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + [a_n - (n-1)d].\end{aligned} \quad ②$$

把①、②两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n &= \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}\\ &= n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

由此得到等差数列的前 n 项和的公式

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

这就是说，等差数列的前 n 项和等于首末两项的和与项数 n 的乘积的一半.

在小学数学中，我们常利用这个公式进行速算，如

$$1+2+3+\cdots+100 = (1+100) \times \frac{100}{2} = 5\ 050①.$$

因为 $a_n = a_1 + (n-1)d$，所以上面的公式又可以写成

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

例 7.11　在等差数列中：

(1) 已知 $a_1 = 4, a_n = 79, n = 16$，求 S_n；

(2) 已知 $a_1 = 100, d = -2, n = 50$，求 S_n.

解：(1) 将已知条件代入等差数列前 n 项和公式，得

$$S_n = \frac{(4+79)\times 16}{2} = 664;$$

(2) 将已知条件代入等差数列前 n 项和公式，得

$$S_n = 100\times 50 + \frac{50(50-1)}{2}(-2) = 2\ 550.$$

例 7.12　某长跑运动员制定了一个为期 10 天的训练计划：第一天跑 5 000 米，以后每天比前一天多跑 500 米，问这名运动员 10 天里一共要跑多少米？

解：依题意知，这名长跑运动员每天的训练量成等差数列，记为 $\{a_n\}$，其中 $a_1 = 5\ 000, d = 500, n = 10$，根据等差数列前 n 项和公式，得

$$\begin{aligned}S_{10} &= 5\ 000\times 10 + \frac{10(10-1)}{2}\times 500\\ &= 72\ 500(\text{米}).\end{aligned}$$

答：这名运动员 10 天里共跑了 72 500 米.

① 这种算法是德国数学家高斯(G. F. Gauss 公元 1777～1855 年)10 岁时提出的. 高斯是近代数学伟大的奠基者之一.