

高等数学

达标训练

上册

陈孝萱 谢兴武 李德宜

等 编

武汉工业大学出版社

高等数学达标训练

(上册)

陈孝萱 谢兴武 李德宜

朱荣昌 姚金城 谢鹏 管典安



武汉工业大学出版社

(元 08.0 全)元 02.14 得家

第一 章 函数与极限

前 言

80	· · · · · 基本概念的简单理解	1-8 1
80	· · · · · 基本初等函数的性质	2-8 2
81	· · · · · 极限的性质,最大最小值	3-8 3
81	· · · · · 单调性与凹凸性的讨论	4-8 4
81	· · · · · 重要极限的证明	5-8 5
82	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	6-8 6
83	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	7-8 7
83	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	8-8 8
84	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	9-8 9
85	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	10-8 10
86	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	11-8 11
87	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	12-8 12
88	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	13-8 13

1	· · · · · 初等函数 章一概	1-1 1
1	· · · · · 数	2-1 2
1	· · · · · 函数	3-1 3
1	· · · · · 极限	4-1 4
1	· · · · · 单调性	5-1 5
1	· · · · · 凸凹性	6-1 6
1	· · · · · 重要极限	7-1 7
1	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	8-1 8
1	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	9-1 9
1	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	10-1 10
1	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	11-1 11
1	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	12-1 12
1	· · · · · 在 X, Y 中的单曲	13-1 13

本书按照同济大学《高等数学》(第三版)的章节次序编写,基本上每节安排一份习题(个别情况下,也有将前后两节合成一节的,打*号的节则一律删去),在选题和编排上注意了以下几点:

1. 题量充足,但不过多,教师在使用时可酌情适量增删,但一般不需要作很大变动。
2. 编入了大量标准化题(是非判断、单项选择、填空),希望通过这些习题,使学生对基本概念和定理理解得更深刻、更细微些,另外也可使教师在批改作业方面节省不少时间和精力。
3. 在基本题下留出了做题的空白,使学生节省了抄题的时间,也方便了批阅。
4. 每一节都选了少量参考题,参考题一般不要求学生作为作业完成(因此未留空白),只供有余力的同学选作。
5. 每一章末安排一次复习自测题,供学生在学完一章后复习提高用。
6. 采取活页形式以便教师检查和批阅,答案部分集中排印,教师可根据本班情况,在适当的时候将答案发给学生。
7. 为了节省篇幅,答案部分只给出标准化题及计算题的答案,一般不给出图象,部分证明题给出提示或证明要点(写得比较简略,不能作为学生在证题时的书写规范)。

本书由武汉工业大学、中国地质大学、武汉钢铁学院部分教师联合编写,具体分工是:工大——第一、十一章(陈孝萱),第二、七章(朱荣昌),第六章(管典安),地大——第三、五、十二章(谢兴武),第四章(姚金城);钢院——第八、九章(李德宜),第十章(谢鹏)。

限于编者的水平和编写时间的仓促,错误和缺点恐怕在所难免,诚恳希望读者批评指正。

编者 1993.7.20

目 录

第一章 函数与极限	1	§ 3-4 函数单调性的判定法	66
§ 1-1 函数	1	§ 3-5 函数的极值及其求法	69
§ 1-2 初等函数	1	§ 3-6 最大值、最小值问题	71
§ 1-3 数列的极限	6	§ 3-7 曲线的凹凸与拐点	75
§ 1-4 函数的极限	9	§ 3-8 函数图形的描绘	77
§ 1-5 无穷小与无穷大	11	§ 3-9 曲率	79
§ 1-6 极限运算法则	15	§ 3-10 方程的近似解	81
§ 1-7 极限存在的准则 两个重要极限	18	自测题 3	82
§ 1-8 无穷小的比较	21	第四章 不定积分	83
§ 1-9 函数的连续性与间断点	23	§ 4-1 不定积分的概念与性质	83
§ 1-10 连续函数的运算与初等函数的连续性	26	§ 4-2 换元积分法	86
§ 1-11 闭区间上连续函数的性质	30	§ 4-3 分部积分法	91
自测题 1	33	§ 4-4 有理函数的积分	95
第二章 导数与微分	35	§ 4-5 三角函数的有理式与无理函数的积分	97
§ 2-1 导数概念	35	自测题 4	101
§ 2-2 函数的和、差、积、商的求导法则	39	第五章 定积分	102
§ 2-3 反函数的导数 复合函数的求导法则	41	§ 5-1 定积分概念	102
§ 2-4 初等函数的求导 双曲函数的导数	44	§ 5-2 定积分的性质 中值定理	104
§ 2-5 高阶导数	45	§ 5-3 微积分基本公式	107
§ 2-6 隐函数的导数 由参数方程确定的函数导数 相关变化率	47	§ 5-4 定积分的换元法	111
§ 2-7 函数的微分	51	§ 5-5 定积分的分部积分法	115
§ 2-8 微分在近似计算中的应用	51	§ 5-6 定积分的近似计算	117
自测题 2	53	§ 5-7 广义积分	118
第三章 中值定理与导数应用	55	自测题 5	120
§ 3-1 中值定理	55	第六章 定积分的应用	121
§ 3-2 罗必塔法则	59	§ 6-1 定积分的元素法	121
§ 3-3 泰勒公式	62	§ 6-2 平面图形的面积	121
		§ 6-3 体积	125
		§ 6-4 平面曲线的弧长	127
		§ 6-5 功 水压力和引力	129
		§ 6-6 平均值	132
		自测题 6	133
		答案或提示	135

第一章 函数与极限

§ 1-1 函数

§ 1-2 初等函数

一、是非判断题

1. $f(x)$ 在 X 上有界, $g(x)$ 在 X 上无界, 则 $f(x)+g(x)$ 在 X 上无界. []
2. $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是存在数 A 与 B 使得对任一 $x \in X$ 都有 $A \leq f(x) \leq B$. []
3. $f(x), g(x)$ 都在区间 I 上单调增加, 则 $f(x)+g(x), f(x) \cdot g(x)$ 也在 I 上单调增加. []
4. 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的常函数是周期函数. []
5. 任一周期函数必有最小正周期. []
6. $f(x)$ 定义在 $[-l, l]$ 上若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 不可能也是偶函数. []
7. $f(x), g(x)$ 是 $[-l, l]$ 上的奇函数, 则它们的和是奇函数, 积是偶函数. []
8. $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意函数, 则 $f(x^2)$ 必是偶函数, $f(x^3)$ 必是奇函数. []
9. $f(x), g(x)$ 定义在 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 不是奇函数, 则 $f(x)+g(x)$ 也不可能为奇函数. []
10. 不单调的函数一定没有单值反函数. []
11. 偶函数必无单值反函数. []
12. 奇函数若有单值反函数, 则此反函数也是奇函数. []
13. 凡是分段表示的函数都不是初等函数. []

二、单项选择题

1. 下面的函数对中, 相同的一对是_____.

- (A) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ 与 $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$; (B) $\sin(\operatorname{arc} \sin x)$ 与 x ;
 (C) $\sin(\operatorname{arc} \cos x)$ 与 $\sqrt{1-x^2}$; (D) $\operatorname{arc} \sin(\sin x)$ 与 x .

2. 下面四个函数中, 与 $y=|x|$ 不同的是_____.

- (A) $y=|\mathrm{e}^{inx}|$; (B) $y=\sqrt{x^2}$;
 (C) $y=\sqrt[4]{x^4}$; (D) $y=x \operatorname{sgn} x$;

3. 下面四个函数中, 与其它三个不同的是_____.

- (A) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; (B) $\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;
 (C) $\operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; (D) $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$.

4. 下列函数中_____既是奇函数, 又是单调增加的.

- (A) $\sin^3 x$; (B) x^3+1 ; (C) x^3+x ; (D) x^3-x .

5. 下列函数组中, _____组内含有一函数与函数 $y=x$ 相同.

- (A) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$; (B) $y = \arcsin(\sin x)$ 与 $y = \sin(\arcsin x)$;
 (C) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ 与 $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)$; (D) $y = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} + 1$ 与 $y = x\sec^2 x - x\operatorname{tg}^2 x$.

三、填空题

- 若 $f(x) = x^3 + 1$ 则 $[f(x)]^2 - f(x^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(\sin x)$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$, $f(x+a)$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
- $f(x) = x+1$, $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 则 $f[\varphi(x)+1] = \underline{\hspace{2cm}}$.
- $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 2^x$ 则 $\varphi[\varphi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$, $\varphi[\psi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$, $\psi[\varphi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$, $\psi[\psi(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

- $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 则 $f[g(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$, $g[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 填写下列函数的定义域.

函 数	定 定义域
(1) $y = \frac{4x}{x^2 - 3x + 2}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
(2) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
(3) $y = \log_2 [\log_3 (\log_4 x)]$	$\underline{\hspace{2cm}}$
(4) $y = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
(5) $y = \lg(1 - 2\cos x)$	$\underline{\hspace{2cm}}$
(6) $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$	$\underline{\hspace{2cm}}$
(7) $y = \arcsin(\ln \frac{x}{10})$	$\underline{\hspace{2cm}}$

7. 判断下列函数是否是周期函数. 如是, 写出其最小正周期, 把结论填在表内.

	函 数	是否周期函数	最 小 正 周 期
例 1	$\sin^2 x$	是	π
例 2.	$\sin x^2$	否	$/$
(1)	$\sqrt{\sin x}$		
(2)	$\sin \sqrt{x}$		
(3)	$\arcsin(\sin x)$		
(4)	$\sin(\arcsin x)$		
(5)	$[x]$		
(6)	$x - [x]$		
(7)	$ \sin x $		
(8)	$\operatorname{tg} x $		
(9)	$\sin x + \cos x$		
(10)	$\sin^3 x$		
(11)	$x \cos x$		
(12)	$2 + \sin 2\pi x$		

四、作函数图象

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1-1 所示,
试作下列各函数的图形.

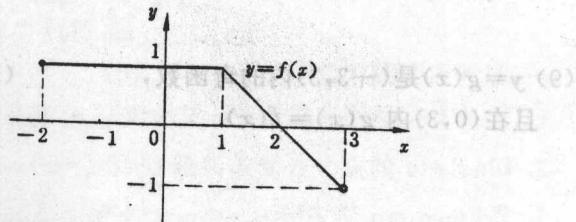


图 1-1

(1) $y=f(x)-1$

(2) $y=f(x+1)$

(3) $y=2f(x)$

(4) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$

(5) $y=-f(-x)$

(6) $y=|f(x)|$

(7) $y=f(|x|)$

(8) $y=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$

- (A) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$
 (B) $y = \arccos(\sin x)$ 与 $y = \sin(\arccos x)$
 (C) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ 与 $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)$
 (D) $y = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} + 1$ 与 $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)$

(9) $y = g(x)$ 是 $(-3, 3)$ 内的奇函数,
且在 $(0, 3)$ 内 $g(x) = f(x)$.

(10) $y = h(x)$ 是以 3 为周期的周期函数
且在 $[0, 3)$ 上 $h(x) = f(x)$.

$$3. f(x) = x + 1, g(x) = \lfloor x \rfloor, h(x) = [x] + 1 =$$

$$4. \varphi(x) = x - \lfloor x \rfloor - \{x\}, \psi(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor =$$

2. $f(x) = |x-1|, g(x) = \frac{1}{2}|x-2|$, 作 $y = f(x) + g(x)$ 及 $y = f[g(x)]$ 的图象.

3. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 且在 $[0, 2]$ 上 $f(x) = x(2-x)$, 写出 $f(x)$ 在 $[-4, 4]$ 上的表达式, 并作图.

$$(5) y = \lg(1 - 2\cos x)$$

$$(6) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-x}{2}$$

$$(7) y = \arcsin \left(\frac{x}{10} \right)$$

7. 判断下列函数是否是周期函数

五、求下列函数的反函数

$$1. y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2. y = \frac{2^x}{2^x + 1}$$

$$3. y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad (0 < |x| \leq 1)$$

$$4. y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad |x| \geq 1$$

- (C) 对任给 $\epsilon > 0$, x_1, x_2, \dots, x_n 中只有有限个点落在 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 外;
(D) 某一 x_i 落在 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 附近时, 该点必落在 $((a-\epsilon), (a+\epsilon))$ 内.
6. 数列 x_n, y_n 是无界数列, 数列 z_n 是有界数列, 则 _____.
- (A) $x_n + y_n$ 必是无界数列. (B) $x_n \cdot y_n$ 必是无界数列. 非量, 一
(C) $x_n + z_n$ 必是无界数列. 于至多数来缺. 本次代充. 些是最大数列. mil 果缺. 且
于. 填空题

5. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$

六、一球的半径为 r , 作外切于球的圆锥, 试将其体积表示为高 h 的函数并说明定义域.

七、参考题

- 试证下列函数不是周期函数: (1) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, (2) $g(x) = \sin x^2$, (3) $h(x) = \sin x + \cos\sqrt{2}x$.
- 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于直线 $x = a$, $x = b$ 对称 ($b \neq a$), 则 $f(x)$ 为周期函数.
- 已知 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上, $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少, 求证对任意 $x_1 > 0, x_2 > 0$ 都有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.
- $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, 若 $F(x) = f[f(x)]$ 有唯一的不动点则 $f(x)$ 也有唯一的不动点(若存在 x_0 使 $f(x_0) = x_0$, 则 x_0 称为 f 的不动点).
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(n) = 1$ ($a > 0$, 常数)

§ 1-3 数列的极限

一、是非判断题

1. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 那末当 n 充分大后 x_n 越来越接近于 a . []
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$. []
3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = a$. []
4. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = a$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. []
5. 如果数列 x_n 发散, 则 x_n 必是无界数列. []
6. 如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时总有无穷多个 x_n 满足 $|x_n - a| < \epsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. []
7. 如果对任意 $\epsilon > 0$, 数列 x_n 中只有有限项不满足 $|x_n - a| < \epsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. []
8. 如果对任意正整数 K 总存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时就有 $|x_n - a| < 10^{-K}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. []
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. []
10. $f(x), g(x)$ 在 D 上有界, $x_1, \dots, x_n, \dots \in D$, 则数列 $y_n = f(x_n) + g(x_n)$ 是有界数列. []

二、单项选择题

1. 若有常数 a 及数列 x_n, y_n , 且 $y_n = x_{2n}$ ($n=1, 2, \dots$) 则 _____.

- (A) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{a}{2}$; (B) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2a$;
(C) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$; (D) 当数列 x_n 发散时, 数列 y_n 也必发散.

2. $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \\ 10^{-7}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则 _____.

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 10^{-7}$;

- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ 10^{-7}, & n \text{ 为偶数;} \end{cases}$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

3. 下列命题中错误的是 _____.

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 存在; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 也存在;

- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在时 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} x_n|$; (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 不存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 也不存在.

4. 根据 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的定义, 对任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得对 $n > N$ 的一切 x_n 不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立, 这里的 N _____.

- (A) 是 ϵ 的函数 $N(\epsilon)$, 且当 ϵ 减少时 $N(\epsilon)$ 增大; (B) 是由 ϵ 所唯一确定的;
(C) 与 ϵ 有关, 但 ϵ 给定时 N 并不唯一确定; (D) 是一个很大的常数, 与 ϵ 无关.

5. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 把 a 及 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 用对应的点在数轴上表示出来, 则 _____.

- (A) n 越大 x_n 和 a 的距离越小;

- (B) 对任给 $\epsilon > 0$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 全部落在 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 内;

- (C) 对任给 $\epsilon > 0$, $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ 中只有有限个点落在 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 外;
(D) 某一 x_n 落在 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内, 则 $n > m$ 时 x_n 也必落在 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内.
6. 数列 x_n, y_n 是无界数列, 数列 z_n 是有界数列, 则 _____.
(A) $x_n + y_n$ 必是无界数列; (B) $x_n \cdot y_n$ 必是无界数列;
(C) $x_n + z_n$ 必是无界数列; (D) $x_n \cdot z_n$ 必是无界数列.

三、填空题

1. 已知数列 $x_n = \frac{1+n}{1+n^2}$, 则 $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. x_n 同上, $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, 则 $s_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, 则 $s_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s_3 = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $s_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{4n-3} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 如果对任给 $\epsilon \underline{\hspace{2cm}}$, 总存在正数 N , 使得对于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时的一切 x_n , 不等式
 $\underline{\hspace{2cm}}$ 都成立, 则说 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

6. 如果数列 x_n 是无界的, 那么对任何正数 M 总存在 $\underline{\hspace{2cm}}$, 使得 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、根据数列极限定义证明

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$, 常数)
(A) 充分条件但非必要条件; (B) 必要条件但非充分条件;
(C) 充分必要条件; (D) 充分条件.

设 (x_1, x_2, \dots, x_n) 为数列 $\{x_n\}$ 中的一段， $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ，
 则 $(x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a)$ 为数列 $\{x_n + a\}$ 中的一段， $x_1 + a, x_2 + a, \dots, x_n + a > 0$ ，
 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + a) = a$ 。

一、是非数学的数列极限概念

五、根据数列极限定义证明

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, k 是常数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} kx_n = ka$.

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 又数列 y_n 有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

六、证明

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$, 则存在正整数 N , 使 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$.

3. 下列命题中错误的是

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 存在
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 也存在
- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 不存在则 x_n 也不存在

2. 若 $x_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$.

- (A) ϵ 是 a 的函数 $N(\epsilon)$, 且当 ϵ 减小时 $N(\epsilon)$ 增大;
 - (B) ϵ 是由 a 所唯一确定的;
 - (C) 与 a 有关, 但 a 给定时 N 并不唯一确定;
 - (D) 是一个很大的常数, 与 a 无关.
5. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 把 a 及 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 用对应的点在数轴上表示出来, 则
- (A) ϵ 越大 x_n 和 a 的距离越小;
 - (B) 对任给 $\epsilon > 0$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 全部落在 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ 内;

七、对于数列 x_n , 若 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k+1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

$$\therefore (x)_n = (x) \text{ mil (B)}$$

$$\therefore (x)_n = (x) \text{ mil (A)}$$

立题不需先带土 (D)

$$\therefore (x)_n = (x) \text{ mil (C)}$$

3. 选择 (A) (B) (C) (D)

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0 \quad \text{蛋白酶中酶活性}$$

$A = (x) \text{ mil 模}, B = (x) \text{ mil 模 (B)}$

$A = (x) \text{ mil 模}, B = (x) \text{ mil 模 (A)}$

$(x) \text{ mil} = (x) \text{ mil 模}, A = (x) \text{ mil 模 (D)}, B = (x) \text{ mil 模}, C = (x) \text{ mil 模 (C)}$

假设 $0 < b < a$, $0 < c < a$, 则 $b < c < a$, $\epsilon = (x) \text{ mil} \text{ 果成}$

八、参考题

1. $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 是任一数列, 则数列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots (1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots)$ 称为数列 x_n 的子数列(简称子列), 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充要条件是数列 x_n 的任何子列收敛到 a .

2. 用 $\epsilon-N$ 语言叙述 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$ 的意义.

§ 1-4 函数的极限

一、是非判断题

1. 如果 $f(x_0) = 5$, 但 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = 4$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在. []

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 都存在. []

3. 如果对某个 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. []

4. 如果任给 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) < \epsilon$, 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. []

5. 如果任给 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ 时, 有 $|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{10}$, 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. []

6. 如果任给 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| \leq \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| \leq \epsilon$, 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. []

7. 如果在 x_0 的某一去心邻域内, $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那末 $A > 0$. []

8. 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 且 $A > 0$, 那么必有 $X > 0$, 使 x 在 $[-X, X]$ 以外时 $f(x) > 0$. []

9. 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 且 $x > X$ 时 $f(x) \geq 0$, 那末 $A \geq 0$. []

二、单项选择题

1. 从 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ 不能推出 _____.

- (A) $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = 1$; (B) $f(x_0 - 0) = 1$; (C) $f(x_0) = 1$; (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - 1] = 0$.

2. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____.

- (A) 充分条件但非必要条件; (B) 必要条件但非充分条件;
 (C) 充分必要条件; (D) 无关条件.

3. 若 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 则 _____.
 (A) $f(x) = g(x)$; (B) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = g(x)$;
 (C) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$; (D) 以上等式都不成立.
4. 下述命题中错误的是 _____.
 (A) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$; (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$;
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$; (D) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
5. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 2$, 那末对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得 _____.
 (A) 当 x 在 x_0 的 δ 邻域内时, 点 $(x, f(x))$ 落在直线 $y = 2 - \epsilon, y = 2 + \epsilon$ 间;
 (B) 当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域内时, 点 $(x, f(x))$ 落在直线 $y = 2 - \epsilon, y = 2 + \epsilon$ 间;
 (C) 当 $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ 时, $y = f(x)$ 的图形上的点的纵坐标 y 满足 $|y - 2| < \epsilon$;
 (D) 当 $x_0 \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $y = f(x)$ 的图形上的点的纵坐标 y 满足 $2 - \epsilon < y < 2 + \epsilon$.
6. 如果 $f(x) = [x]$ 那末 _____.
 (A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; (B) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$; (C) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$; (D) 以上结果都不对.

三、填空题

1. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 如果对 $\underline{\hspace{2cm}} \epsilon > 0$, 总 $\underline{\hspace{2cm}}$ 正数 X , 使得对适合不等式 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的一切 x , 总有 $\underline{\hspace{2cm}}$, 则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记作 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 根据极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$: 对任给 $\underline{\hspace{2cm}}$, 取 $\delta = \underline{\hspace{2cm}}$, 则当 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 有 $|(3x-1)-8| = 3|x-3| < \underline{\hspace{2cm}} = \epsilon$. $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} (3x-1) = 8$.
4. 根据极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1$: $\underline{\hspace{2cm}} \epsilon > 0$, 取 $X = \underline{\hspace{2cm}}$, 则当 $\underline{\hspace{2cm}}$ 时, 就有 $|\frac{x^3+1}{x^3} - 1| = \frac{1}{|x|^3} < \underline{\hspace{2cm}} = \epsilon$. $\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1$.
5. 根据极限的定义, 填写下表:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$	任给 $\epsilon > 0$, 总存在	使得当			
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$					
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$					

四、根据函数极限的定义证明

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (6x+3) = 15$ 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{3+x} = -\frac{1}{2}$

3. 根据无穷大的定义,填写了表:

小农天量 1.8

小农天量变函数,小农天量变函数变一中男变一某事 1.8

小农天量变函数,小农天量变函数变一中男变一某事 1.8

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^2 - 4} = 4 \quad 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$$

小农天量 1.8

小农天量 1.8

小农天量 1.8

小农天量 1.8

大农天量 1.8

五、根据极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

踩鞋板简单 1.8

量的制备中去质面不,小农天量 1.8

小农天量 1.8 (A)

小农天量 1.8 (B)

量的制备中去质面不,1.8 (C)

小农天量 1.8 (D)

使得当 $|x| > X$ 时, 小农天量 1.8 (A)就有 $|\arctan x| > M$

大农天量 1.8 (E)

育瘦削, $\infty = (\infty) g \text{ mil}, \infty = (\infty) h \text{ mil}$ 1.8

10 = [(\infty) a - (\infty) b] mil (F)

10 = [(\infty) a + (\infty) b] mil (G)

六、根据极限定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在且相等.

小农天量 1.8 (H)

大农天量 1.8 (I)

小农天量 1.8 (J)

中男变函数,由 $\infty \rightarrow \infty$ 2.0中男变函数,由 $\infty \rightarrow \infty$ 2.0中男变函数,由 $\infty \rightarrow \infty$ 2.0

七、参考题

1. 如果 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有界, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 根据极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = 0$.2. 按极限定义证明 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

§ 1-5 无穷小与无穷大

一、是非判断题

1. 零是无穷小.

2. 10^{-100} 是无穷小.

3. $\frac{1}{x}$ 是无穷小. []
4. 在某一变化过程中, 一变量可变得比任何正数都小, 则此变量是无穷小. []
5. 在某一变化过程中, 一变量的绝对值越变越小, 则此变量是无穷小. []
6. 如果对任意给定的正整数 k , 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 总有 $|x_n| < 10^{-k}$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时 x_n 是无穷小. []
7. 如果对于 $\epsilon = 10^{-10}$, $|u_n| < \epsilon$ 恒成立 ($n = 1, 2, \dots$), 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, u_n 是无穷小. []
8. 两个无穷小的商仍是无穷小. []
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$, 其中 α 是当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小. []
10. $\because x \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是无穷小, \therefore 在 $x \rightarrow 0$ 时 $\frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$ 是无穷大. []

二、单项选择题

1. 若 x 是无穷小, 下面说法中错误的是 _____.
 (A) x^2 是无穷小; (B) $2x$ 是无穷小;
 (C) $x - 0.0001$ 是无穷小; (D) $-x$ 是无穷小.
2. 在 $x \rightarrow 0$ 时, 下面说法中错误的是 _____.
 (A) $x \sin x$ 是无穷小; (B) $x \sin \frac{1}{x}$ 是无穷小;
 (C) $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是无穷大; (D) $\frac{1}{x}$ 是无穷大.
3. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 则必有 _____.
 (A) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \infty$; (B) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$;
 (C) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) + g(x)} = 0$; (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{3} f(x) \right] = \infty$.
4. 如果在自变量的某个变化过程中, $f(x)$ 是无穷大, 则在同一变化过程中, 下面说法中错误的是 _____.
 (A) $2f(x)$ 是无穷大; (B) $\frac{2}{f(x)}$ 是无穷小;
 (C) $-f(x)$ 是无穷小; (D) $-f^2(x)$ 是无穷大.
5. $n \rightarrow \infty$ 时, 下列数列中 _____ $\rightarrow \infty$.
 (A) $x_n = 3^n \sin n\pi$; (B) $x_n = 2^n \cos n\pi$;
 (C) $x_n = \frac{2^n}{3^n}$; (D) $x_n = \frac{(n+3)(n+4)}{(n-1)(n-2)}$.
6. 下面命题中正确的是 _____.
 (A) 无穷大是一个非常大的数; (B) 有限个无穷大的和仍为无穷大;
 (C) 无界变量必为无穷大; (D) 无穷大必是无界变量.

三、填空题

1. 如果 α 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) = 3 + \alpha$, $g(x) = \alpha - 1$, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ 且 _____ 那末 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

3. 根据无穷大的定义, 填写下表:

	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$			
$x \rightarrow x_0 + 0$			
$x \rightarrow x_0 - 0$			
$x \rightarrow \infty$		任给 $M > 0$, 总存在 $X > 0$ 使得当 $ x > X$ 时, 就有 $ f(x) > M$	
$x \rightarrow +\infty$			
(A) $x \rightarrow -\infty$			
(B)			

四、根据定义证明

1. $\frac{x-5}{x+1}$ 当 $x \rightarrow 5$ 时为无穷小.

在此邻域内时, 有 $f(x) > g(x)$.

(B) 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ 且 $A > B$, 则必有 $\delta > 0$, 使 $x > \delta$ 时
 $f(x) < g(x)$.

(C) 如果 $f(x) > g(x)$ 而 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 那么 $A > B$.

2. $y = \frac{3x}{x+3}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时为无穷小.

(A) $b=1, c=2$; (B) $b=4, c=1$; (C) $b=1, c=-2$; (D) $b=3, c=-4$.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - ax^2 - x + c}{x+1} = 7$, 则