高等数学

达 标 训 练

上 册

陈孝萱 谢兴武 李德宜

等 编

武汉工业大学出版社

高等数学达标训练

（上册）

陈孝萱　谢兴武　李德宜
朱荣昌　姚金城　谢鹏　管典安

武汉工业大学出版社

前　　言

本书按照同济大学《高等数学》(第三版)的章节次序编写，基本上每节安排一份习题(个别情况下，也有将前后两节合成一节的，打 * 号的节则一律删去)，在选题和编排上注意了以下几点：

1. 题量充足，但不过多，教师在使用时可酌情适量增删，但一般不需要作很大变动。

2. 编入了大量标准化题(是非判断、单项选择、填空)，希望能通过这些习题，使学生对基本概念和定理理解得更深刻、更细微些，另外也可使教师在批改作业方面节省不少时间和精力。

3. 在基本题下留出了做题的空白，使学生节省了抄题的时间，也方便了批阅。

4. 每一节都选了少量参考题，参考题一般不要求学生作为作业完成(因此未留空白)，只供有余力的同学选作。

5. 每一章末安排一次复习自测题，供学生在学完一章后复习提高用。

6. 采取活页形式以便教师检查和批阅，答案部分集中排印，教师可根据本班情况，在适当的时候将答案发给学生。

7. 为了节省篇幅，答案部分只给出标准化题及计算题的答案，一般不给出图象，部分证明题给出提示或证明要点(写得比较简略，不能作为学生在证题时的书写规范)。

本书由武汉工业大学、中国地质大学、武汉钢铁学院部分教师联合编写，具体分工是：工大——第一、十一章(陈孝萱)，第二、七章(朱荣昌)，第六章(管典安)，地大——第三、五、十二章(谢兴武)，第四章(姚金城)；钢院——第八、九章(李德宜)，第十章(谢鹏)。

限于编者的水平和编写时间的仓促，错误和缺点恐怕在所难免，诚恳希望读者批评指正。

编者　1993. 7. 20

目　录

班级________ 姓名________

第一章 函数与极限

§1-1 函 数

§1-2 初等函数

一、是非判断题

1. $f(x)$在X上有界，$g(x)$在X上无界，则$f(x)+g(x)$在X上无界. [ ]

2. $f(x)$在X上有界的充分必要条件是存在数A与B使得对任一$x\in X$都有$A\leqslant f(x)\leqslant B$. [ ]

3. $f(x)$，$g(x)$都在区间I上单调增加，则$f(x)+g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$也在I上单调增加. [ ]

4. 定义在$(-\infty,+\infty)$上的常函数是周期函数. [ ]

5. 任一周期函数必有最小正周期. [ ]

6. $f(x)$定义在$[-l,l]$上若$f(x)$是奇函数，则$f(x)$不可能也是偶函数. [ ]

7. $f(x)$，$g(x)$是$[-l,l]$上的奇函数，则它们的和是奇函数，积是偶函数. [ ]

8. $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的任意函数，则$f(x^2)$必是偶函数，$f(x^3)$必是奇函数. [ ]

9. $f(x)$，$g(x)$定义在$[-l,l]$上$f(x)$是奇函数，$g(x)$不是奇函数，则$f(x)+g(x)$也不可能是奇函数. [ ]

10. 不单调的函数一定没有单值反函数. [ ]

11. 偶函数必无单值反函数. [ ]

12. 奇函数若有单值反函数，则此反函数也是奇函数. [ ]

13. 凡是分段表示的函数都不是初等函数. [ ]

二、单项选择题

1. 下面的函数对中，相同的一对是________.

(A) $\operatorname{arc\,tg}x$与$\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}$； (B) $\sin(\arcsin x)$与x；

(C) $\sin(\arccos x)$与$\sqrt{1-x^2}$； (D) $\arcsin(\sin x)$与x.

2. 下面四个函数中，与$y=|x|$不同的是________.

(A) $y=|e^{\ln x}|$； (B) $y=\sqrt{x^2}$；

(C) $y=\sqrt[4]{x^4}$； (D) $y=x\operatorname{sgn}x$；

3. 下面四个函数中，与其它三个不同的是________.

(A) $\operatorname{arc\,tg}x$； (B) $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

(C) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$； (D) $\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,ctg}x$.

4. 下列函数中________既是奇函数，又是单调增加的.

(A) $\sin^3 x$； (B) x^3+1； (C) x^3+x； (D) x^3-x.

5. 下列函数组中，______组内含有一函数与函数$y=x$相同.

(A) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$； (B) $y=\arcsin(\sin x)$ 与 $y=\sin(\arcsin x)$；

(C) $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$ 与 $y=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)$； (D) $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)}+1$ 与 $y=x\sec^2x-x\mathrm{tg}^2x$.

三、填空题

1. 若 $f(x)=x^3+1$ 则 $[f(x)]^2-f(x^2)=$________.

2. $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x^2)$ 的定义域是________，$f(\sin x)$ 的定义域是________，$f(x+a)$ 的定义域是________.

3. $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 则 $f[\varphi(x)+1]=$________.

4. $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$ 则 $\varphi[\varphi(x)]=$________，$\varphi[\psi(x)]=$________，$\psi[\varphi(x)]=$________，$\psi[\psi(x)]=$________.

5. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$，则 $f[g(x)]=\begin{cases}\\ \\ \end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}\\ \\ \end{cases}$

6. 填写下列函数的定义域.

函 数	定义域
(1) $y=\dfrac{4x}{x^2-3x+2}$	________.
(2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	________.
(3) $y=\log_2[\log_3(\log_4x)]$	________.
(4) $y=\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}$	________.
(5) $y=\lg(1-2\cos x)$	________.
(6) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$	________.
(7) $y=\arcsin\left(\ln\dfrac{x}{10}\right)$	________.

7. 判断下列函数是否是周期函数. 如是，写出其最小正周期，把结论填在表内.

	函数	是否周期函数	最小正周期
例 1	$\sin^2x$	是	π
例 2.	$\sin x^2$	否	/
(1)	$\sqrt{\sin x}$		
(2)	$\sin\sqrt{x}$		
(3)	$\arcsin(\sin x)$		
(4)	$\sin(\arcsin x)$		
(5)	$[x]$		
(6)	$x-[x]$		
(7)	$\|\sin x\|$		
(8)	$\mathrm{tg}\|x\|$		
(9)	$\sin x+\cos x$		
(10)	$\sin^3x$		
(11)	$x\cos x$		
(12)	$2+\sin 2\pi x$		

班级________ 姓名________

四、作函数图象

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1-1 所示，

试作下列各函数的图形.

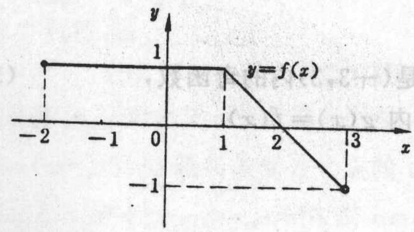

图 1—1

(1) $y=f(x)-1$

(2) $y=f(x+1)$

(3) $y=2f(x)$

(4) $y=f(\frac{x}{2})$

(5) $y=-f(-x)$

(6) $y=|f(x)|$

(7) $y=f(|x|)$

(8) $y=\frac{1}{2}[f(x)+|f(x)|]$

(9) $y=g(x)$是$(-3,3)$内的奇函数，且在$(0,3)$内 $g(x)=f(x)$.

(10) $y=h(x)$是以 3 为周期的周期函数且在$[0,3)$上 $h(x)=f(x)$.

2. $f(x)=|x-1|, g(x)=\frac{1}{2}|x-2|$，作 $y=f(x)+g(x)$ 及 $y=f[g(x)]$的图象.

3. 函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=2f(x)$，且在$[0,2]$上 $f(x)=x(2-x)$，写出 $f(x)$在$[-4,4]$上的表达式，并作图.

五、求下列函数的反函数

1. $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$

2. $y=\frac{2^x}{2^x+1}$

3. $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad (0<|x|\leqslant 1)$

4. $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad |x|\geqslant|$

班级________　　姓名________

5. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$

六、一球的半径为 r,作外切于球的圆锥,试将其体积表示为高 h 的函数并说明定义域.

七、参考题

1. 试证下列函数不是周期函数:(1) $f(x)=\sin\sqrt{x}$, (2) $g(x)=\sin x^2$, (3) $h(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}\,x$.

2. 若函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$的图形对于直线 $x=a$, $x=b$ 对称 $(b\neq a)$,则 $f(x)$ 为周期函数.

3. 已知 $f(x)$定义在$(0,+\infty)$上,$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调减少,求证对任意 $x_1>0$,$x_2>0$ 都有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

4. $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$有定义,若 $F(x)=f[f(x)]$有唯一的不动点则 $f(x)$也有唯一的不动点(若存在 x_0 使 $f(x_0)=x_0$,则 x_0 称为 f 的不动点).

________ 姓名 ________ 班级

§1-3 数列的极限

一、是非判断题

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那末当 n 充分大后 x_n 越来越接近于 a. [ ]

2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$. [ ]

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=a$. [ ]

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. [ ]

5. 如果数列 x_n发散，则 x_n 必是无界数列. [ ]

6. 如果对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时总有无穷多个 x_n满足$|x_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. [ ]

7. 如果对任意 $\varepsilon>0$，数列 x_n 中只有有限项不满足$|x_n-a|<\varepsilon$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. [ ]

8. 如果对任意正整数 K 总存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时就有 $|x_n-a|<10^{-K}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. [ ]

9. $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ 的充分必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. [ ]

10. $f(x)$，$g(x)$在 D 上有界，$x_1,\cdots,x_n,\cdots\in$D，则数列 $y_n=f(x_n)+g(x_n)$是有界数列. [ ]

二、单项选择题

1. 若有常数 a 及数列 x_n，y_n，且 $y_n=x_{2n}(n=1,2,\cdots)$则________.

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{a}{2}$；　(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=2a$；

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，必有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$；　(D) 当数列 x_n发散时，数列 y_n 也必发散.

2. $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n},\text{当 } n \text{ 为奇数},\\ 10^{-7},\text{当 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$ 则________.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=10^{-7}$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}0, n \text{ 为奇数},\\ 10^{-7}, n \text{ 为偶数};\end{cases}$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

3. 下列命题中错误的是________.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在；　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$存在则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$也存在，

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在时 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|\lim\limits_{n\to\infty}x_n|$；　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$不存在则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$也不存在.

4. 根据$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义，对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得对 $n>N$ 的一切x_n不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$都成立，这里的 N ________.

(A) 是 ε 的函数 $N(\varepsilon)$，且当 ε 减少时 $N(\varepsilon)$增大；　(B) 是由 ε 所唯一确定的；

(C) 与 ε 有关，但 ε 给定时 N 并不唯一确定；　(D) 是一个很大的常数，与 ε 无关.

5. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，把 a 及 $x_1,x_2\cdots,x_n,\cdots$用对应的点在数轴上表示出来，则________.

(A) n 越大 x_n 和 a 的距离越小；

(B) 对任给 $\varepsilon>0$，$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$全部落在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内；

(C) 对任给 $\varepsilon>0, x_1, x_2, \cdots, x_n\cdots$ 中只有有限个点落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 外；

(D) 某一 x_m 落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，则 $n>m$ 时 x_n 也必落在 $((a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内.

6. 数列 x_n，y_n 是无界数列，数列 z_n 是有界数列，则________.

(A) x_n+y_n 必是无界数列；　　(B) $x_n \cdot y_n$ 必是无界数列；

(C) x_n+z_n 必是无界数列；　　(D) $x_n \cdot z_n$ 必是无界数列.

三、填空题

1. 已知数列 $x_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}$，则 $x_1=$________，$x_2=$________，$x_3=$________.

2. x_n 同上，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$，则 $s_1=$________，$s_2=$________，$s_3=$________.

3. $x_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$，则 $s_1=$________，$s_2=$________，$s_3=$________，$s_n=$________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=$________；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)=$________；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-3}=$________；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=$________.

5. 如果对任给 ε________，总存在正数 N，使得对于________时的一切 x_n，不等式________都成立，则说 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

6. 如果数列 x_n 是无界的，那么对任何正数 M 总存在________，使得________.

四、根据数列极限定义证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$　　4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　($a>0$，常数)

五、根据数列极限定义证明

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$k$ 是常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = ka$.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，又数列 y_n 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

六、证明

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，则存在正整数 N，使 $n > N$ 时，有 $x_n > 0$.

2. 若 $x_n \geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a \geqslant 0$.

七、对于数列 x_n，若 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，证明 $x_n\to a(n\to\infty)$.

八、参考题

1. $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，是任一数列，则数列 $x_{k1},x_{k2},\cdots,x_{kn},\cdots(1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)$ 称为数列 x_n 的子数列（简称子列），证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件是数列 x_n 的任何子列收敛到 a.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言叙述 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$ 的意义.

§1-4 函数的极限

一、是非判断题

1. 如果 $f(x_0)=5$，但 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=4$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在. [ ]

2. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 都存在. [ ]

3. 如果对某个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那末 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. [ ]

4. 如果任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)<\varepsilon$，那末 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. [ ]

5. 如果任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\dfrac{\delta}{2}$ 时，有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{10}$，那末 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. [ ]

6. 如果任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|\leqslant\delta$ 时，有 $|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$，那末 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. [ ]

7. 如果在 x_0 的某一去心邻域内，$f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那末 $A>0$. [ ]

8. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 且 $A>0$，那么必有 $X>0$，使 x 在 $[-X,X]$ 以外时 $f(x)>0$. [ ]

9. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $x>X$ 时 $f(x)\geqslant0$，那末 $A\geqslant0$. [ ]

二、单项选择题

1. 从 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ 不能推出________.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=1$； (B) $f(x_0-0)=1$； (C) $f(x_0)=1$； (D) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]=0$.

2. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的________.

(A) 充分条件但非必要条件； (B) 必要条件但非充分条件；

(C) 充分必要条件； (D) 无关条件.

3. 若 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，则________.

(A) $f(x)=g(x)$；　　(B) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=g(x)$；

(C) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)$；　　(D) 以上等式都不成立.

4. 下述命题中错误的是________.

(A) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$；　　(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$；

(C)若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$；(D)若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=2$，那末对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得________.

(A) 当 x 在 x_0 的 δ 邻域内时，点 $(x,f(x))$ 落在直线 $y=2-\varepsilon$，$y=2+\varepsilon$ 间；

(B) 当 x 在 x_0 的去心 δ 邻域内时，点 $(x,f(x))$ 落在直线 $y=2-\varepsilon$，$y=2+\varepsilon$ 间；

(C) 当 $x_0\leqslant x<x_0+\delta$ 时，$y=f(x)$ 的图形上的点的纵坐标 y 满足 $|y-2|<\varepsilon$；

(D) 当 $x_0\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$y=f(x)$ 的图形上的点的纵坐标 y 满足 $2-\varepsilon<y<2+\varepsilon$.

6. 如果 $f(x)=[x]$ 那末________.

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$；　(B) $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$；(C) $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$；　(D) 以上结果都不对.

三、填空题

1. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to-0} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$________.

2. 如果对________ $\varepsilon>0$，总________正数 X，使得对适合不等式________的一切 x，总有________，则常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作________.

3. 根据极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$：对任给________，取 $\delta=$________，则当________时，有 $|(3x-1)-8|=3|x-3|<$________$=\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

4. 根据极限定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3}=1$：________ $\varepsilon>0$，取 $X=$________，则当________时，就有 $\left|\dfrac{x^3+1}{x^3}-1\right|=\dfrac{1}{|x|^3}<$________$=\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3}=1$.

5. 根据极限的定义，填写下表：

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$</td><td rowspan="6">任给 $\varepsilon>0$，总存在</td><td></td><td rowspan="6">使得当</td><td></td><td rowspan="6">时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

四、根据函数极限的定义证明

1. $\lim\limits_{x\to 2}(6x+3)=15$　　　　2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{3+x}=-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2-4}=4$ 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$

五、根据极限定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$.

六、根据极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在且相等.

七、参考题

1. 如果 $f(x)$ 在 x_0 某邻域内有界，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，根据极限定义证明 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0$.

2. 按极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$.

§1-5 无穷小与无穷大

一、是非判断题

1. 零是无穷小. [ ]

2. 10^{-100} 是无穷小. [ ]

3. $\frac{1}{x}$是无穷小. [ ]

4. 在某一变化过程中，一变量可变得比任何正数都小，则此变量是无穷小. [ ]

5. 在某一变化过程中，一变量的绝对值越变越小，则此变量是无穷小. [ ]

6. 如果对任意给定的正整数 k，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，总有 $|x_n|<10^{-k}$，则 $n\to\infty$时 x_n 是无穷小. [ ]

7. 如果对于 $\varepsilon=10^{-10}$，$|u_n|<\varepsilon$ 恒成立$(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$时，u_n 是无穷小. [ ]

8. 两个无穷小的商仍是无穷小. [ ]

9. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是当 $x\to\infty$时的无穷小. [ ]

10. $\because$ $x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时是无穷小，$\therefore$ 在 $x\to 0$ 时$\dfrac{1}{x\sin\frac{1}{x}}$是无穷大. [ ]

二、单项选择题

1. 若 x 是无穷小，下面说法中错误的是________.

(A) x^2 是无穷小； (B) $2x$ 是无穷小；

(C) $x-0.0001$ 是无穷小； (D) $-x$ 是无穷小.

2. 在 $x\to 0$ 时，下面说法中错误的是________.

(A) $x\sin x$ 是无穷小； (B) $x\sin\frac{1}{x}$是无穷小；

(C) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$是无穷大； (D) $\frac{1}{x}$是无穷大.

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，则必有________.

(A) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$； (B) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$； (D) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{3}f(x)\right]=\infty$.

4. 如果在自变量的某个变化过程中，$f(x)$是无穷大，则在同一变化过程中，下面说法中错误的是________.

(A) $2f(x)$是无穷大； (B) $\dfrac{2}{f(x)}$是无穷小；

(C) $-f(x)$是无穷小； (D) $-f^2(x)$是无穷大.

5. $n\to\infty$时，下列数列中________ $\to\infty$.

(A) $x_n=3^n\sin n\pi$； (B) $x_n=2^n\cos n\pi$；

(C) $x_n=\dfrac{2^n}{3^n}$； (D) $x_n=\dfrac{(n+3)(n+4)}{(n-1)(n-2)}$.

6. 下面命题中正确的是________.

(A) 无穷大是一个非常大的数； (B) 有限个无穷大的和仍为无穷大；

(C) 无界变量必为无穷大； (D)无穷大必是无界变量.

三、填空题

1. 如果 α 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)=3+\alpha$，$g(x)=\alpha-1$，那么$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$________.

2. 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 且________那末$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

3. 根据无穷大的定义，填写下表：

	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$			
$x\to x_0+0$			
$x\to x_0-0$			
$x\to\infty$	任给 $M>0$，总存在 $X>0$ 使得当 $\lvert x\rvert>X$ 时，就有 $\lvert f(x)\rvert>M$		
$x\to+\infty$			
$x\to-\infty$			

四、根据定义证明

1. $\dfrac{x-5}{x+1}$ 当 $x\to5$ 时为无穷小.

2. $y=\dfrac{3x}{x+3}$ 当 $x\to0$ 时为无穷小.