新世纪高等学校教材

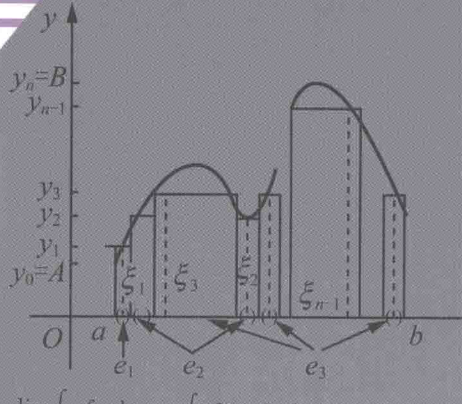
数学与应用数学系列教材

SHIBIAN HANSHU

(第2版)

实变函数

北京师范大学数学科学学院　主　编
房艮孙　钱珮玲　柳　藩　编　著



$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\ \mathrm{d}m=\int_E \lim_{n\to\infty} f_n\ \mathrm{d}m$$

$$\iint_{\mathbf{R}^{p+q}} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)$$

北京师范大学出版集团
北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

数学与应用数学系列教材

实变函数（第2版）

SHIBIAN HANSHU

北京师范大学数学科学学院 主 编

房民孙 钱珮玲 柳 藩 编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

实变函数/房艮孙，钱珮玲，柳藩，编著. —2版. —北京：北京师范大学出版社，2015.3
（新世纪高等学校教材. 数学与应用数学系列教材）
ISBN 978-7-303-18390-6

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①房… ②钱… ③柳… Ⅲ. ①实变函数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 016749 号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：大厂回族自治县正兴印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：14
字　　数：250 千字
版　　次：2015 年 3 月第 2 版
印　　次：2015 年 3 月第 2 次印刷
定　　价：23.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　魏宇龙
美术编辑：焦　丽　　装帧设计：焦　丽
责任校对：李　菡　　责任印制：陈　涛

内容简介

本书以 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格(Lebesgue)积分为中心，分七章讲述有关知识和内容. 第一、二章介绍实变函数所必需的集合论和 $\mathbf{R}^n$ 中点集的有关知识，第三章介绍勒贝格测度，第四章介绍勒贝格可测函数，第五章讲述勒贝格积分理论，第六章讲述微分以及微分与积分的关系，最后一章介绍 L^p 空间的基本知识.

若学时较少，则可选择前五章中的基本内容讲述，不影响知识的系统和完整性.

本书可作为师范院校或综合大学数学系及其他院系学习相关内容时的教材或参考书.

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年，其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部，1983年成立数学与数学教育研究所，2004年成立数学科学学院. 学院现有教师85人，其中教授38人，副教授27人；有博士学位的教师占96%. 特别地，有中国科学院院士2人，第三世界科学院院士1人，国家千人计划入选者2人，全国高校教学名师奖1人，教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人，国家杰出青年基金获得者4人，入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人. 现有全日制在校生1 218人，其中本科生819人，硕士研究生315人，博士研究生84人.

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权，1986年获应用数学博士学位授予权. 1988年，基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科. 1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站. 1996年，数学学科成为国家211工程重点建设的学科. 1997年成为国家基础科学人才培养基金基地. 1998年获数学一级学科博士学位授予权. 2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体. 2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台. 2007年数学被评为一级学科国家重点学科. 2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点. 2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌，分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队，调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队. 2011年获统计学一级学科博士学位授予权. 2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排名第5. 学院还有8个硕士点，9个教研室和《数学通报》杂志编辑部.（李仲来执笔）

2014-12-26

第 2 版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系. 2004 年成立北京师范大学数学科学学院. 经过近百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 北京师范大学数学科学学院教师编著的多数教材已先后在这里出版. 除《北京师范大学现代数学丛书》外，就大学教材而言，共有 5 种版本. 第 1 种是列出编委会的《高等学校教学用书》，这是在 1985 年，由我校出版社编写出版了 1 套(17 部)数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第 2 种是未列编委会的《高等学校教学用书》. 第 3 种是《面向 21 世纪课程教材》. 第 4 种是《北京师范大学现代数学课程教材》. 第 5 种是未标注“高等学校教学用书”，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有多部教材进行了修订或出版了第 2 版.

2005 年 5 月，李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授与北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责)，准备对学院教师目前使用的，或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版，另有一些教材需要重新编写. 出版数学与应用数学系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士

研究生系列教材，共4个系列的主要课程教材.

由学院组织和动员全院在职和退休教师之力量，主编出版数学一级学科4个系列的60余部主要课程教材. 教材编写涉及面如此之广和数量之大，持续时间之长，这在一所高校数学院系内是为数不多的，其数量在中国数学界列全国第一. 经过10年的编写，至今已经出版了61部教材，原计划的大多数教材已经出版，对于学院来讲，这是一件值得庆贺的大事. 现在可以说，数学科学学院和北京师范大学出版社基本上是干成了一件大事. 这是很难办成圆满的一件大事. 剩下的一些教材在两三年内多数可以出版. 若留下缺憾，则需要后人去补充.

从数量上看，按教材系列，出版数学与应用数学系列教材30部、数学教育主干课程系列教材11部、大学公共课数学系列教材9部、数学学科硕士研究生系列教材11部. 按出版教材版次，第1版23部、第2版22部、第3版15部、第4版1部. 还出版了3部教辅教材.

从质量上看，8部教材被评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材；8部教材被评为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材；7部教材被评为北京市高等教育精品教材；《师范院校数学学科4个系列教材建设》项目获2012年北京师范大学教育教学成果一等奖.

本套教材可供高等师范院校数学教育本科生和研究生、教育学院数学系、函授(数学专业)、网络大学和在职中学教师等使用和参考. 希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善. (李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院

2014-12-26

第 2 版作者的话

第 2 版改正了第 1 版中已发现的一些印刷错误，对第一章至第五章中一些段落和文字作了修订，增加了一些例子，对某些定理、引理的证明作了某些修改，增加和删去了某些习题．第五章的第一节至第五节的改动较大．新版在介绍勒贝格积分的理论的过程中，通过对勒贝格积分和黎曼积分的背景、定义及性质的类比，强调了它们之间既有不少类似之处，但也有很多本质的差别，而正是这些本质的差别，使得一方面勒贝格积分是黎曼积分的推广，保持了黎曼积分某些原先的性质．另一方面，新的积分扩充了人们所研究函数的范围和极限理论，使得在处理极限和积分、微分、求和等换序问题时方便，灵活了，避免了很多烦琐的，非本质的细节．现代数学理论的发展也证实了勒贝格新的积分理论真实地反映了客观世界中某些量的关系．

如今实变函数理论已经渗透到现代数字的各个分支中，例如概率论、泛函分析、随机过程、偏微分方程等．总之，实变函数是学习近代数学的一门重要的基础课程，它在数学的很多分支中的广泛应用成了现代数学的一个特征．

现在学习实变函数的学生有着非常不同的背景，不但有数学专业的学生，也有学习统计、工程、经济、金融等专业的学生，因此我们在编写过程中特别注意了和先修过程数学分析的联系，并尽可能做到介绍理论问题的直观背景和理论背后的思想．

我们希望学生通过对本课程的学习，提升对数学整体的理解，为今后的学习打好基础．

感谢北京师范大学出版社和北京师范大学数学科学学院对本教材重版的资助.

由于编者水平所限，疏漏与不妥之处难免，欢迎读者批评、指正.

房艮孙

2014-09-01

第 1 版作者的话

本书是以编者多年来在北京师范大学数学系本科讲授“实变函数”课程的讲义为基础，参照综合性大学及高等师范院校本科实变函数课程的教学大纲写成的.

全书以 $\mathbf{R}^n$ 上 Lebesgue 积分理论为中心，介绍了 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，Lebesgue 可测函数，积分和微分等内容，以及集合论和 $\mathbf{R}^n$ 中点集方面必需用到的有关知识，最后介绍了 $\mathbf{L}^p(1\leqslant p<+\infty)$空间的基本知识.

实变函数是分析数学课程中微积分理论的深入和发展，是学生学习现代数学必要的基础知识之一. 为了更好地起到这一承上启下的作用，为了使学生学到实变函数的基本知识和基本方法，进一步提高学平的数学水严和能力. 根据近十年来的教学实践和学生的学习情况，我们在编写过程中注意了以下几点：

一、实变函数是数学分析的一门后继课，它较前者更加抽象和理论化. 因此，在内容安排和叙述上，我们力求做到由浅入深，由特殊到一般，多提供典型的、能为学生理解和接受的例子，并尽可能与学生已学知识进行联系和对比.

二、习题是理解知识、掌握方法不可缺少的组成部分，也是培养学生独立钻研能力和创造性思维的重要方面，但是多数学生在解题时感到困难，无从下手. 为此，在习题配备上，我们进行了一定的筛选，较一般同类教科书增加了较多的基本练习题. 希望能帮助学生首先正确理解和掌握概念，然后是初步地运用概念和结论，有目的地引导学生逐步过渡到能综合运用所学知识和方法解题.

三、尽可能处理好理论与应用，本课程与其他课程，尤其是与数学分析的联系和比较，注意知识的连贯性，使学生能巩固已学过的知识，同时不断激发学习新知识的兴趣.

本书内容可以在68学时内讲完. 如果学时较少，第六章中有关Vitali定理及单调可微定理的证明和第七章的内容可以不讲.

我们要特别感谢孙永生教授，感谢他对我们一贯的关心、支持和帮助. 孙永生教授亲自参加教学实践，与我们进行了十分有益的讨论，在定稿时，多处参考了他讲稿的内容. 此外，我们要感谢先后使用过本书初稿的王昆扬、刘来福、陈克伟、陈平尚、刘永平、房艮孙等老师，感谢他们的热情支持，感谢他们提出的建议和意见，还要感谢赵慈庚教授，他曾审阅过我们的初稿，并提出了宝贵的修改意见.

由于我们水平所限，书中难免会有不妥和错误之处，我们诚恳地期望读者提出宝贵的批评意见.

编　者

1990年3月

目　录

第 1 章　集合与势

本章与下一章是全书的预备知识，内容涉及集合论，拓扑与泛函分析中的一些基本概念．本章主要介绍集合的运算，集合的基数等基本概念．

集合的分解与合成是实变函数论中的基本技巧与工具，需要熟练掌握与运用．

§1.1　集合及其运算

1. 基本概念

集合论是数学的一个独立分支，已被广泛应用于现代数学中．通常把具有某种特定性质的对象的全体称做**集合**，或简称为**集**，其中的每个对象称做为该集合的**元素**，或**元**．

集合通常用大写字母 A，B，X，Y，…表示，而用小写字母 a，b，x，y，…表示元素．一般用 $\mathbf{N}^+$ 表示由正整数的全体构成的集合，用 $\mathbf{Z}$ 表示由全体整数构成的集合，用 $\mathbf{Q}$ 表示由全体有理数构成的集合，用 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^1$ 表示由全体实数组成的集合．

设 A 为一个集合，如果 a 是 A 的一个元，则记为 $a\in A$，称为 a 属于 A；如果 a 不是 A 的元，记作 $a\overline{\in} A$．任何对象对某一集合而言，或者属于该集合，或者不属于该集合，二者必居其一，且只居其一．

如果集合 A 中的元素只有有限个，则称 A 为有限集，不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$．规定空集也是有限集．一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集．

集合的表示方法有两种，列举法与描述法．例如由 1，2，3，4 构成的集合 A 可以表示为

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},$$

也就是说在花括号内将其元素一一列举出来．A 也可以表示为

$$A=\{x:\ x<5,\ x\in\mathbf{N}^+\}.$$

这里花括号内分成两部分，并用"："隔开，前一部分是该集合中元素的代号，

后一部分是集合中元素应该满足的条件.

定义 1.1.1 (1)设 A, B 为两个集合，如果 $x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集，或称 A 含于 B 或 B 包含 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 如果存在 x，$x\in B$ 但 $x\overline{\in}A$，则称 A 是 B 的真子集. 规定空集是任一集合的子集.

(2)设 A，B 是两个集合，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为

$$A=B \text{ 或 } B=A.$$

由定义 1.1.1 可知，对任意集合 A，B，C，均有

(i) $A\subset A$；

(ii) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

根据某种需要，将集合进行某种恒等变形，例如将集合进行合并与分解，是实变函数论中常用的手法. 为此，下面介绍集合的运算.

2. 集合的运算

定义 1.1.2 设 A，B 是两个集合，由 A 与 B 中的全部元素构成的集合(即集合$\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\}$)，称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$. 由同时属于 A 与 B 的元素构成的集合(即集合$\{x: x\in A, \text{且 } x\in B\}$)称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$. 由属于 A 但不属于 B 的那些元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，有时也记为 $A\setminus B$. 当 $B\subset A$ 时，称差集 $A-B$ 为 B 关于 A 的余集，记作 $l_A B$. 当我们只讨论某个固定集合 X 的子集时，把 $X-B$ 记为 B^C，并称它为 B 的余集，称 X 为基本集. 集合$(A-B)\cup(B-A)$称为 A 与 B 的对称差，记作 $A\triangle B$. 上面集合的运算可以用图形示意如下：

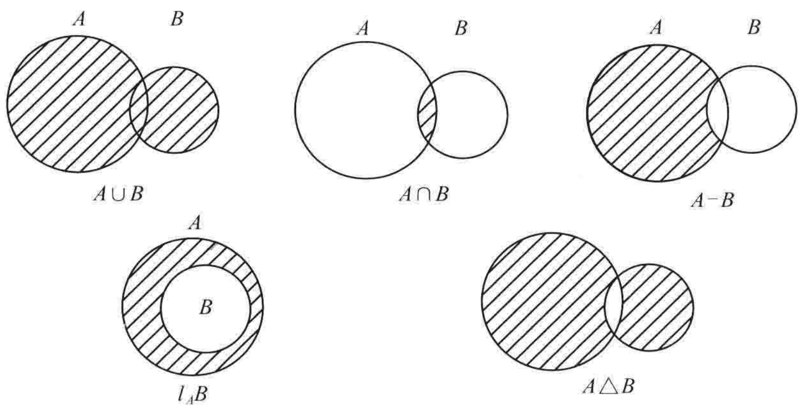


图 1.1

类似地，可以定义任意多个集合的并集与交集. 说$\{A_\alpha: \alpha\in I\}$为一个集合

族，其中 I(非空)称为指标集．我们定义这一族集合的并集与交集如下：

$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x$：存在 $\alpha\in I$，使得 $x\in A_\alpha\}$.

$\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x$：对一切 $\alpha\in I$，均有 $x\in A_\alpha\}$.

当 $I=\{1,2\}$时，$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha=A_1\cup A_2$；当 $I=\mathbf{N}^+$ 时，$\{A_\alpha,\alpha\in I\}$称为集合列，记作 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，或$\{A_n\}$，此时$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

例 1　设 $A_n=(n-1,n]$，$n\in\mathbf{N}^+$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(0,+\infty)$．这同时也告诉我们，集合$(0,+\infty)$可以分解为互不相交的集合列 $A_n(n\in\mathbf{N}^+)$之并.

例 2　设 $A_n=(-n,n)$，$n\in\mathbf{N}^+$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(-\infty,\infty)$．又若令 $A_0=\varnothing$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})=(-\infty,+\infty)$，因为$(A_i-A_{i-1})\cap(A_j-A_{j-1})=\varnothing(i\neq j)$．这说明$(-\infty,+\infty)$可以分解为 $A_n(n\in\mathbf{N}^+)$之并，也可以分解为互不相交的集合列 $A_n-A_{n-1}(n\in\mathbf{N}^+)$之并．当然，$(-\infty,+\infty)$还可以有其他的分解方法.

例 3　设 $A_n=\left(-1+\dfrac{1}{n},1+\dfrac{1}{n}\right)$，$n\in\mathbf{N}^+$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(-1,2),\qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1].$$

例 4　设 $A_n=\left\{x: |x-x_0|<\dfrac{1}{n}\right\}$，$n\in\mathbf{N}^+$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x_0\}.$$

集合的并与交有以下重要的运算规律.

定理 1.1.1　(1)$A\cup A=A$，$A\cap A=A$　　(幂等律).

(2)$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$　　(交换律).

(3)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$　　(结合律).

(4)$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cup(B\cup C)$　　(分配律).

定理 1.1.1 中的交换律与结合律适用于任意多个集合的情况，关于分配律，有

(i)$A\cap(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$.

(ii)$A\cup(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$.

证明 只证(i). $x\in A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$

$\Leftrightarrow x\in A$ 且 $\exists\alpha_0\in I$, 使得 $x\in B_{\alpha_0}\Leftrightarrow\exists\alpha_0\in I$, 使得 $x\in A\cap B_{\alpha_0}$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$. 所以

$$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)\subset\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),\text{ 且 }\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)\subset A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha).$$

于是根据定义 1.1.1 中集合相等的定义 $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$. (ii)的证明是类似的.

关于差集与余集的运算, 有以下性质:

(i) $A\cup A^C=X$; $A\cap A^C=\varnothing$, $(A^C)^C=X$, $X^C=\varnothing$, $\varnothing^C=X$.

(ii) $A-B=A\cap B^C$.

(iii) 如果 $A\supset B$, 则 $A^C\subset B^C$, 如果 $A\cap B=\varnothing$, 则 $A\subset B^C$.

特别, 我们有下面重要的

定理 1.1.2 (De Morgan 法则)

(i) $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C$.

(ii) $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^C$.

特别当 $I=\{1,2\}$ 时, $(A_1\cup A_2)^C=A_1^C\cap A_2^C$, $(A_1\cap A_2)^C=A_1^C\cup A_2^C$.

证明 只证(i). $x\in(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^C\Leftrightarrow x\in X$ 且 $x\overline{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$

$\Leftrightarrow x\in X$ 且 $x\in A_\alpha$, $\forall\alpha\in I\Leftrightarrow x\in A_\alpha^C$, $\forall\alpha\in I$

$\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C$. 于是,

$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^C\subset\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C\quad\text{且}\quad\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C\subset(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^C,$$

从而, $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^C=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C$, 即(i)成立. (ii)的证明是类似的.

上面性质中 $A-B=A\cap B^C$ 及 De Morgan 法则在集合的运算中十分重要, 需要熟练掌握.

在很多情况下, 需要将一列集合的并集分解为一列互不相交集合的并, 下面的例子告诉我们, 这是可以做得到的.

例 5 设 $\{A_n\}$ 为一个集合列, 则存在互不相交集合列 $\{B_n\}$, 使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

证明 令 $B_1=A_1$, $B_n=A_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i$, ($n=2,3,\cdots$) 则 $\{B_n\}$ 为所求之集合列. 事实上, 显然有: $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$; 另一方面, 任取 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 则存在 $m\in\mathbf{N}$, 使得 $x\in A_m$, 记

$$n_0=\min\{m: x\in A_m\}.$$