中国教育学会“十一五”科研规划课题“中小学衔接教学研究”推荐成果

初升高
衔接教材

CHUSHENGGAO XIANJIE JIAOCAI

CHU SHENG GAO XIANJIE JIAOCAI

初中毕业生暑期**必读物**

领先一小步 成功一大步

立足原知识 衔接新

搭建知识

迎接新起点 创造新机会

赢在起跑线上

数学
SHUXUE

主编◎朱道全

重庆出版集团 重庆出版社

中国教育学会“十一五”科研规划课题
“中小学衔接教学研究”推荐成果

初升高衔接教材

CHU SHENG GAO XIANJIE JIAOCAI

数学

主　　编　朱道全
副主编　邹　钢
编写人员　（按音序排列）
代小平　董　波　傅言春
李　兵　罗　蒙　施龙银
石明健　徐　静　张　震
周厚福　朱道全　邹　钢

重庆出版集团　重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

初升高衔接教材·数学 / 朱道全主编. —重庆：重庆出版社，2009.5（2011.3 重印）
ISBN 978-7-229-00653-2

Ⅰ. 初… Ⅱ. 朱… Ⅲ. 数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 064646 号

初升高衔接教材·数学
CHUSHENGGAO XIANJIE JIAOCAI·SHUXUE
朱道全 主编

出 版 人：罗小卫
责任编辑：贾良军
装帧设计：重庆出版集团艺术设计有限公司·蒋忠智

重庆出版集团
重庆出版社 出版
重庆市长江二路 205 号 邮政编码：400016 http://www.cqph.com
重庆升光电力印务有限公司印刷
重庆市天下图书有限责任公司发行 http://www.21txbook.com
重庆市渝北区财富大道 19 号财富中心财富三号 B 栋 8 楼
邮政编码：401121 电话：023-63658853
全国新华书店经销

开本：787mm×1 092mm 1/16 印张：7 字数：128 千字
版次：2009 年 5 月第 1 版 印次：2011 年 3 月第 3 次印刷
书号：ISBN 978-7-229-00653-2
定价：15.00 元

目录 Contents

专题一　代数式

代数式是研究数学的重要工具，代数式在生产实践和相关学科的学习中广泛应用. 代数式渗透在高中数学的各个部分，与函数、不等式、数列、三角、解析几何、立体几何等都有密切关系. 代数式还是思想的载体，凸显了等价转换、整体代换等思想方法，对代数式掌握的好坏，决定了同学们的数学计算能力水平的高低，也就在很大程度上影响着同学们对数学的学习. 为了高中数学学习的需要，我们针对性地对代数式的一些相关内容作必要的补充，以便能帮助同学们更好地学好高中数学.

第一节　乘法公式

初中知识回顾

一、整数指数幂的运算性质

1. $a^m \cdot a^n =$ a^{m+n} (m、n 都是正整数).
2. $(a^m)^n =$ a^{mn} (m、n 都是正整数).
3. $(ab)^n =$ $a^n b^n$ (n 是正整数).
4. $a^m \div a^n =$ a^{m-n} (m、n 都是正整数，$a \neq 0$).
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n =$ $\dfrac{a^n}{b^n}$ (n 是正整数，$b \neq 0$).
6. $a^0 =$ 1 ($a \neq 0$).
7. $a^{-p} =$ $\dfrac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$，p 是正整数).

二、单项式、多项式的乘法法则

1. $m(a+b+c) = am+bm+cm$
2. $(m+n)(a+b) = am+bm+an+bn$

三、乘法公式

1. 平方差公式：$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.
2. 完全平方公式：$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

典例剖析

例 1　计算 $(-x-y)(y-x)$.

[思路导引] 牢记乘法的平方差公式的特征：两个数的和与这两个数的差的积，本题经过变形，即可用乘法的平方差公式进行计算.

[分析解答] $(-x-y)(y-x)=[-(x+y)]\cdot[-(x-y)]$

$$=(x+y)(x-y)$$

$$=x^2-y^2.$$

[方法归纳] 有的题目需要进行适当的变形后才能用公式进行计算,这类题要先变形.

例2　计算 $(x+2y-3)(x-2y+3)$.

[思路导引] 本题可变形为 $[x+(2y-3)]\cdot[x-(2y-3)]$,即原题可看成 x 与 $(2y-3)$ 的和与差的乘法运算.

[分析解答] 原式 $=[x+(2y-3)]\cdot[x-(2y-3)]$

$$=x^2-(2y-3)^2$$

$$=x^2-(4y^2-12y+9)$$

$$=x^2-4y^2+12y-9.$$

[方法归纳] 对公式中的字母同学们要有正确的认识,即字母可以表示数和式,其次还要有整体的思想.

例3　已知 $a+b=5,ab=3$,求 a^2+b^2 的值.

[思路导引] 分析已知条件和所求代数式之间的关系,由乘法的完全平方公式:$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$,即可得到此题的解题方法.

[分析解答] $\because a+b=5,ab=3$,

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times3=25-6=19.$

[方法归纳] 用乘法公式进行运算的时候,一定要先分析运算式子是否满足公式所要求的条件,如果满足就能用对应的公式进行计算.另外,不要随意臆造公式来进行运算.

入门衔接知识

前面已经学习了两个乘法公式:

1. 平方差公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

2. 完全平方公式:$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

到了高中,将用到更多的乘法公式,现在我们来计算 $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 等于多少.由多项式与多项式的乘法法则,有:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$=a^3+b^3.$$

即 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.此公式称为乘法的立方和公式.类似地,还可以得出其他的一些常用公式:

(1) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$;

(2) 立方差公式:$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

(3) 两数和的立方公式:$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(4) 两数差的立方公式:$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

(5) 三数和的平方公式:$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$.

同学们有兴趣的话可以自己推导一下上面给出的公式,公式中的字母可以是我们所

学过的式或数.

例题引路

例1　计算：

(1) $(x+2)(x-5)$；　　(2) $(2a+b-c)^2$；

(3) $(7+x)(x^2+49-7x)$；　　(4) $(x-1)^3$；

(5) $(1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

[**思路导引**]本题是利用前面所给出的公式进行计算的题目，在应用公式进行计算时，一定要分清运算式子适合哪一个计算公式，其中的第(1)、(2)、(4)题可直接用公式计算，而第(3)、(5)题则需要进行适当的变形后才能用公式进行计算.

[**分析解答**](1) $(x+2)(x-5)=x^2+[2+(-5)]x+2\times(-5)=x^2-3x-10$；

(2) $(2a+b-c)^2=(2a)^2+b^2+c^2+2\times 2a\times b-2\times 2a\times c-2\times b\times c$
$=4a^2+b^2+c^2+4ab-4ac-2bc$；

(3) $(7+x)(x^2+49-7x)=(7+x)(49-7x+x^2)=7^3+x^3=343+x^3$；

(4) $(x-1)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^2=x^3-3x^2+3x-1$；

(5) $(1-a)(1+a)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(1-a)(a^2+a+1)]\cdot[(1+a)(a^2-a+1)]$

$=[(1-a)(1+a+a^2)]\cdot[(1+a)(1-a+a^2)]$

$=(1^3-a^3)(1^3+a^3)$

$=(1^3)^2-(a^3)^2=1-a^6$.

[**方法归纳**]应用公式进行计算能够使得运算更加简便，只是在使用时一定要注意公式的准确性.

例2　已知 $x+y+z=a$，$xy+yz+zx=b$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的值.

[**思路导引**]由已知条件和所求代数式之间的关系，运用前面的三数和的平方公式来进行计算.

[**分析解答**]$\because (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$，

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2xy-2yz-2xz$.

又 $x+y+z=a$，$xy+yz+zx=b$，

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2xy-2yz-2xz$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)$

$=a^2-2b$.

[**方法归纳**]三数和的平方、三数的平方和及这三数两两乘积的和的关系在高中学习中会经常用到，同学们应熟练掌握.

例3　求证 $(m-1)(m-2)(m-4)(m+1)=(m^2-3m)^2-2(m^2-3m)-8$.

[**思路导引**]本题主要运用公式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 来进行计算，观察左边的运算式子：$(m-1)(m-2)=(m^2-3m)+2$，$(m+1)(m-4)=(m^2-3m)-4$.

[分析解答]左边 $=(m-1)(m-2)(m-4)(m+1)=(m-1)(m-2)(m+1)(m-4)$

$=[(m-1)(m-2)]\cdot[(m+1)(m-4)]$

$=[(m^2-3m)+2]\cdot[(m^2-3m)-4]$

$=(m^2-3m)^2+(2-4)(m^2-3m)+2\times(-4)$

$=(m^2-3m)^2-2(m^2-3m)-8=$ 右边.

所以 $(m-1)(m-2)(m-4)(m+1)=(m^2-3m)^2-2(m^2-3m)-8$.

[方法归纳]这是一个恒等式的证明,这种题我们可以从左边运算证明等于右边,也可以从右边运算证明等于左边,也可以从左右两边往中间算.

感悟提升

1. 关于多项式的乘法,应仔细观察,根据所学知识进行认真分析,灵活使用乘法公式,以便简化运算.

2. 通过乘法公式的学习,我们进一步体会到"数"的表现形式是多种多样的——可以是数字、字母,可以是单项式,也可以是多项式,甚至可以是学过的任意代数式.

衔接训练

一、选择题

1. 下列多项式乘法中不能用平方差公式计算的是(　　)

A. $(a^3+b^3)(a^3-b^3)$　　B. $(a^2+b^2)(b^2-a^2)$

C. $(2x^2y+1)(2x^2y-1)$　　D. $(x^2-2y)(2x+y^2)$

2. 下列多项式乘法中可以用平方差公式计算的是(　　)

A. $(-a+b)(a-b)$　　B. $(x+2)(2+x)$

C. $\left(\frac{1}{3}x+y+z\right)\left(y-\frac{1}{3}x+z\right)$　　D. $(x-2)(x+1)$

3. 下列计算不正确的是(　　)

A. $(xy)^2=x^2y^2$　　B. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}$

C. $(a-b)(b+a)=a^2-b^2$　　D. $(-x-y)^2=x^2+2xy+y^2$

二、填空题

4. (1) $(1+x)(1-x)(1+x^2)(1+x^4)$________.

(2) $(x-3)($________$)=x^3-27$.

(3) $(2x+3)($________$)=8x^3+27$.

(4) $(x-3)($________$)=x^2-x-6$.

(5) $(2x-1)^3=8x^3-($________$)+($________$)-1$.

三、解答题

5. 化简:(1) $(3x-2y+z)(3x-2y-z)$;(2) $(2a+b-c+3d)(2a-b+c+3d)$.

6. 计算：$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)+\frac{1}{2^{15}}$.

7. 先化简，再求值：$(x-y)^2(x^2+xy+y^2)^2-(x^3+y^3)(-x^3+y^3)$，其中 $x=1,y=-1$.

第二节　因式分解

初中知识回顾

一、定义

把一个多项式化成几个整式的________的形式，叫做把这个多项式因式分解.

二、方法

1. 提取公因式法：$ma+mb+mc=$________.

2. 公式法：$a^2-b^2=$________；

$a^2\pm 2ab+b^2=$________.

典例剖析

例 1　将下列各式因式分解：

(1) $2a^3+6a^2-10a$；

(2) $x^3y-x^2y^2+xy^3$；

(3) $6x(x-y)+3y(y-x)$.

[思路导引](1)式中各项有公因式 $2a$；(2)式中各项有公因式 xy；(3)式中 $y-x=-(x-y)$，所以也有公因式 $3(x-y)$.

[分析解答](1)原式 $=2a(a^2+3a-5)$；

(2)原式 $=xy(x^2-xy+y^2)$；

(3)原式 $=6x(x-y)-3y(x-y)=3(x-y)(2x-y)$.

[方法归纳]在分解因式时，若有公因式，则应先提取公因式.

例 2　将下列各式因式分解：

(1) x^4-1；

(2) $25(a+b)^2-10(a+b)+1$.

[思路导引](1)式中的 x^4 可以化为 $(x^2)^2$，然后再用平方差公式进行因式分解；(2)式中 $25(a+b)^2=[5(a+b)]^2$，然后用完全平方公式进行因式分解.

[分析解答](1)原式 $=(x^2)^2-1=(x^2+1)(x^2-1)=(x^2+1)(x+1)(x-1)$;

(2)原式 $=[5(a+b)]^2-2\times5(a+b)+1=[5(a+b)-1]^2=(5a+5b-1)^2$.

[方法归纳]公式法分解因式的过程是乘法公式的逆用.

例3　将下列各式因式分解:

(1)$4x^4+24x^3y+36x^2y^2$;

(2)$x^2(x-y)+4(xy-x^2)-4(y-x)$;

(3)$25(a+b)^2-16(b-a)^2$.

[思路导引](1)式中各项有公因式 $4x^2$,应先提取公因式,再用公式法进行分解;(2)式中 $xy-x^2=-x(x-y)$,而 $y-x=-(x-y)$,所以有公因式 $(x-y)$;(3)式中前一项变形为 $[5(a+b)]^2$,后一项变形为 $[4(b-a)]^2$,然后用平方差公式进行因式分解.

[分析解答](1)原式 $=4x^2(x^2+6xy+9y^2)$

$=4x^2(x+3y)^2$;

(2)原式 $=x^2(x-y)-4x(x-y)+4(x-y)$

$=(x-y)(x^2-4x+4)$

$=(x-y)(x-2)^2$;

(3)原式 $=[5(a+b)]^2-[4(b-a)]^2$

$=[5(a+b)+4(b-a)][5(a+b)-4(b-a)]$

$=(a+9b)(9a+b)$.

[方法归纳]①多项式因式分解的基本思路:一提(提公因式)二套(套用公式法)三检查(检查分解的结果是否正确);②提取公因式时,公因式可以是数、字母、单项式、多项式,特别要注意符号的变化;③运用公式时要有整体的思想;④因式分解必须分解到不能再分解为止.

入门衔接知识

因式分解是高中数学学习的一个重要工具,在高中函数、不等式、数列和解析几何等学习中都是必不可少的内容.初中学习的因式分解不能满足高中学习的需要,所以需要补充学习更多的因式分解的知识.

一、公式法

用于因式分解的公式,除了初中所学的两个外,在高中将会用到下面三个公式:

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$;

$a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$;

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

二、分组分解法

下面我们来分解多项式 $ac+ad+bc+bd$.

该多项式共有四项,不能直接提公因式,但第一、二项有公因式 a,第三、四项有公因式 b,因而把第一、二项分在一组,第三、四项分在一组,分别提取公因式 a、b,这时另一个因式

正好都是$(c+d)$，这样就可以继续进行因式分解了：

$$ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd)=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d).$$

像这样，把多项式分组后，在各组分解因式的基础上再完成整个多项式的因式分解，就叫做分组分解法分解因式.

三、十字相乘法

前面我们学习了多项式$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$的乘法，如果将上式反过来：$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$，即得到了因式分解的另一种方法——"十字相乘法". 显然，用这种方法来分解因式的关键在于确定上式中的a和b，例如，为了分解因式x^2+px+q，就需要找到满足下列条件的a、b：$\begin{cases}a+b=p,\\ ab=q.\end{cases}$那么我们如何来找需要的$a$、$b$呢？

我们看右边的这个图：$\begin{array}{ccc}x & & a\\ & \times & \\ x & & b\end{array}$. 此图的第一列的两个数的乘积恰为$x^2+(a+b)x+ab$中的$x^2$，第二列的两个数的乘积恰为$x^2+(a+b)x+ab$中的$ab$，而对角线上的两个数的乘积之和恰为$x^2+(a+b)x+ab$中的$(a+b)x$，显然，这个图中第一行的两个数的和与第二行的两个数的和的乘积为$(x+a)(x+b)$，即为$x^2+(a+b)x+ab$的因式分解形式. 由此，我们得到了"十字相乘法"的具体步骤：首先将二次项分成两个因数的乘积，并把这两个因数写成一列，然后把常数项也分成两个因数的乘积，并把这两个因数排在第二列，如果对角线上的两个数的乘积之和恰为二次三项式的一次项，则这两列数的第一行的两个数的和与第二行的两个数的和的乘积即为该二次三项式的因式分解形式.

四、求根法

若关于x的方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个实数根是x_1、x_2，则二次三项式$ax^2+bx+c(a\neq0)$就可分解为$a(x-x_1)(x-x_2)$，这种因式分解的方法叫做求根法.

例题引路

一、公式法

例1　分解下列因式：

(1)$3a^3b+81b^4$；

(2)$a^2+b^2+2ab+4a+4b+4$；

(3)$x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$；

(4)a^7-ab^6.

[思路导引](1)先提公因式$3b$，再用立方和公式分解；(2)式是a、b、2这三个数的和的平方；(3)式是x与$3y$的立方差；(4)先提公因式a，再用公式将括号内的多项式分解.

[分析解答](1) 原式$=3b(a^3+27b^3)=3b(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$；

(2) 原式$=(a+b+2)^2$；

(3) 原式$=x^3-3\cdot x^2\cdot 3y+3\cdot x\cdot(3y)^2-(3y)^3=(x-3y)^3$；

(4) 原式$=a(a^6-b^6)=a(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=a(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

[方法归纳]在分解因式时,若各项有公因式,应先提取公因式,再用其他方法分解因式.

二、分组分解法

例2　把 $a^2-b^2-ax+bx$ 因式分解.

[思路导引]将原式中第一、二项分为一组,第三、四项分为一组.

[分析解答]原式 $=(a^2-b^2)-(ax-bx)$

$=(a+b)(a-b)-x(a-b)$

$=(a-b)(a+b-x)$.

[方法归纳]用分组分解法时,一定要想一想分组后能否继续完成因式分解,因此要选择合理的分组,同时注意符号的变化.

例3　将下列各式因式分解:

(1) $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$;

(2) $x^6-y^6-2x^3+1$.

[思路导引](1)按照题目的分组,无公因式可以提取,因而需要去括号后重新分组,然后再分解;(2)式中一、三、四项为一组,二项为一组.

[分析解答](1)原式 $=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$=(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)$

$=ac(bc-ad)+bd(bc-ad)$

$=(ac+bd)(bc-ad)$;

(2)原式 $=(x^6-2x^3+1)-y^6=(x^3-1)^2-y^6=(x^3+y^3-1)(x^3-y^3-1)$.

[方法归纳]分组分解法主要是针对四项及以上的多项式的分解方法,在具体使用时一定要注意合理分组,保证分组后能用提取公因式法或公式法继续分解.

例4　将下列各式因式分解:

(1) q^3-2q^2+1;

(2) a^4+a^2+1.

[思路导引](1)将式中的 $-2q^2$ 分拆成两个 $-q^2$;(2)在式中添加一个 a^2,同时再减去一个 a^2,然后用分组分解法分解因式.

[分析解答](1)原式 $=q^3-q^2-q^2+1$

$=(q^3-q^2)-(q^2-1)$

$=q^2(q-1)-(q+1)(q-1)$

$=(q-1)(q^2-q-1)$;

(2)原式 $=(a^4+2a^2+1)-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

[方法归纳]在分解因式时,可根据具体情况进行恰当的添项、拆项,从而可以运用分组分解法进行因式分解.

三、十字相乘法

例5　将下列各式因式分解:

(1) $x^2-7x+12$;

(2) $x^2+4x-12$.

[**思路导引**]按照上面介绍的方法,我们将二次项和常数项分成两个因数的乘积并把它们排成两列,如果交叉相乘之积的和恰为一次项,则第一行的和与第二行的和的积即为该二次三项式的因式分解形式. 对(1)式,看右图:$\begin{array}{ccc} x & & -3 \\ & \times & \\ x & & -4 \end{array}$,此图恰好满足条件,所以 $x^2-7x+12$ 的分解形式应该为:$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. 同样,对(2)式来说,如图:$\begin{array}{ccc} x & & 6 \\ & \times & \\ x & & -2 \end{array}$,恰好满足条件,所以 $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$.

[**分析解答**](1)$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$;$\begin{array}{ccc} x & & -3 \\ & \times & \\ x & & -4 \end{array}$

(2)$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$. $\begin{array}{ccc} x & & 6 \\ & \times & \\ x & & -2 \end{array}$

[**方法归纳**]用这种方法来分解因式的时候,有时我们不能一次成功,比如(1)题中的常数项“12”有很多种分法,并且同一种分法还涉及到谁排上和谁排下的问题,但始终牢记两个条件:①第一列的两数之积为二次项,第二列的两数之积为常数项;②对角线上两数的积的和应当为一次项! 若要熟练掌握这种方法,需要多练习并多总结.

例6　将下列各式因式分解:

(1)$3x^2+11x+10$;

(2)$4x^2-4x-15$.

[**思路导引**]这个题和例5的区别在于:二次项的系数不是1,但依然可以用十字相乘法来进行因式分解,只是难度增加了而已.

[**分析解答**](1)$3x^2+11x+10=(x+2)(3x+5)$;$\begin{array}{ccc} x & & 2 \\ & \times & \\ 3x & & 5 \end{array}$

(2)$4x^2-4x-15=(2x+3)(2x-5)$. $\begin{array}{ccc} 2x & & 3 \\ & \times & \\ 2x & & -5 \end{array}$

[**方法归纳**]我们通常将二次项分成两个前面带正号“+”的因式的形式,若二次项系数为负数,则首先添加括号将它变为正数,然后再分解.

例7　将下列各式因式分解:

(1)$x^2+xy-6y^2$;

(2)$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$;

(3)$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

[**思路导引**]对于(1)式,把它看成是关于 x 的二次三项式,则 $-6y^2$ 为常数项,若把它看成是关于 y 的二次三项式,则 x^2 为常数项;(2)式中把(x^2+x)看成一个整体,则该式可看成是关于(x^2+x)的二次三项式;将(3)式中的(x^2+x+2)变成$[(x^2+x+1)+1]$,再与前一因式相乘,即可变为$(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12$,该式可以看成是(x^2+x+1)的二次三项式.

[**分析解答**](1)$x^2+xy-6y^2=(x+3y)(x-2y)$;$\begin{array}{ccc} x & & 3y \\ & \times & \\ x & & -2y \end{array}$

(2) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)$ $\begin{array}{ccc} x^2+x & & -2 \\ & \times & \\ x^2+x & & -6 \end{array}$

$=(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$;

(3) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

$=(x^2+x+1)[(x^2+x+1)+1]-12$

$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12$ $\begin{array}{ccc} x^2+x+1 & & 4 \\ & \times & \\ x^2+x+1 & & -3 \end{array}$

$=(x^2+x+1+4)(x^2+x+1-3)$

$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$.

[方法归纳]从上面几个例子我们可以看出十字相乘法主要针对的是二次三项式的多项式的因式分解，遇到某些不是二次三项式但能变形为二次三项式的多项式也可以用这种方法进行因式分解.

四、求根法

例 8　在实数范围内把下列关于 x 的二次三项式因式分解：

(1) x^2+2x-1；

(2) $x^2+4xy-4y^2$.

[思路导引]用求根法的关键是先求出 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根；对于(2)式，我们可以把该式看成关于 x 的二次三项式，此时 y 就看作已知数.

[分析解答](1) 令 $x^2+2x-1=0$，解得 $x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$，

$\therefore x^2+2x-1=[x-(-1+\sqrt{2})][x-(-1-\sqrt{2})]$

$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$.

(2) 令 $x^2+4xy-4y^2=0$，则解这个关于 x 的方程得：

$x_1=(-2+2\sqrt{2})y$，$x_2=(-2-2\sqrt{2})y$，

$\therefore x^2+4xy-4y^2=[x+2(1-\sqrt{2})y][x+2(1+\sqrt{2})y]$.

[方法归纳]用求根法分解因式的具体步骤是：①令 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$；②求出此方程的两根 x_1、x_2；③将原式改写成 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 的形式.

感悟提升

从前面的知识我们可以看出，因式分解的常用方法有：提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法、求根法等. 这些方法都需要我们熟练掌握，因式分解一般按如下步骤进行：

(1) 如果多项式有公因式，则应该先用提取公因式法；

(2) 若没有公因式，则考虑用公式法；

(3) 如果是二次三项式，可以试用十字相乘法或求根法；

(4) 如果是四项及更多项，一般考虑用分组分解法，有时还需要添项或拆项后再分组；

(5)分解因式必须进行到每一个因式都不能再分解为止.

衔接训练

一、选择题

1. 下列因式分解中,结果正确的是(　　)

A. $x^3-8=(x-2)(x^2-2x+4)$　　B. $(x+2)^2-1=(x+1)(x+3)$

C. $2m^2n-8n^3=2n(m^2-4n^2)$　　D. $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}\right)$

2. 把多项式 $a^2-2ab+b^2-1$ 分解因式的结果是(　　)

A. $(a-b+1)(a-b-1)$　　B. $(a-b+1)(a+b-1)$

C. $(a+b+1)(a+b-1)$　　D. $(a+b+1)(a-b-1)$

3. 如果 $x-3$ 是多项式 $2x^2-5x+m$ 的一个因式,则 m 等于(　　)

A. 6　　B. −6　　C. 3　　D. −3

二、填空题

4. 分解因式:$16-8xy-16x^2-y^2=$________.

5. 多项式 ax^2-4a 与 x^2-4x+4 的公因式是________.

三、解答题

6. 将下列各式因式分解:

(1)$64+q^3$;　　(2)$8x^3y^3-\frac{1}{125}$;

(3)$4a^2+b^2+c^2-4ab+4ac-2bc$;　　(4)$a^2(x+y)^3-a^2b^3$;

(5)$x^2+37x+36$;　　(6)x^4-7x^2-18;

(7)$6x^2-7x-3$;　　(8)q^3+2q^2+2q+1;

(9)$7(a+b)^2-5(a+b)-2$;　　(10)$5x^2-15x+2xy-6y$;

(11)$4xy+1-4x^2-y^2$;　　(12)$8x^2-26xy+15y^2$.

7. 在实数范围内因式分解:

(1)x^2+4x-1;　　(2)$2x^2-3x-1$.

第三节　分式与根式

初中知识回顾

一、分式

1. 定义:用 A 和 B 表示两个整式,$A\div B$ 可以写成$\frac{A}{B}$的形式,如果 B ________,式子$\frac{A}{B}$就叫做分式. 其中,A 叫做分式的分子,B 叫做分式的分母,且 B 不能为 0.

2. 分式的基本性质

分式的分子和分母都乘以(或除以)________的整式,分式的值不变. 用式子表示为$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$($M$ 是不等于 0 的整式).

3. 分式的约分

________________________,叫做分式的约分.

约分根据的是分式的基本性质,对一个分式进行约分就是对分式进行恒等变形,约分前后的分式值是不变的,约分的前提是确立分式的分子与分母的公因式.

一个分式的最后形式必须是最简分式(也就是分子和分母之间没有公因式).

4. 分式的通分

根据分式的基本性质,把几个异分母的分式____________的分式,叫做分式的通分. 通分是将异分母分式转化为同分母分式的一种手段,通分的难点和关键是确定各个分母的最简公分母.

二、分式的运算

1. 分式的乘法:____,即$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$.

2. 分式的除法:____,即$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$.

注意:①除式的分子和分母颠倒位置后相乘时,如果分子和分母是多项式的应该用括号括起来,然后再相乘;②同分式的乘法一样,结果也应该进行约分,化成最简分式的形式.

3. 分式的加减:

同分母的分式相加(减),____________,即$\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}=\frac{b\pm c}{a}$.

异分母的分式相加(减),__________,变为同分母的分式,然后____________________,即$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\pm\frac{ad}{ac}=\frac{bc\pm ad}{ac}$.

三、二次根式的定义及性质

1. 定义：形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的代数式叫做二次根式.

2. 二次根式的性质

(1)双重非负性，即$\sqrt{a}$中的$a\geqslant 0$，$\sqrt{a}$___0；

(2)$(\sqrt{a})^2=$____________$(a\geqslant 0)$；

(3)$\sqrt{a^2}=$____________.

3. 最简二次根式应满足的条件

(1)被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；

(2)被开方数不含____________.

4. 二次根式的运算

(1)二次根式相加减，先化为____________，然后合并____________二次根式；

(2)二次根式相乘除，把被开方数相乘除，根指数____________.

典例剖析

例1　化简下列各式：

(1)$\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$；

(2)$\dfrac{2}{a^2-4}\left(\dfrac{a^2+4}{4a}-1\right)\div\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}\right)$；

(3)$b\left(\dfrac{a^2b+ab^2}{a^2b-b^3}-\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}\right)$.

[思路导引]对(1)式，先通分，最简公分母为$(x+1)(x-1)$；(2)式先计算括号内的式子，再算乘除；(3)先将能够因式分解的分母(或分子)因式分解，然后约分，再做其他运算.

[分析解答](1)原式$=\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

$$=\frac{2x-x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1};$$

(2)原式$=\dfrac{2}{(a+2)(a-2)}\cdot\dfrac{a^2-4a+4}{4a}\div\dfrac{a-2}{2a}$

$$=\frac{2}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{(a-2)^2}{4a}\cdot\frac{2a}{a-2}$$

$$=\frac{1}{a+2};$$

(3)原式$=b\left[\dfrac{ab(a+b)}{b(a-b)(a+b)}-\dfrac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right]$

$$=b\left[\frac{ab}{b(a-b)}-\frac{1}{a-b}\right]$$

$$=b\cdot\frac{ab-b}{b(a-b)}=\frac{ab-b}{a-b}.$$