



# 钢结构的平面内稳定

童根树◇著

中国建筑工业出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

# 钢结构的平面内稳定

童根树 著

中国建筑工业出版社

**图书在版编目 (CIP) 数据**

钢结构的平面内稳定/童根树著. —北京: 中国建筑工业出版社, 2015. 2

ISBN 978-7-112-17652-6

I. ①钢… II. ①童… III. ①钢结构-结构稳定性-研究 IV. ①TU391

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 003075 号

**钢结构的平面内稳定**

童根树 著

\*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

霸州市顺浩图文科技发展有限公司制版

环球印刷 (北京) 有限公司印刷

\*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 43 字数: 1072 千字

2015 年 4 月第一版 2015 年 4 月第一次印刷

定价: 99.00 元

ISBN 978-7-112-17652-6

(26878)

**版权所有 翻印必究**

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本书系统阐述了判断结构稳定性的基本原理、方法和过程,通过压杆弹性稳定性的研究,介绍了轴力作用后构件刚度的变化,介绍了钢结构构件截面的弹塑性性能,截面和框架发生塑性流动的现象,压杆弹塑性失稳的数值积分方法,柱子曲线的构建,弹塑性失稳时的剩余物理刚度。各种变分原理和基于变分原理的近似解析法和有限单元法。详细讲述了框架稳定,剪切失稳,剪切失稳和弯曲失稳的相互作用,变截面构件的弹性和弹塑性稳定,压弯杆的稳定性,框架柱按照整层失稳进行平面内稳定计算的方法。各种双重抗侧力结构体系的弹性和弹塑性稳定性和二阶效应,伸臂结构,悬挂结构和联肢结构的稳定性。非线性分析基础,框架结构几何和材料非线性分析的拖动坐标法,非线性分析单元刚度矩阵的刚体检验,增量一迭代计算的广义刚度参数法。深拱和浅拱的弹性和弹塑性稳定性,水平弹性支承拱的弹性和弹塑性稳定。

轴压力或重力荷载是一种负刚度的概念贯穿本书的始终,被用于帮助理解并获得复杂问题的简单结果。理论都围绕实际工程问题展开,最终的结果也有很强的实用性。本书可作为结构工程专业的硕士和博士研究生教材,前13章可以作为本科生选修课教材。本书很多章节涉及《钢结构设计规范》部分内容的理论背景,还包含了大量《钢结构设计规范》没有纳入、在实际工程中却经常遇到的内容,可供建筑结构与机械、航空、造船、桥梁、货架仓储、电力建设、设施农业钢结构等各个领域的工程技术人员和广大师生参考。

责任编辑:赵梦梅 牛松 田立平

责任设计:李志立

责任校对:陈晶晶 赵颖

# 前 言

钢材强度高，延性好，是优良的建筑结构材料。原材料经长途运输、通过复杂的炼制工艺获得的钢材，其应用应该精打细算。在满足安全性要求的前提下，减小单位建筑面积的用钢量应该是每一个结构设计人员追求的目标。为了节省用钢量，实际工程中的钢构件相对混凝土构件要细长和壁薄。细长和薄壁的结构容易发生失稳现象，对稳定理论的掌握是做好钢结构设计的关键。

材料力学有压杆稳定内容，结构力学则包含了框架稳定的章节。但是这两门专业基础课中的结构稳定知识远远不能满足解决实际工程问题的需要。结构稳定理论作为一门专业基础课，其学科内容和知识量非常丰富，而且还在不断完善中。

由于历史的原因，与钢结构有关的课程，特别是稳定理论，在我国各高校中的课时都比较少。知识掌握得不全面，作为解决实际工程问题的工具，应用起来就不那么得心应手。结果是很多人认为结构稳定理论比较难。通过系统的学习，读者会发现结构稳定理论是很容易理解和掌握的。而且只有掌握稳定理论知识，才能正确掌握和判断实际工程钢结构的性能。

近二十年来钢结构在我国得到广泛应用，作为钢结构应用基础的钢结构稳定理论也得到快速的发展。有些成果已经反映在《钢结构设计规范》GB 50017—2015 中，有些则只能在国内外的期刊学报上零星地呈现，有必要进行较为系统的总结。作者自 1996 年起在浙江大学讲授《结构稳定理论基础》课程，根据实际应用需要和新的研究成果，讲课内容不断更新和补充。本书是这门课程部分教学内容的总结，它包含了近三十年来作者紧密结合大量工程实际和《钢结构设计规范》GB 50017—2003/2015 编制所进行的理论上新的思考和研究成果。读者会发现，即使对于非常经典的稳定理论和方法，作者也以更为透彻的方式进行了讲解和诠释。书中还包含了很多工程实际中遇到、设计规范未列入或未及时列入的内容，可以直接在设计工作中应用。

本书共分 21 章，第 1 章介绍判断结构稳定性的静力准则和能量准则，介绍了不同结构体系的屈曲后性能和有缺陷体系的稳定性，最后还介绍了验证近代稳定理论的实验结果。

第 2 章介绍杆件的弹性稳定，特别强调静力准则的应用。重点考察了轴力作用下构件各种刚度的变化，提出轴力抗侧负刚度和轴力弯曲负刚度的计算公式，论述了杆件弯曲的弓弦效应对轴压刚度的影响。

第 3 章论述钢截面的极限承载力，提出双向弯矩和轴力作用下求极限屈服面的一个方法，解释了截面上的塑性流动现象，对框架中的塑性内力流动进行分析，提供了常见截面的极限屈服曲面。

第 4 章研究压杆的弹塑性失稳，内容包含：Shanley 模型改进的论述，考虑残余应力影响的切线模量法和算例，Jezek 解析解求柱子稳定系数曲线，详细的数值积分法步骤，

稳定系数通用公式的构建,防屈曲压杆,对弹塑性失稳本质的讨论。

第5章介绍了能量法:有限变形下的应变计算,研究结构稳定性的变分原理,包括初应力问题变分原理、屈曲问题变分原理和压杆弯曲失稳的正统变分原理。能量法近似计算屈曲荷载和屈曲波形的过程。特别介绍了变截面构件的有限单元法。计算了变截面变轴力悬臂压杆临界荷载和两端简支变轴力压杆的临界荷载。

第6章介绍了框架弹性稳定,研究了同层各柱和层与层的相互作用,带摇摆柱的框架的弹性和弹塑性稳定,单跨两层框架发生对称失稳现象。对一个实际工程的四层8跨框架的屈曲分析,对高阶屈曲模态的应用价值进行了探讨;轴压框架弹塑性层稳定系数。

第7章通过研究框架结构层与层相互作用的特点,提出了一个初等代数方法求解上下柱的相互支援和多层框架中层与层相互作用,可用于有侧移失稳和无侧移失稳的计算。作者认为,通过本章的学习,对框架的稳定性才有真正的深入掌握。

第8章研究有剪切变形影响的柱子和框架的稳定,特别提出柱子剪切失稳的概念,强调剪切失稳和弯曲失稳的相互作用。考虑剪切变形影响的框架柱转角位移方程、抗侧刚度和框架发生有侧移失稳和无侧移失稳的框架柱计算长度。变截面柱子考虑剪切失稳作用的临界荷载,缀板柱和夹层梁的屈曲。研究了格构式压杆单肢失稳和整体失稳的相互作用。

第9章研究压弯杆的弹塑性失稳。通过经典的Jezek法阐述压弯杆弹塑性失稳中弯矩发挥的作用,Jezek法确定的轴力—弯矩相关作用曲线,相关公式的构建。介绍了框架的二阶分析设计法。提出了按照层整体失稳计算框架平面内稳定性的一个新方法。框架设计的假想荷载法,各种框架设计方法的比较。

高层双重抗侧力结构的稳定性一直是一个空白,本书以五章的篇幅系统介绍作者在高层结构稳定方面的研究成果。第10章系统地介绍了框架—剪切型支撑结构,框架—弯剪型支撑结构和框架—弯剪型支撑结构的稳定性计算公式,双重弯剪型结构稳定性的解析解,理解各个子结构之间相互作用的串并联模型。使框架发生无侧移失稳的支撑门槛刚度,弱支撑框架的稳定性计算方法。第11章介绍双重和多重抗侧力结构一阶和二阶分析的串并联电路模型;第12章介绍弯剪型和双重结构的二阶效应;第13章是双重结构的弹塑性稳定,重点介绍双重结构中的框架柱稳定计算。其中Jezek模型被推广到高层弯剪型支撑结构的弹塑性稳定性分析。第14章是伸臂结构、悬挂结构和联肢结构的稳定性。

第15章介绍楔形变截面工字钢杆件的应力分析、变截面压杆和压弯杆的弹性和弹塑性稳定,提出了新的设计公式。变截面梁对变截面柱子提供的转动约束给出了详细的计算公式;最后是变截面屋面梁的屈曲。

第16章对工业厂房中的各种稳定问题给出了计算公式。有吊车阶形柱框架、设摇摆柱的斜坡刚架的稳定分析;厂房纵向抽撑时的稳定分析;考虑剪切变形影响的阶形柱的计算长度系数,增加了一个重型厂房框架算例,一个发电厂除尘器钢支架屈曲的案例分析,阶形柱上下柱弹塑性阶段的相互作用,斜腿框架的屈曲。

第17章介绍了增强结构稳定性的支撑的设计要求。

非线性分析是钢结构设计方法的一个发展方向。第18章以便于工程技术人员和初学者容易理解的方式介绍了非线性分析的基本知识。第19章则详细地介绍框架几何和材料非线性分析的一个新方法。引入横向正应力的非线性势能,对刚度矩阵进行刚体检验,采用广义刚度参数法控制增量—迭代过程,考虑计算过程中的虚假卸载,提出了弹塑性阶段

不平衡力的计算方法，列出了详细的计算步骤，给出了计算例题。

第 20 章介绍一个新的拱的稳定理论，研究了各种假定带来的影响，为进一步研究拱的稳定提供了一个完整的基础。研究了拱脚支座水平方向弹性支承拱和扁拱的稳定。

第 21 章详细介绍了拱的弹塑性稳定及其设计方法的推导，对水平弹性支承拱的弹塑性稳定提出了支座水平刚度要求。

部分章提供了练习题，使之适合于做高等学校研究生的参考书。

经过近三十年的研究和发展，结构稳定理论学科的知识内容得到极大的充实和发展，本书讲授钢结构构件和框架的平面内稳定，通过研究简单构件和结构，对结构失稳的本质进行深入剖析，对稳定性研究的方法进行详细介绍。轴压力或重力荷载是一种负刚度的概念贯穿本书的始终，被用于帮助理解并获得复杂问题的简单结果。理论围绕实际工程问题展开，最终结果也有很强的实用性，可以供建筑结构、机械、航空、造船、桥梁、货架仓储、电力建设、设施农业钢结构等各个领域的工程技术人员参考。本书也是为浙江大学结构工程专业研究生的《结构稳定理论基础》课程而撰写总结的。根据教学的要求，本书适宜的学时安排为 35（本科生）~45（研究生）个学时，本科生只学习前面十章的内容。

在本书出版之际，在此向陈婷、王金鹏、季渊、张磊、程鹏、冯进、杨洋、罗澎、李东、邢国然、曹志毅、翁贇、胡进秀、苏建、郭峻、黄山、高宇、胡达明、赵钦等表示感谢。他们在攻读硕士和博士学位期间获得的成果，对于完善钢结构稳定理论，拓展稳定理论的应用、促进人们对特定结构体系稳定性的认识、改善钢结构构件和结构的设计和分析方法具有重要的价值。在本书的撰写过程中，饶芝英女士给予了大力支持，在此表示感谢。

本书也许存在不足和谬误，希望读者发现后不吝指正。

童根树

2014 年 10 月 8 日于浙江大学

# 目 录

<b>第 1 章 绪论：判断结构稳定性的两个准则</b> .....	1
1.1 平衡的稳定性及其判定准则 .....	1
1.2 屈曲后性质 .....	9
1.3 有缺陷结构体系的稳定性分析.....	13
1.4 失稳的类型及其实验验证.....	18
1.5 本书的学习要求.....	25
习题 .....	26
参考文献 .....	27
<b>第 2 章 杆件的弹性稳定</b> .....	29
2.1 理想轴压杆的屈曲.....	29
2.2 有初弯曲的压杆.....	32
2.3 有弯矩或横向荷载作用的压杆.....	33
2.4 Elastica 问题 .....	34
2.5 带轴压力杆件的转角—位移方程.....	36
2.6 带拉力杆件的转角位移方程.....	40
2.7 杆件的轴压（拉）刚度.....	41
2.8 有侧移失稳，轴力等效负刚度的概念.....	44
2.9 压杆的无侧移屈曲：轴力的等效弯折负刚度.....	49
2.10 弹性地基上压杆的屈曲 .....	55
2.11 人行桥矮桁架上弦压杆的稳定性 .....	56
习题 .....	57
参考文献 .....	59
<b>第 3 章 截面的弹塑性性质和极限屈服曲面</b> .....	60
3.1 钢材的弹塑性性质.....	60
3.2 钢构件内的残余应力.....	61
3.3 截面在压力和弯矩作用下的极限承载力.....	63
3.4 在轴力和弯矩作用下的弹塑性性能：塑性流动.....	68
3.5 双向弯矩和轴力联合作用下截面的极限承载力.....	75
习题 .....	80
参考文献 .....	81
<b>第 4 章 压杆的弹塑性稳定</b> .....	83
4.1 理想直压杆的弹塑性弯曲失稳：切线模量理论和双模量理论.....	83
4.2 Shanley 模型—经过改进的阐述 .....	84
4.3 理想直杆的弹塑性屈曲—残余应力的影响.....	90



4.4	真实压杆的弹塑性稳定	93
4.5	真实压杆的计算长度系数	96
4.6	JEZEK 法求压杆的稳定承载力	96
4.7	设计公式的构建	100
4.8	强度问题和稳定问题的区别和联系	104
4.9	弹性屈曲与弹塑性屈曲的区别和联系	106
4.10	防屈曲压杆的稳定性	108
	习题	109
	参考文献	110
<b>第 5 章</b>	<b>能量原理和基于能量原理的数值计算方法</b>	<b>111</b>
5.1	稳定问题的变分原理	111
5.2	压杆弯曲失稳的正统能量原理	120
5.3	压杆弯曲失稳的 Ritz 法	122
5.4	压杆弯曲失稳的 Galerkin 法：一种加权残数法	127
5.5	有限单元法—Ritz 法的应用	129
	习题	135
	参考文献	136
<b>第 6 章</b>	<b>框架的弹性稳定 (1)</b>	<b>137</b>
6.1	引言，分析模型	137
6.2	简单框架的稳定性：位移法与线性抗侧刚度	138
6.3	多跨多层框架的稳定性：无侧移屈曲的简化模型（七杆模型）	141
6.4	多跨多层框架的稳定性：有侧移屈曲的简化模型（七杆模型）	144
6.5	同层各柱轴力不等时框架的有侧移失稳：各柱的相互支援作用	147
6.6	设有摇摆柱的框架的稳定性	150
6.7	单跨两层框架的屈曲：层与层的相互支援	152
6.8	多层框架有侧移失稳的计算长度系数：柱子抗侧柔度指标	154
6.9	梁柱半刚性连接的影响	159
6.10	单跨两层框架的稳定性：纯框架无侧移失稳控制的情况	161
6.11	一个四层八跨钢框架的弹性稳定分析	163
6.12	框架中有摇摆柱时框架柱的弹塑性稳定系数	169
6.13	轴压框架弹塑性失稳的层稳定系数	175
6.14	梁对柱子稳定性的竖向约束作用	182
	习题	183
	参考文献	185
<b>第 7 章</b>	<b>框架的弹性稳定 (2)</b>	<b>186</b>
7.1	考虑层与层相互作用的框架柱计算长度：二层框架	186
7.2	考虑层与层相互作用的框架柱计算长度：三层框架	189
7.3	不对称框架的屈曲：合并解法	191
7.4	多层框架有侧移失稳的柱子计算长度	193

7.5	多跨框架的稳定性 .....	196
7.6	框架无侧移失稳的计算长度系数：两层框架 .....	198
7.7	框架无侧移失稳的计算长度系数：三层框架 .....	201
7.8	框架整体弯曲变形的影响 .....	203
7.9	计算长度系数法的总结 .....	204
	习题 .....	205
	参考文献 .....	205
<b>第 8 章</b>	<b>格构式压杆和 Timoshenko 梁的稳定性 .....</b>	<b>206</b>
8.1	引言：格构式杆件的计算模型 .....	206
8.2	Timoshenko 梁（格构式压杆）的稳定性 .....	209
8.3	纯剪切失稳 .....	212
8.4	考虑剪切变形影响的梁柱构件的转角位移方程 .....	213
8.5	两端转动约束的轴压杆，考虑剪切变形时的稳定性 .....	217
8.6	两端转动约束轴压杆的抗侧刚度与有侧移失稳临界荷载的关系 .....	222
8.7	考虑剪切变形影响、侧向弹性支撑、两端转动约束轴压杆的稳定性 .....	224
8.8	分布轴心压力作用下等截面悬臂柱的稳定性 .....	226
8.9	考虑截面剪切变形时等截面柱的单元刚度矩阵 .....	227
8.10	考虑截面剪切变形时变截面柱的刚度矩阵 .....	230
8.11	考虑截面剪切变形影响时变截面悬臂柱的屈曲荷载 .....	233
8.12	考虑剪切变形影响时柱的屈曲模态 .....	236
8.13	格构式压杆单肢失稳和整体失稳的相互作用 .....	240
8.14	缀板柱的稳定性 .....	246
8.15	夹层梁的稳定性 .....	249
	习题 .....	253
	参考文献 .....	254
<b>第 9 章</b>	<b>压弯构件的平面内稳定 .....</b>	<b>256</b>
9.1	引言 .....	256
9.2	横向荷载作用下压弯杆的二阶弹性分析 .....	257
9.3	矩形截面压弯杆的承载力：Jezek 解法 .....	261
9.4	工字形截面压弯杆的极限承载力：设计公式的构建 .....	264
9.5	等效弯矩系数 .....	268
9.6	竖向荷载作用下无侧移失稳的框架柱 .....	271
9.7	有侧移失稳的框架柱的等效弯矩系数 .....	272
9.8	受拉侧先屈服的压弯杆 .....	274
9.9	框架柱按照整层失稳的模式计算稳定性 .....	275
9.10	按照二阶分析方法进行内力分析的框架柱的设计 .....	276
9.11	与我国规范配套、基于单根杆件承载力等效的假想荷载 .....	279
9.12	框架稳定设计方法对比研究 .....	287
	习题 .....	292

参考文献	293
<b>第 10 章 双重和多重抗侧力结构的屈曲</b>	295
10.1 引言	295
10.2 剪切型支撑框架的稳定性	295
10.3 弯曲型支撑—框架体系的屈曲：连续模型分析	299
10.4 框架—弯剪型结构支撑的屈曲	301
10.5 双重弯剪型抗侧力结构的屈曲	302
10.6 双重和多重弯剪型抗侧力结构屈曲分析的串并联电路模型	307
10.7 弯曲型支撑—框架的稳定性：离散模型	308
10.8 变轴力变刚度弯剪型支撑—框架结构的稳定性	317
10.9 变轴力变刚度弯剪型支撑—弯剪型框架结构的稳定性	322
习题	323
参考文献	324
<b>第 11 章 双重和多重抗侧力结构的一阶和二阶分析的串并联模型</b>	325
11.1 引言	325
11.2 简单模型弯剪型抗侧力体系的相互作用	325
11.3 双重抗侧力结构二阶分析的串并联电路模型	331
11.4 三重抗侧力结构的串并联模型	336
11.5 变刚度变轴力多重抗侧力结构的侧移模型	338
11.6 变刚度变轴力三重抗侧力结构的串联—并联模型	342
11.7 结语	343
参考文献	344
<b>第 12 章 双重抗侧力体系二阶效应放大系数</b>	345
12.1 引言	345
12.2 悬臂构件模型分析二阶效应	346
12.3 弯曲型支撑—框架体系的连续模型分析	356
12.4 弯剪型支撑—框架的结构的二阶效应	363
<b>第 13 章 双重抗侧力结构的弹塑性稳定</b>	367
13.1 引言	367
13.2 剪切型支撑—框架的弹塑性稳定计算模型	367
13.3 剪切型支撑框架的假想荷载法	377
13.4 基于 Jezek 模型的弯曲型支撑—框架弹塑性稳定的简化计算	385
13.5 弯曲型支撑—框架的假想荷载法	390
参考文献	392
<b>第 14 章 伸臂、悬挂和联肢结构的稳定性</b>	393
14.1 伸臂结构引言	393
14.2 单伸臂结构的屈曲分析	394
14.3 双伸臂结构的稳定性	407
14.4 悬挂结构应用介绍	413

14.5	悬挂结构屈曲分析	416
14.6	联肢剪力墙屈曲分析的连续化方法	424
14.7	联肢剪力墙的稳定性和抗侧刚度	429
14.8	不同水平荷载作用下联肢剪力墙结构的位移和弯矩放大系数	431
	参考文献	433
<b>第 15 章</b>	<b>楔形变截面压杆的稳定性</b>	<b>435</b>
15.1	变截面构件的应力	435
15.2	楔形变截面柱子的稳定性	438
15.3	变截面梁对柱子提供的约束	440
15.4	楔形变截面压杆的弹塑性稳定	445
15.5	楔形变截面压弯构件的平面内弹塑性稳定	450
15.6	变截面屋面梁的弹性稳定	453
	参考文献	454
<b>第 16 章</b>	<b>工业厂房框架的稳定性</b>	<b>456</b>
16.1	柱脚固接单阶柱的计算长度系数	456
16.2	柱脚铰接有吊车厂房门式刚架柱的计算长度	459
16.3	柱脚平面外铰支时阶形柱的平面外计算长度系数	461
16.4	柱脚平面外固支时阶形柱的平面外计算长度系数	463
16.5	厂房纵向抽撑时柱子的平面外计算长度	465
16.6	单层厂房框架双阶柱的平面内计算长度系数	467
16.7	单层厂房框架双阶柱的平面外计算长度系数	469
16.8	交叉支撑杆系的计算长度系数	472
16.9	再分式腹杆的计算长度	474
16.10	带摇摆柱的斜坡屋面门式刚架的稳定性	475
16.11	有吊车厂房框架的弹性屈曲	477
16.12	考虑剪切变形影响的阶形柱的稳定性分析	479
16.13	剪切变形对超重型厂房框架柱计算长度影响分析	481
16.14	柱中设铰的钢支架的屈曲	484
16.15	单阶柱上下段弹塑性阶段的相互作用	491
16.16	斜腿框架的层抗侧刚度和稳定性	493
	参考文献	500
<b>第 17 章</b>	<b>增强结构稳定性的支撑</b>	<b>502</b>
17.1	厂房纵向柱列减小压杆计算长度的支撑	502
17.2	保证厂房几何不变性的支撑	522
17.3	平台梁设计的刚度和强度要求	525
17.4	双层纵向柱列支撑的设计要求	530
	参考文献	539
<b>第 18 章</b>	<b>非线性分析基础</b>	<b>540</b>
18.1	引言	540

18.2	应变定义	540
18.3	应力定义	546
18.4	应力应变关系	554
18.5	虚位移原理: Euler 表示法	555
18.6	增量变分原理: TL 法	557
18.7	增量变分原理: UL 法	559
	参考文献	560
	附录 变形前后微面的微分几何关系	561
<b>第 19 章</b>	<b>平面框架的非线性分析——拖动坐标法</b>	<b>562</b>
19.1	引言	562
19.2	平面梁柱非线性分析的变分原理	563
19.3	单元刚度矩阵—有限单元法	568
19.4	弹塑性非线性分析的若干问题	575
19.5	几何和材料非线性的广义位移控制法 (广义刚度参数法, GSP 方法)	588
	参考文献	591
	附录 刚度系数矩阵	593
<b>第 20 章</b>	<b>圆弧拱平面内弯曲失稳</b>	<b>595</b>
20.1	引言	595
20.2	基本理论	595
20.3	径向压力下圆环的屈曲	601
20.4	两端铰支拱平面内稳定方程	603
20.5	拱脚水平弹性支承拱的屈曲分析	609
20.6	浅拱的失稳	621
20.7	结语	628
	参考文献	629
	附录 单轴对称工字型截面拱的剪应力和横向正应力及其影响	630
<b>第 21 章</b>	<b>轴压和压弯圆弧拱的弹塑性承载力</b>	<b>638</b>
21.1	三铰拱的弹塑性稳定	638
21.2	轴压两铰圆弧拱	641
21.3	无铰圆弧轴压拱的弹塑性稳定	644
21.4	拱轴线受压稳定设计的几个方面	648
21.5	拱在半跨荷载作用下的临界荷载	655
21.6	三铰拱在沿水平线均布荷载作用下的二阶效应系数	656
21.7	两铰圆弧拱在沿水平线均布荷载作用下的二阶效应系数	660
21.8	无铰圆弧拱的线性分析及其放大系数	663
21.9	圆弧拱在压力和弯矩共同作用下的平面内稳定计算公式	666
21.10	拱脚水平弹性支承圆弧拱的平面内极限承载力研究	667
	参考文献	674

# 第 1 章 绪论：判断结构稳定性的两个准则

房屋和桥梁等建筑结构及其组成构件在荷载作用下，外力和内力必须保持平衡。作为结构稳定理论学习必备知识的材料力学和结构力学，主要讲述构件处于平衡状态时的应力、内力和相应的变形。但这种平衡状态是否能长久保持，即这种平衡状态是否稳定，却很少提到，即使有这些内容，其叙述的深度也是不够的，教师的讲授也对其一带而过。

平衡状态是否能长期保持，是平衡状态的性质。平衡状态具有稳定的和不稳定的两种不同的性质。当平衡状态具有不稳定的性质时，轻微的扰动就会使结构或其组成构件产生很大的变形而最后丧失承载力，这种现象就称为失去稳定性或简称失稳。建筑结构因失稳而造成事故在工程历史上并不是个别的，人们通过这些事故，对结构稳定这门学科也更加重视，结构稳定理论作为一门学科也得到了长足的发展。近几十年来由于结构形式的不断发展和高强度材料的应用，特别是建筑钢结构的快速发展，使结构趋于轻型和薄壁，结构和构件的刚度趋于下降，更容易出现失稳现象，因而对结构稳定性的研究及对结构稳定知识的加深和掌握也更有必要。本书主要为高等学校土建类专业在学习材料力学和结构力学后进一步加深结构稳定的基本知识而编写，可供高年级和研究生使用。

## 1.1 平衡的稳定性及其判定准则

为了判断结构在已知荷载作用下的平衡状态是否稳定，这里介绍判断平衡稳定性的最常用的两个准则静力准则和能量准则。

### 1.1.1 静力准则

满足静力平衡条件的某结构体系，当受到微小的扰动使其偏离原来的平衡位置：若因此在该结构体系上产生一指向原来平衡位置的力(回弹力或称为恢复力)，因而当此扰动去除后，能使该体系回复到原来位置时，则原来的平衡状态是稳定的，或称稳定平衡；如产生背向原来平衡位置的力(负恢复力)，因而使偏离越来越大，则原来的平衡状态是不稳定的，或称不稳定平衡；若受扰动后不产生任何作用于该体系的力，因而当扰动去除后，既不能恢复原来的平衡位置又不继续增大偏离时，则为中性平衡。这就是稳定的静力准则。

玩具不倒翁，在受到干扰后永远会恢复到原来的平衡位置，它的平衡位置是稳定的。

人踩高跷只能在动态下进行，它在静力状态下是不能保持稳定的例子。

用手压缩一根有一定长度的弹簧，一不小心，弹簧就从侧面弹出。这是不能保持稳定平衡的又一个例子。

图 1.1 是理论力学中研究刚体平衡状态稳定性的一个例子，它是解释平衡状态性质的

最好的例子，也是理解上述静力准则的最好例子。

一个几何不变的结构体系，如果作用的荷载足够小，有理由认为它处在稳定的平衡状态。但是随着荷载的增加，可能会在某一时刻，它的平衡状态会从稳定的变成不稳定的。计算它从稳定平衡转化为不稳定平衡的荷载值，是结构稳定性研究的目的和任务。这个荷载称为临界荷载。

图 1.2 是两端简支弹性压杆，处于轴心受压平衡状态。为了判断这个直线的平衡状态是否稳定，给予它一个干扰，使之产生挠度  $y$ ，然后移去干扰，考察压杆会发生什么。存在三种可能性：一是随着干扰的移除，压杆恢复到直线平衡状态；二是保持不动；三是即使移除了干扰，压杆的变形还在不断增大。三种现象分别表示稳定平衡，随遇平衡和压杆失去稳定性。

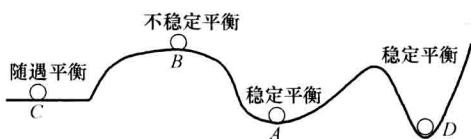


图 1.1 光滑小球在光滑表面的平衡

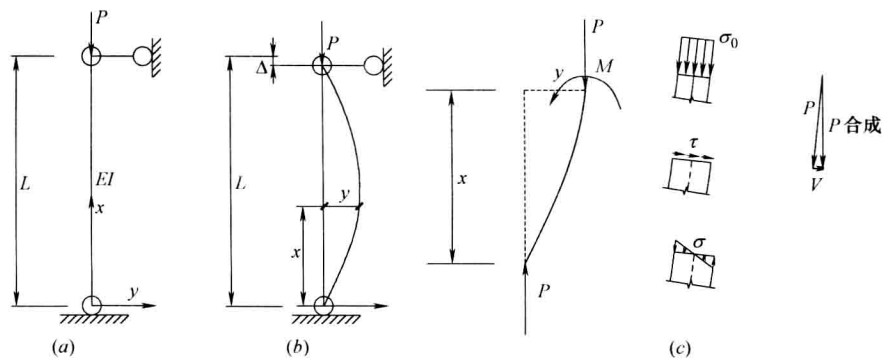


图 1.2 两端简支压杆的屈曲

那么如何确定临界荷载？方法是：假设压杆处于随遇平衡状态，然后分析这种平衡成立的条件。取出如图 1.2(c) 所示的隔离体，隔离体下端是反力  $P$ ，被剖开的离坐标原点为  $x$  的截面上有弯矩  $M$ ，还有竖向力  $P$ 。

关于  $x$  截面上的竖向力  $P$ ，应该做进一步解释：压杆弯曲，截面上必然产生垂直于变形后截面的弯曲应力  $\sigma$  和平行于截面的剪应力  $\tau$ 。但是直线平衡状态就已经存在的应力  $\sigma_0 = \frac{P}{A}$ ，在压杆弯曲的过程中也发生了随动，其方向始终与压杆纵向纤维的方向保持一致（这种应力称为 Kirchhoff 应力）。 $P = \sigma_0 A$  与截面上的剪力  $V$  合成为竖向力  $P$ 。

对图 1.2 (c)，建立平衡条件如下：

$$M - Py = 0$$

因为  $M = -EIy''$ ，所以得到

$$EIy'' + Py = 0$$

记  $k = \sqrt{P/EI}$ ，上式的解是

$$y = B \sin kx + C \cos kx$$

利用简支边界条件，得到  $C = 0$  和

$$B \sin kL = 0$$

要使压杆的弯曲状态成为平衡状态, 必须  $B \neq 0$ , 所以只能要求  $\sin kL = 0$ , 即  $kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , 取最小解得到欧拉荷载:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

即  $P = P_E$  时才有可能使得弯曲状态成为平衡状态。

### 1.1.2 能量准则

结构体系的平衡稳定性还可以用体系的总势能  $\Pi$  来判别。总势能是结构体系内的应变能  $U$  和外荷载势能  $V$  两者的和。如果结构体系受到微小扰动而变形, 体系的总势能  $\Pi$  是增加的(原来的总势能具有极小值), 则原来的平衡状态是稳定的; 如果总势能  $\Pi$  是减少的(原来的总势能具有极大值), 则原来的平衡状态是不稳定的; 假如总势能保持不变, 则为中性平衡。这是判定结构稳定性的能量准则。

对照图 1.1, 回想刚体体系的总势能的计算方法, 上述能量准则是显而易见的。

在结构力学中, 我们知道弹性体系的应变能是体系在外力作用下储藏在体系内的已知能量, 它标志着外力去除后恢复到原来状态的能力。变形后应变能增加, 因而始终为正值; 而外荷载的势能  $V$  (在荷载为保守力系的假定下, 它等于荷载所做的功的负值) 在变形后往往是减小的, 因而始终为负值。由此我们看出上述两个稳定准则在物理意义上的联系。当为稳定平衡时, 由能量准则可知, 微小的扰动必须使总势能  $\Pi$  增加, 这就要求微小扰动后应变能的增加大于外荷载势能的减小, 因而扰动去除后, 体系有一恢复力, 这与静力准则中要求稳定平衡时在微小扰动去除后体系有一个正恢复力是完全一致的。这个恢复力即回弹力, 轴力较小时, 在干扰去除后, 将使得图 1.2(b) 所示的压力  $P$  的向下位移被顶回去, 压杆重新变为直的。

在数学上, 总势能是

$$\Pi = U - V$$

稳定的平衡状态, 总势能具有极小值, 这是最小势能原理。因此总势能表达式必有  $\delta^2 \Pi > 0$ ;

不稳定的平衡状态, 总势能具有极大值, 因此  $\delta^2 \Pi < 0$ ;

随遇的平衡状态, 总势能表达式满足  $\delta^2 \Pi = 0$ 。

平衡状态, 不管是稳定的、随遇的还是不稳定的, 都满足  $\delta \Pi = 0$ , 这是势能驻值原理。

对于图 1.2 所示的压杆, 施加干扰使压杆发生弯曲, 压杆内储存的应变能增量是

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI y''^2 dx$$

我们研究的是干扰去除后的状态, 因此干扰本身所做的功并不需要加以考虑。但是挠度产生的过程中, 压杆上的集中力  $P$  产生了向下的位移  $\Delta$ , 所以做了功。 $\Delta$  的推导依据如下约定: 压杆挠度产生的过程中, 压力保持不变。压力保持不变, 则压杆中和轴不伸长, 这样长度是  $dx$  的微段, 在压杆发生挠度后的斜长度仍然是  $dx$ , 其竖向投影长度是  $dx \cos y'$ , 这样变形前后就产生了竖向长度差  $dx - dx \cos y' \approx \frac{1}{2} y'^2 dx$ , 这样



$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L y'^2 dx$$

荷载功的增量是  $V = P\Delta$ ，总势能增量是

$$\Pi_b = \frac{1}{2} \int_0^L (EIy''^2 - Py'^2) dx$$

注意上面说“总势能保持不变，则为中性平衡”，这个总势能保持不变表示屈曲后的总势能与屈曲前的总势能相同，而屈曲前的总势能是压杆轴心受压状态的总势能，记为  $\Pi_0$ ，设  $u_0$  是轴压产生的轴向位移，则  $\Pi_0$  是

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_0^L EAu_0'^2 dx - Pu_{0,x=L}$$

以零应力状态作为势能零点，则总势能是

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_b$$

因为在失稳的过程中，轴压力是假设不变的，因此失稳的过程中， $\Pi_0$  保持不变。因此也可以以屈曲前瞬间的状态作为势能的零点，这样

$$\Pi = \Pi_b$$

令  $\delta\Pi = 0$ ，则

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^L (EIy''\delta y'' - Py'\delta y') dx = EIy''\delta y' \Big|_0^L - \int_0^L (EIy''' + Py')\delta y' dx \\ &= EIy''\delta y' \Big|_0^L - (EIy''' + Py')\delta y' \Big|_0^L + \int_0^L (EIy^{(4)} + Py'')\delta y dx = 0 \end{aligned}$$

因为  $\delta y$  意指任意形状任意小的挠度函数，要使上式成立，必须有

$$EIy^{(4)} + Py'' = 0$$

积分两次，并利用简支端弯矩为 0、挠度为 0 的条件，得到

$$EIy'' + Py = 0$$

接下去求解与静力法一样。

注意到，按照能量准则的描述，也可以直接采用  $\Pi_b = 0$  来计算临界荷载。即

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L EIy''^2 dx}{\int_0^L y'^2 dx}$$

假设  $y = B \sin \frac{\pi x}{L}$ ，代入上式，也可以得到欧拉临界荷载。这种方法称为 Timoshenko 能量法。

### 1.1.3 光滑表面上钢球的平衡稳定性

作为静力准则和能量准则的应用和阐释，现以一个小钢球在光滑面上的三种不同位置来说明平衡的稳定性。图 1.3 是一个小钢球支承在凹面(图 1.3a)、凸面(图 1.3b)和平面上(图 1.3c)。图中小钢球的初始位置用球心 A 表示，三种情况下钢球的重力  $P$  与支承反力  $R$  都使钢球处在静力平衡状态。今给以微小扰动使钢球偏离原来位置，球心由 A 点移到 B 点。当钢球支承在凹面上时，微小扰动后初始指向原来平衡位置的分力  $P \sin \theta$ ；当在凸面上时，则产生背向原来平衡位置的分力  $P \sin \theta$ ；当在平面上时，不产生任何分力。由