

初中数学 常规题与新题型 精析(1998年用)

刘增佑 范永利
郑 康 杨淑云
编

中国青年出版社



初中数学 常规题与新题型精析

刘增佑 范永利 郑康 杨淑云 编

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

责任编辑:赵惠宗

封面设计:许欣

图书在版编目(CIP)数据

初中数学常规题与新题型精析/刘增佑等编. —北京:
中国青年出版社, 1997. 11

ISBN 7-5006-2736-X

I. 初… II. 刘… III. 数学课—初中—习题 IV
.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97) 第 23444 号

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

万兴印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 7.25 印张 150 千字

1998 年 1 月北京第 1 版 1998 年 1 月北京第 1 次印刷

定价 7.00 元

目 录

第一部分 选择题

一、怎样解选择题	(1)
(一)直接法	(2)
(二)间接法	(6)
(三)验证法	(8)
(四)特殊值法	(9)
(五)图示法	(10)
二、自我检测题	(12)
(一)实数	(12)
(二)代数式	(19)
(三)方程与方程组	(27)
(四)不等式与不等式组	(34)
(五)函数	(38)
(六)统计初步	(46)
(七)直线形	(49)
(八)相似形	(56)
(九)解直角三角形	(62)
(十)圆	(65)

第二部分 综合题

一、怎样解综合题	(74)
----------	------

(一)熟练掌握“双基”是解综合题的基础	(74)
(二)分析综合法是探求综合题解题思路的基本 方法	(85)
(三)数学思想是解综合题的灵魂	(90)
二、代数综合题	(123)
(一)关于方程类的综合题	(123)
(二)关于函数类的综合题	(134)
三、几何综合题	(163)
(一)和直线形有关的综合题	(164)
(二)和圆有关的综合题	(180)

第三部分 中考新题型解析

一、应用型问题	(204)
二、阅读理解型问题	(210)
三、开放型问题	(216)
附:自我检测题参考答案	(225)

第一部分 选择题

一、怎样解选择题

选择题由题干和选择支两部分构成。一般情况下，题干是题目的条件，选择支是备选的结论，也就是备选答案。数学选择题一般都规定“在本题的四个备选答案中，只有一个是正确的”，这类选择题叫做四选一的单项选择题。

解答选择题和解答其它数学题目一样，要注意认真审题，看懂题意，探求解题思路，给出题解，检验题解是否正确。由于选择题有自己的特点，根据它的特点，在解题方法上有它特殊的地方。

首先选择题给出几个备选答案，其中既有正确答案，又有错误答案，这就使题目既具有暗示性，又具有迷惑性，只需从四个答案中选择出正确的那个就可以了。

其次，作为单项选择题，所设的备选答案“只有一个是正确的”。因此可以这样考虑，如果能确定某个备选答案是正确的，那么其它的备选答案一定都是错的。从另外一个角度考虑，如果能确定某些备选答案是错的，直到只剩下一个备选答案（即使对它的正确性一无所知），那么这个答案一定是正确的。

由这些特点出发，解选择题经常用以下几种方法：

(一) 直接法

直接法就是从题目所给的条件出发,通过分析、推理、计算,得到结论,从而确定哪个备选答案是正确的.直接法是解选择题的基本的方法,也是最常用的方法.

例1 当 $m < 0$ 时, $\frac{\sqrt{m^2}}{m}$ 的值为 ().

(A) -1

(B) 1

(C) $-m$

(D) m

分析: 由于 $m < 0$, 所以 $\sqrt{m^2} = -m$, 那么 $\frac{\sqrt{m^2}}{m} = \frac{-m}{m} = -1$. 故应选 (A).

例2 如果 1 是关于 x 的方程 $x^2 + 2kx - 3k^2 = 0$ 的根, 那么 k 的值是 ().

(A) 0

(B) -1 或 $\frac{1}{3}$

(C) 1 或 $-\frac{1}{3}$

(D) 1 或 -1

分析: 由于 1 是方程 $x^2 + 2kx - 3k^2 = 0$ 的根, 所以 1 满足这个方程, 把 1 代入, 得 $1 + 2k - 3k^2 = 0$. 解这个关于 k 的方程, 得 $k = 1$ 或 $k = -\frac{1}{3}$. 故应选 (C).

例3 如图 1-1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$, 那么图中互为余角的角有 ().

(A) 2 对

(B) 3 对

(C) 4 对

(D) 5 对

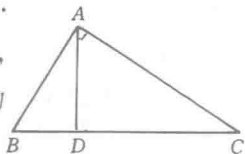


图 1-1

分析：直角三角形中两锐角互为余角， $AD \perp BC$ ，这样可得到三个直角三角形： $Rt\triangle ABC$ ， $Rt\triangle ABD$ ， $Rt\triangle ADC$ ，这样就有三对互为余角的角。显然 $\angle BAD$ 与 $\angle DAC$ 也是互为余角的角，所以共有四对互为余角的角。故应选 (C)。

例 4 内角和与外角和相等的多边形是 ()。

- (A) 三角形 (B) 四边形
(C) 五边形 (D) 六边形

分析：任何一个多边形的外角和都是 360° 。因此，这个多边形的内角和为 360° ，利用多边形内角和公式可得 $(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ$ ，解这个方程，得 $n=4$ 。故应选 (B)。

例 5 如图 1-2， PA 与 $\odot O$ 切于点 A ， PBC 是 $\odot O$ 的割线，如果 $PB=BC=2$ ，那么 PA 的长为 ()。

- (A) 2 (B) $2\sqrt{2}$
(C) 4 (D) 8

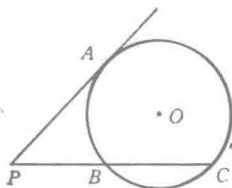


图 1-2

分析：由于 PA 是切线， PBC 是割线，已知 PB ， BC 的长，求 PA 可用切割线定理，即 $PA^2 = PB \cdot PC = PB(PB + BC) = 2 \times (2 + 2) = 8$ ， $PA = 2\sqrt{2}$ 。

故应选 (B)。

例 6 如果方程 $2x^2 - 3x - m = 0$ 有两个正根，那么 m 的取值范围是 ()。

- (A) $0 < m \leq \frac{9}{8}$ (B) $m > 0$
(C) $m < 0$ (D) $-\frac{9}{8} \leq m < 0$

分析：如果方程 $2x^2 - 3x - m = 0$ 有两个正根，首先说明它有两个实数根，即判别式应大于等于 0；其次，两根的和与积都应是正的，同时满足这三个条件。由于方程的二次项系数是 2，一次项系数是 -3，由根与系数的关系，可知两根的和为 $\frac{3}{2} > 0$ ，因此，只需

$$\begin{cases} \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-m) \geq 0, \\ -\frac{m}{2} > 0. \end{cases}$$

解得 $-\frac{9}{8} \leq m < 0$ 。故应选 (D)。

小结：由上面的例子可以看出，利用直接法解选择题和解一般的求解题有许多相近的地方，好象解完题后在备选答案中对答案。

这里有一点要提醒注意，利用直接法解选择题，解得的结果不在备选答案中，当然可以判断解题过程一定是错的。如果解得的结果在备选答案中，是正确还是错误，还应进行认真核对。因此，解选择题的解题过程也要特别注意正确性。

例 7 已知 $|x| = 3$ ， $|y| = 7$ ，且 $x \cdot y > 0$ ，则 $x + y$ 的值等于()。

(A) 4 (B) 10

(C) ± 4 (D) ± 10

分析：由 $|x| = 3$ ， $|y| = 7$ 可知 $x = \pm 3$ ， $y = \pm 7$ 。又由于 $x \cdot y > 0$ ， x 、 y 应同号，即 $x = 3$ ， $y = 7$ ，或 $x = -3$ ， $y = -7$ ，显然， $x + y$ 的值为 ± 10 。故应选 (D)。

注意：由 $|x| = 3$ ， $|y| = 7$ ，易出现 $x = 3$ ， $y = 7$ 的错误，

而误选 (B).

例 8 如图 1-3, 如果 ABC 、 AED 是圆的任意两条割线, CE 与 BD 交于 P 点, 那么图中相似三角形一共有 ().

- (A) 2 对 (B) 3 对
(C) 4 对 (D) 5 对

分析: 相似三角形是两个形状相同、大小可以不同的三角形. 确定两个三角形是否相似, 可以由图形的形状帮我们初步选定. 本题给出了圆、割线、弦, 可以借助于和圆有关的角, 可帮助确定两个三角形是否相似.

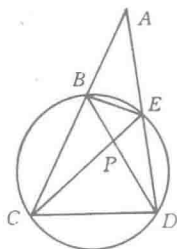


图 1-3

在图 1-3 中, 最显著的是 $\triangle PBE$ 与 $\triangle PCD$ 以及相当位置关系的 $\triangle PBC$ 与 $\triangle PED$ 可能相似.

在 $\triangle PBE$ 和 $\triangle PCD$ 中,

$$\because \angle BPE = \angle CPD, \angle EBP = \angle DCP,$$

$$\therefore \triangle PBE \sim \triangle PCD.$$

在 $\triangle PBC$ 和 $\triangle PED$ 中,

$$\because \angle BPC = \angle EPD, \angle BCP = \angle EDP,$$

$$\therefore \triangle PBC \sim \triangle PED.$$

由过去的解题经验和观察图形, 可能 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 也是相似的.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\because \angle A = \angle A, \angle ABE = \angle ADC,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADC.$$

以角 A 为公共角的 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 是否也可能相似

呢?

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 中,

$$\because \angle A = \angle A, \angle ADB = \angle ACE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle AEC.$$

经过进一步观察、分析,没有再发现其他两个三角形相似,故应选(C).

(二) 间接法

由于单项选择题的备选答案“只有一个是正确的”,所以可以通过确定三个备选答案是错误的,从而确定剩下的一个备选答案是正确的方法来解题.这种解选择题的方法叫做间接法.

例9 关于 x 的方程 $x^2 - ax - a^2 = a^2$ 的解是().

(A) $-a, 2a$ (B) $-a, -2a$

(C) $a, 2a$ (D) $a, -2a$

分析:将 $x=a$ 代入原方程,得左 $=-a^2 \neq$ 右,故可排除(C)、(D);在(A)和(B)中必只有一个是正确的,所以不必再代入 $-a$,而可将 $-2a$ 代入原方程,同理左 $=5a^2 \neq$ 右,从而又排除了(B),故应选(A).

说明:本题用直接法也不困难, $x^2 - ax - 2a^2 = 0$,即 $(x - 2a)(x + a) = 0$,所以, $x = 2a, x = -a$,故选(A).所以解答选择题并没有固定的方法,要因题而异,选择较优的方法.

例10 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图1-4所示,

那么结论()是正确的.

(A) $a > 0, bc > 0$

(B) $a < 0, bc > 0$

(C) $a > 0, bc < 0$

(D) $a < 0, bc < 0$

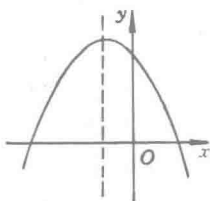
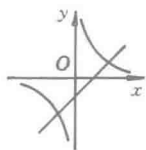


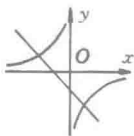
图 1-4

分析: 由于 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象开口向下, 所以 $a < 0$, 可以排除备选答案 (A)、(C). 由于 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 y 轴交于正半轴, 所以 $c > 0$. 而对称轴 $x = -\frac{b}{2a} < 0, b < 0$. b, c 异号, 可排除备选答案 (B). 故应选 (D).

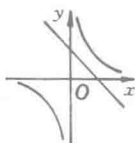
例 11 如果 $k \neq 0$, 具有函数 $y = k(x+1)$ 与 $y = \frac{k}{x}$ 特征的图象是().



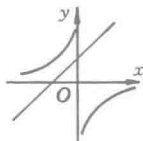
(A)



(B)



(C)



(D)

图 1-5

分析: 因为 $k \neq 0$, 所以 $k > 0$, 或 $k < 0$.

如果 $k > 0$, 由 $y = \frac{k}{x}$ 的图象特征可知, 图象应在第一、三象限, 因此可排除 (B)、(D). 再由 $y = k(x+1) = kx + k$ 的图象特征可知, 直线 $y = kx + k$ 与 y 轴交点应在正半轴, 并且 y 值随 x 值增大而增大. 因此, (A)、(C) 也应排除. 所以 k 不

能大于 0.

如果 $k < 0$, 由于 $y = \frac{k}{x}$ 的图象特征可知, 图象应在二、四象限, 因此可排除 (A)、(C) 两个答案. 再由 $y = k(x+1) = kx + k$ 的图象特征可知, 直线 $y = kx + k$ 与 y 轴交点应在负半轴, 并且 y 值随 x 值增大而减小, 因此又可排除 (D). 故应选择 (B).

(三) 验证法

单项选择题的备选答案“只有一个正确的”, 如果能将备选答案逐一代入题目中去验证, 从而确定答案, 这种解选择题的方法叫做验证法.

例 12 方程 $\sqrt{5x-1} = 2 - \sqrt{x-1}$ 的根是().

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

分析: 本题可以利用直接法来解, 但运算量较大. 由于题目中的备选答案给出了具体数值, 可以将它们逐一代入, 确定正确的答案. $x=4$, $x=3$, $x=2$ 均不能使方程成立, 而 $x=1$ 时方程成立. 故应选 (D).

例 13 已知 $y = (m-1)x^{m^2-m-1}$ 是反比例函数, 则 m 的值为().

(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 2

分析: 本题可以根据反比例函数的概念, 采用直接法来解. 如果采用验证法, 则更为简单.

把 $m=1$ 代入到函数的解析式中, 得 $y = 0 \cdot x^{-1}$, 显然不符合反比例函数的定义.

把 $m=0$ 代入到函数解析式中, 得 $y=-x^{-1}$, 它符合反比例函数的定义, 故应选择 (B).

为了保险起见, 可用 $m=-1$, $m=2$ 再验证一下, 均不是反比例函数.

(四) 特殊值法

特殊值法是依据命题在一般情况成立, 那么在其特殊情况下也肯定成立的原理, 在题目给出的条件的范围内, 用特殊值代替字母, 进行分析、运算、推理, “去伪存真”, 选择正确的结论.

例 14 一元二次方程 $x^2+px+q=0$, 当 $p>0$, 且 $q<0$ 时, 方程的().

- (A) 两根都是正数
- (B) 两根都是负数
- (C) 两根异号, 且正根的绝对值大
- (D) 两根异号, 且负根的绝对值大

分析: 因为 $p>0$, $q<0$, 所以可设 $p=1$, $q=-2$, 于是可得 $x^2+x-2=0$. 解得两根为 $x_1=1$, $x_2=-2$, 显然应选 (D).

例 15 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $(m, 1)$ 和 $(-1, m)$, 其中 $m>1$, 则 k 、 b 应满足的条件是().

- (A) $k>0$ 且 $b>0$
- (B) $k<0$ 且 $b>0$
- (C) $k>0$ 且 $b<0$

(D) $k < 0$ 且 $b < 0$

分析：运用特殊值法，因为 $m > 1$ ，所以可设 $m = 2$ ，于是可得 $P(2, 1)$ ， $Q(-1, 2)$ ，如图 1-6，一次函数的图象过第一、二、四象限，即 $k < 0$ 且 $b > 0$ ，故选择 (B)。

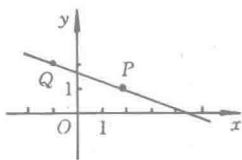


图 1-6

说明：本题还采用了数形结合的方法，由数到形，再由形到数，解法简捷。

(五) 图示法

有些选择题可以根据题目所给条件，作出相应的图形，然后借助图形，应用条件进行分析、运算、推理、排除错误答案，确定正确结论，这也是一种数形结合的方法，例 15 就是图示法的运用，下面再举一例。

例 16 如果一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限，那么 k 、 b 的取值范围是()。

- (A) $k > 0$ 且 $b > 0$ (B) $k < 0$ 且 $b > 0$
(C) $k < 0$ 且 $b < 0$ (D) $k > 0$ 且 $b < 0$

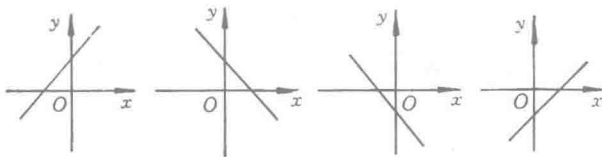


图 1-7

分析：按照各个备选答案分别画出 $y=kx+b$ 的草图，如图 1-7，观察图形，容易发现图象经过第二、三、四象限的 k 、 b 取值范围是 (C)，故应选 (C)。

在解选择题时，有时把几种方法结合起来使用。

例 17 下述直线中，一定是圆的切线的是()。

- (A) 与圆有公共点的直线；
- (B) 过圆的直径端点的直线；
- (C) 垂直于圆的半径的直线；
- (D) 到圆心的距离等于半径的直线。

分析：先依据题意画出图形，以便确定真伪。

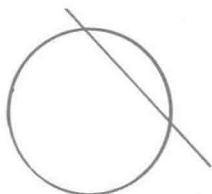


图 1-8

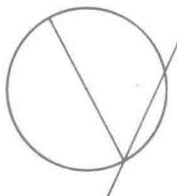


图 1-9

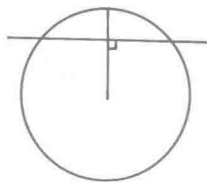


图 1-10

由 (A) 可作图 1-8，显然应排除 (A)。

由 (B) 可作图 1-9，显然也应排除 (B)。

由 (C) 可作图 1-10，显然也应排除 (C)。

所以应选 (D)。

例 18 已知 $P(a,b)$ 在第二象限，则直线 $y=ax+b$ 不经过()。

- (A) 第一象限
- (B) 第二象限
- (C) 第三象限
- (D) 第四象限

分析：由于点 $P(a,b)$ 在第二象限，那么 $a<0, b>0$ 。这样

$y=ax+b$ 的图象应如图 1-11 所示. 故应选 (C).

通过以上例题可以看到, 解答选择题既有方法, 又无定法, 有时可单独选用一种方法, 有时需要综合应用几种方法, 但是透彻地掌握基础知识, 熟练地掌握基本

图 1-11

技能是正确、迅捷地解答选择题的前提. 另外, 还需要我们认真审题. 仔细观察, 总结规律, 提高我们的解题能力.

二、自我检测题

(一) 实数

1. -5 的绝对值是().

- (A) $-\frac{1}{5}$ (B) -5
(C) 5 (D) ± 5

2. $-\frac{1}{2}$ 的相反数是().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$
(C) 2 (D) -2

3. $-\frac{1}{3}$ 的倒数是().

- (A) -3 (B) 3
(C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

4. 5^{-1} 等于().