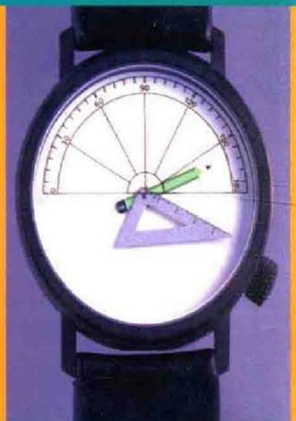
中学数学专题丛书

叶尧城 主编



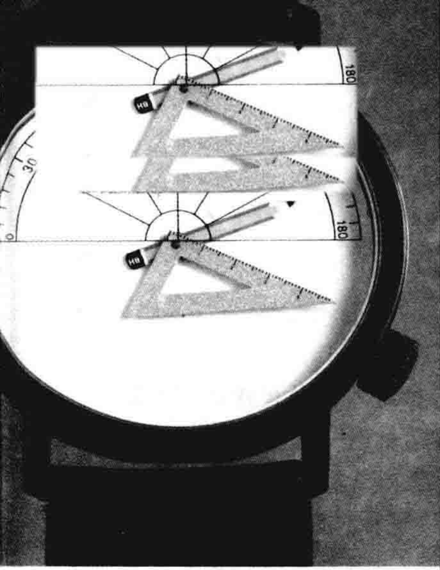
吴远伦 南山 编著

相似形与圆

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

15



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

相似形与圆

吴远伦 南山 编著

15

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

相似形和圆/吴远伦,南山编著 .—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3171-9

Ⅰ.相… Ⅱ.①吴… ②南… Ⅲ.几何课-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 086952 号

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷 (441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 11.75 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷
字 数:228 千字 印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3171-9/G·2576 定价:15.00 元

总　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在"为所有的学生打好共同基础"上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现"以学生发展为本"，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的"检测题"、"同步练习"、"习题集"等)。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002 年 1 月

目录

第一章
相似形

一、比例线段

1.1 比例

我们知道,两个全等图形的形状相同,大小也相同,它们能够完全重合.但在生产和生活的实践中,常常遇到这样的一些问题:你照的相片是真人那么大吗?如果画一只蚂蚁,你会在纸上画多大?我们看到的地图与原来真实地形是什么关系?……

由以上事实说明,有的事物是把原形缩小了,有的是放大了.虽然图形的大小发生了变化,但它们的形状是完全相同的,为了研究这些形状相同的图形之间的关系,需要先研究比例线段.

1. 比例的定义

定义 两个相等的比的式子叫比例,记作$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或$a:b=c:d$,称作a、b、c、d成比例.(其中a、b、c、d均不为0).

比例式中，a、d 叫做比例外项，b、c 叫做比例内项，d 叫 a、b、c 的第四比例项，如果比例中两个比例内项相等，即比例为：$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 或 $a:b=b:c$ 时，我们把 b 叫做 a 和 c 的比例中项.

2. 比例的性质

在比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的两边同乘以 bd，得到 $ad=bc$，即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc. \tag{1}$$

在等式 $ad=bc$ 中两边同除以 bd，又得到 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，即

$$ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}. \tag{2}$$

(1)、(2) 式合起来表明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 与 $ad=bc$ 可以互相推出，它是比例的基本性质：

比例的性质定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.$

推论　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow b^2=ac.$

根据比例的性质定理，一个比例可以得到多种不同的比例变形，例如：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow bc=ad\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. 同理可以由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 推出：$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$，$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$，… 等七种不同的形

式,此外比例还有两个重要性质:

(i) **合比性质**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

证明:$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

(ii) **等比性质**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}(b+d+\cdots+m\neq 0).$$

$$\Rightarrow\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}.$$

证明 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}=k$,那么$a=bk,c=dk,\cdots,m=nk$.

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{bk+dk+\cdots+nk}{b+d+\cdots+n}=k=\frac{a}{b},$$得证.

例1 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}(b\pm d\neq 0)$,求证:

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{b-d}{b+d}.$$

证明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}\\ \frac{a-c}{b+d}=\frac{a}{b}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$.

$$\Rightarrow\frac{a-c}{a+c}=\frac{b-d}{b+d}.$$

例2 若$x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$,求$x$的值.

解　当$a+b+c=0$时，$x=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{-(b+c)}{b+c}=-1$；当$a+b+c\neq 0$时，

$$x=\frac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore x$的值为-1或$\dfrac{1}{2}$.

说明　从例2的解答中可以看到应用比例的等比性质，必须注意所有分母之和不为零的条件，否则就会得出错误的结论.

1.2　比例线段

定义　在四条线段a、b、c、d中，如果a和b的比等于c和d的比，那么，这四条线段叫做成比例线段，简称比例线段.

例3　已知线段$AB=l$，C是AB上的一点，如图1-1-1，且AC是AB和BC的比例中项，求AC的长.

图 1-1-1

解　设$AC=x$，那么$BC=AB-AC=l-x$.由题意，$x^2=l(l-x)$，

$\therefore x^2+lx-l^2=0$，

$$x=\frac{-l\pm\sqrt{l^2+4l^2}}{2}\text{（舍去负值）}$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l\approx 0.618l.$$

把一条线段(AB)分成两条线段,使其中较大的线段(AC)分成原线段与较小的线段(BC)的比例中项,叫做把这条线段黄金分割.

在一条线段 AB 上截取这条线段的0.618倍得点 C,点 C 就是线段 AB 的黄金分割点(近似).我们也可以根据勾股定理,利用尺规作图作出一条线段的黄金分割点,具体作法如下:

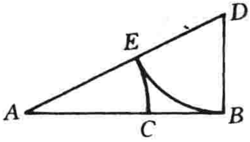


图 1-1-2

1. 过点 B 作 $BD \perp AB$,使 $BD = \frac{1}{2}AB$.

2. 连结 AD,在 AD 上截取 $DE = DB$.

3. 在 AB 上截取 $AC = AE$.

点 C 就是所求的黄金分割点,

这是因为 $AC = AE = AD - \frac{AB}{2} = \sqrt{AB^2 + (\frac{AB}{2})^2} - \frac{AB}{2}$

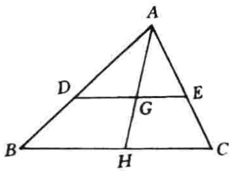
$= \frac{\sqrt{5}}{2}AB - \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$.

黄金分割既符合日常的审美需要,又有广泛的实用价值.其实,黄金分割早在战国时代就已经有人研究和应用,长沙马王堆汉墓出土的文物中,有的长、宽的比例就是按黄金分割设计制作的;日常生活的一些矩形用品(如书本、桌面、衣柜)和建筑物中的一些矩形结构(如窗户、房间)常常设计成黄金分割样式;常见的一些图画照片,主要人物或形象,并不放在正中,而是放在接近黄金分割处;就是二胡的“千斤”也是放在黄金分割处,音色最好.

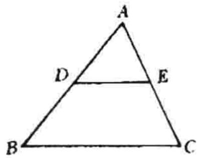
著名数学家华罗庚推广的“优选法”中,就是在可实验的范围内,为了减少实验次数,寻找最优点,常采用它的黄金分割点的实验,因而0.618是“优选法”中的重要的常数.

练　　习

1. 如图,在$\triangle ABC$中,$\frac{AG}{DE}=\frac{AH}{BC}$,且$DE=12$,$BC=15$,$GH=4$,求$AH$.



(第1题)

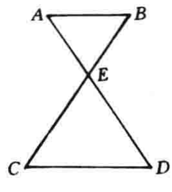


(第2题)

2. 如图,若$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}=\frac{6}{5}$,且$\triangle ABC$与$\triangle ADE$的周长差为4,求$\triangle ABC$的周长.

3. 已知:$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,求证:$ab+cd$是a^2+c^2和b^2+d^2的比例中项.

4. 已知AD,BC相交于点E,且$\frac{AE}{AD}=\frac{BE}{BC}$,求证:$\frac{AE}{ED}=\frac{BE}{EC}$.



(第4题)

1.3 平行线分线段成比例

我们知道,平行线等分线段定理:如图1-1-3如果 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,且 $AB = BC$,那么 $DE = EF$.

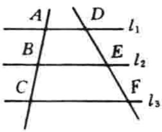


图 1-1-3

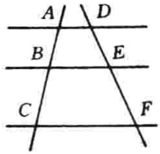


图 1-1-4

此时 $\frac{AB}{BC} = 1, \frac{DE}{EF} = 1$

于是有 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

这就是说,平行线等分线段时,分得的线段成比例,若平行线不等分线段时,分得的线段同样对应成比例.如图1-1-4,$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB \neq BC$,则 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$,即

平行线分线段成比例定理 三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例.(证明略)

如图1-1-5,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $DE \parallel BC$,过点 A 作 $MN \parallel DE$,依据上述定理得:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{或} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$$

于是有

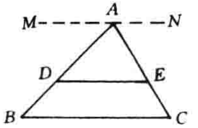


图 1-1-5

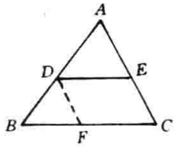


图 1-1-6

推论1 平行于三角形一边的直线截其它两边,所得对应线段成比例.

在图1-1-6中,过 D 作 $DF \parallel AC$ 交 BC 于 F.

$$\left.\begin{array}{l} \text{由 } DE \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \\ \text{又 } DF \parallel AC \Rightarrow \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{AD}{AB} \\ \text{又四边形 } EDFC \text{ 为平行四边形} \Rightarrow DE = CF \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

又得到:

推论2 平行于三角形的一边,并且和其它两边相交的直线,所截得的三角形三边与原三角形三边对应成比例.

如图1-1-7,在 $\triangle ABC$ 中,$\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$,那么 DE 与 BC 是否平行?

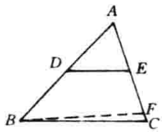


图 1-1-7

可用反证法探求一下结论.

假如 DE 不平行 BC,过 B 作 $BF \parallel DE$,交 AC 于 F.

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BF \Rightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AF} \\ \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow AF = AC.$$

$\therefore C$、F 重合于一点，说明 $DE \parallel BC$.

即得到三角形一边的平行线的判定：

推论3 如果一条直线截三角形两边，所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

例4 如图1-1-8，已知 AD 为 BC 边上的中线，$EF \parallel BC$ 交 AD 于 M. 求证：$EM = MF$.

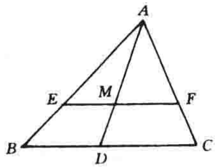


图 1-1-8

证明 $EF \parallel BC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EM}{BD} \\ \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{FM}{CD} \\ \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{EM}{BD} = \dfrac{FM}{CD} \\ BD = CD \end{array}\right\} \Rightarrow EM = MF.$$

说明 用比例证线段相等，通常先证线段然后利用两线段相等的条件，得另两线相等.

例5 已知 ▱$ABCD$ 中，CF 交 BD 于 E，交 AD 延长线于 F，交 AB 于 M，求证：EC 是 EF 和 EM 的比例中项(如图1-1-9).

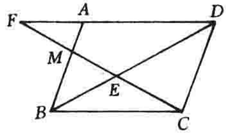


图 1-1-9

分析 此题即证 $EC^2 = EF \cdot EM$.很容易看出不能直接得出要证的结论,但可把 $EC^2 = EF \cdot EM$ 写成比例式 $\frac{EC}{EF} = \frac{EM}{EC}$.利用中间比作过渡即可证得.

证明 $\square ABCD \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} BC \parallel DF \Rightarrow \frac{EF}{EC} = \frac{DE}{EB} \\ CD \parallel BM \Rightarrow \frac{EC}{EM} = \frac{DE}{EB} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \frac{EF}{EC} = \frac{EC}{EM} \Rightarrow EC^2 = EF \cdot EM$.即 EC 是 EF 与 EM 的比例中项.

说明 证四条线段成比例,一般是寻找中间比,通过中间比作"桥梁",便得到要证的比例式.

例 6 已知 $\triangle ABC$ 中, $BD = CE$, DE 延长线与 BC 延长线交于 F,如图 1-1-10.

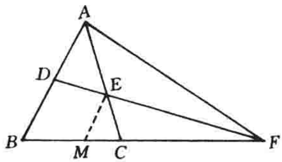


图 1-1-10

求证 $AC \cdot EF = AB \cdot DF$.

分析 证线段乘积相等时,一般应先化为比例式.即证 $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{EF}$.由于直接得不出这个比例式,所以应寻找中间比来代换,而只有平行线可得比例线段,因此一般的方法是添加平行线,由于需证与 $\frac{FD}{FE}$ 成比例的线段,所以从 E 点作 $EM \parallel AB$ 交 BC 于 M.如何应用 $EM \parallel$