高等学校"十三五"规划教材

工程数学

（上册）

主编　杨萍　敬斌

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校“十三五”规划教材

工程数学（上册）

主 编 杨 萍 敬 斌

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书分为上、下两册，共20章. 上册包括线性代数和复变函数，下册包括概率论、数理统计和积分变换.

上册共9章，分别为矩阵及其应用、线性方程组、向量组的线性相关性、向量空间及正交性、对称矩阵的相似性及二次型、复变函数微分、复变函数积分、级数、留数定理及其应用. 为更好地启发读者的思维，本书增添了大量的知识产生背景的内容.

本书内容丰富，结构严谨，突出实际运用，可作为高等工科院校本科生数学基础课教材，也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学·上册/杨萍，敬斌主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2015.8
高等学校"十三五"规划教材
ISBN 978-7-5606-3749-5

Ⅰ. ① 工… Ⅱ. ① 杨… ② 敬… Ⅲ. ① 工程数学一高等学校一教材 Ⅳ. ① TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 165226 号

策　　划　戚文艳
责任编辑　王　瑛
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西大江印务有限公司
版　　次　2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印　张　15.5
字　　数　364千字
印　　数　1～3000册
定　　价　28.00元
ISBN 978-7-5606-3749-5/TB
XDUP 4041001-1

前　　言

工程数学是高等院校理工科学生一门重要的数学基础课，包括线性代数、复变函数、概率论、数理统计和积分变换等内容，对培养学生的数学思维和工程应用能力具有重要的作用.

在新技术革命对人才培养需求的牵引下，近些年作者对“工程数学”课程进行了一系列的教学改革，从内容体系、知识结构等方面进行了优化，补充了部分启发学生思维、有助于学生能力培养的教学内容，这些改革成果凝练成了本书。本书分为上、下两册，上册包括线性代数和复变函数，下册包括概率论、数理统计和积分变换. 在本书的编写过程中，着力体现以下几个特色：

（1）在注重保持数学理论体系的系统性和严密性的同时，从更有利于学生理解和学习的角度对部分内容体系进行了大胆的调整、优化，使各部分知识联系更紧密，体现由浅入深、由具体到抽象、循序渐进的特点.

（2）注重知识点的溯本求源. 在书中添加了大量反映知识起源的背景材料，使学生在学习和阅读时能够了解相关知识点产生的时代背景，感受数学前辈们在探索问题求解时的思想火花.

（3）更加关注知识的实际应用. 书中无论在概念导入、方法应用还是知识拓展等部分，都着力将理论知识与实际问题结合起来. 在实践性较强的部分，还特别添加了软件使用方法的介绍和一些实验环节，帮助学生观察和思考，从而实现对数学概念的深入理解和灵活应用. 在积分变换等工程应用很强的部分，注意将数学理论与工程背景紧密结合，体现工程数学的工程应用特色.

（4）在例题、习题选择上更有针对性. 精心挑选有代表性的例题和习题，既有理论分析计算问题，也有启发思维的应用实例，进一步增强了教材的实用性.

本书的编写大纲由杨萍、敬斌拟定. 上册共九章，第一章由吴聪伟编写，第二章由刘素兵编写，第三章由赵伟舟编写，第四章由翟世梅编写，第五章由杨萍编写，第六章由朱亚红编写，第七章由房茂燕编写，第八章由赵志辉编写，第九章由彭司萍编写. 全书由杨萍、敬斌统稿.

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正，以便进一步修改完善.

编　者

2015 年 4 月

目 录

第一部分 线性代数

第二部分 复变函数

第一部分　线性代数

线性代数是代数学的一个分支，是高等理工科院校中众多专业重要的一门数学基础课.线性代数主要处理线性关系问题，它的研究对象是向量、向量空间、线性变换和有限维的线性方程组等.线性代数被广泛应用于自然科学研究的各个领域.在计算机广泛应用的今天，线性代数已成为信息技术相关理论与算法基础的重要组成部分.

线性代数作为一个独立的数学分支在20世纪才形成，但其研究历史却非常久远.最古老的线性代数问题是线性方程组求解，在中国古代的数学著作《九章算术》中已有完整的叙述.现代意义的线性代数出现于17世纪，18～19世纪逐渐完善，形成了以向量空间及其线性变换、相关矩阵理论为主要内容的知识体系，为处理线性问题提供了强有力的工具.

线性代数所体现的几何观念与代数方法之间的联系，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推证、巧妙的归纳综合等，对于强化数学训练，增强人们的科学素养具有重要价值.

第一章 矩阵及其应用

线性代数是数学诸多分支中应用最为广泛的分支之一，其主要处理和数量线性关系有关的问题. 和其他数学分支一样，线性代数有两类基本数学构建：对象数据以及它们之间的运算. 本章主要讨论由数组成的简单矩形数表结构——矩阵及其应用.

矩阵是线性代数中最基本的概念，矩阵的运算是矩阵理论的基础. 在自然科学、工程技术、经济管理等各个领域，涉及大量多元数量之间的关系，而这些问题往往可以用矩阵进行刻画. 表面上性质、状态完全不同甚至毫无联系的问题，归结为矩阵的问题后却有着惊人的共性. 利用矩阵这一有利工具去刻画描述现实生活中碰到的问题，进而解决问题是现代工程技术人员必备的数学素质.

本章首先探讨高斯(Gauss)消元法，展示矩阵作为一个工具在线性方程组求解过程中的重要意义；然后探讨矩阵的基本运算，并在 Gauss 消元法基础上提出初等矩阵的概念；最后介绍分块矩阵的概念以及矩阵的相关应用.

1.1 矩阵的概念

一、高斯消元法

线性代数的核心问题是解线性方程组. 中学代数中已经介绍过二元和三元一次方程组，现在把它推广为 $m\times n$ 型线性方程组. $m\times n$ 型线性方程组较为初等的求解方法是高斯(Gauss)消元法，即逐次将方程组化简为阶梯型，求出其中一个未知数的解，然后通过反向回代求出剩余所有解. 例如，对于线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 & ① \\ 2x_1-x_2+x_3=11 & ② \\ 3x_1+x_2+10x_3=1 & ③ \end{cases} \tag{1.1}$$

利用 Gauss 消元法，即②－2①和③－3①消去方程②、③中的 x_1，进一步利用新的方程②、③消去方程③中的 x_2，得到方程组(1.1)的等价方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1 \\ \qquad x_2+\ x_3=-3 \\ \qquad\quad -3x_3=4 \end{cases} \tag{1.2}$$

由此得 $x_3=-4/3$，将其代入上面方程可依次解得 $x_2=-5/3$，$x_1=16/3$.

方程组(1.1)中有三种不同类型的量：未知数 x_1、x_2、x_3；未知数对应的系数项(共有 9 个数)；常数项 1、11、1. 在利用 Gauss 消元法求解的过程中，实际参与运算的是未知数 x_1、x_2、x_3 对应的 9 个系数项以及 3 个常数项 1、11、1，如果将未知数对应的 9 个系数项

以及常数项组成特殊数表

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

来描述方程组(1.1)，那么 Gauss 消元法的计算过程可描述如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Gauss 消元法回代计算过程亦可描述如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

最右侧 $x_1=16/3$，$x_2=-5/3$，$x_3=-4/3$，即为方程组的解.

可见，使用由方程组系数和常数项组成的一种特殊数表结构来描述繁琐的 Gauss 消元法过程是比较实用、简洁的.

二、矩阵的定义

通过对 Gauss 消元法数表结构描述问题的探讨，我们发现用一个矩形数表来刻画 Gauss 消元法实际上就是去掉了和运算过程本身无关的一些量，使得算法的描述更为简洁. 对于方程组(1.1)中摆定了位置的 9 个系数以及常数项，引进一个三行四列的“矩形数表结构 $\boldsymbol{A}$”：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

更一般地，对 n 个未知数、m 个方程的 $m\times n$ 型线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.5}$$

根据其系数的排列特征，可抽象得到如下定义.

定义 1.1　由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 排列成的 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列的 $m\times n$ 矩阵，简称**矩阵**(matrix)，记为$(a_{ij})_{m\times n}$. 其中：$m\times n$ 个数称为矩阵的**元素**(element)；a_{ij} 表示矩阵第 i 行第 j 列处的元素；i 称为 a_{ij} 的**行标**；j 称为 a_{ij} 的**列标**.

若无特殊说明，本书中的数均为实数 $\mathbf{R}$，对应矩阵均为实矩阵，通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示，例如 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$、$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

矩阵概念的萌芽历史悠久，公元 1 世纪中国的《九章算术》的“方程”一章中就已蕴含矩阵思想，但矩阵概念产生于 19 世纪 50 年代，是为了解线性方程组的需要而产生的. 1815 年柯西发表了一篇关于行列式理论的基础性文章，在这篇文章中他用缩写的记号$(a_{1,n})$代表称之为“对称组”的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1850 年，西尔维斯特在研究方程的个数与未知量的个数不相同的线性方程组时，引入了“矩阵”一词来表示“一项由 m 行 n 列元素组成的矩形阵列”. 不过，由于凯莱最早引进矩阵概念，并使矩阵从零散的知识发展为系统完善的理论体系，所以人们通常将矩阵论的创立者归功于凯莱. 凯莱、西尔维斯特、弗罗伯纽斯等数学家们为矩阵理论的发展做出了重要的贡献.

[阅读材料]

数学家西尔维斯特

西尔维斯特(Sylvester James Joseph，1814—1897 年)，英国数学家，在方程论、行列式和矩阵理论、不变量理论、线性结合代数、标准型、数论等领域都有重要贡献.

西尔维斯特一生共发表了约 300 篇论文，他在 50 多年内是行列式理论始终不渝的探索者之一. 西尔维斯特具有丰富的想象力和创造精神，他思维开阔、机敏，善于用火一般的热情表述他的思想，他创造了许多数学名词，例如不变量、判别式、黑赛矩阵、雅可比行列式、析配法、零化子、二次型的惯性律等. 为此，他曾风趣地说自己是“数学亚当”(因为亚当喜欢给野兽和花起名字). 西尔维斯特的代表作有《不变量》、《协变量》、《可换量》、《论判别式》、《论椭圆函数》等. 1904 年至 1912 年间，剑桥大学为他出版了 4 卷本《数学论文集》.

对于 $m\times n$ 型线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

我们通常称由其系数组成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

为**系数矩阵**，由方程组右端的常数项

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

组成的 $m\times 1$ 矩阵为**常数项**，由系数矩阵与常数项组合成的矩阵

$$(A,\ b)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

为方程组的**增广矩阵**(augmented matrix).

注意，矩阵是一个矩形数表，加上方括号或者圆括号均可表示矩阵.

两个矩阵的行数和列数都相等，就称它们是**同型矩阵**. 若 A 和 B 是同型矩阵，且其对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，那么就称矩阵 A 与矩阵 B **相等**，记作

$$A=B$$

例 1.1　已知 $A=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}x&3\\4&y\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3\\z&1\end{pmatrix}$，求 x、y、z.

解　因为 $A=B$，所以 $x=2$，$y=1$，$z=4$.

下面介绍一些常用的特殊矩阵.

三、特殊矩阵

1. 零矩阵

若矩阵 $A_{m\times n}$的元素均为 0，则称其为**零矩阵**. 如

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n}$$

记为 $O_{m\times n}$或 O. 注意，不同型的两个零矩阵是不相等的，如 $O_{2\times 3}\neq O_{5\times 4}$.

2. 行矩阵和列矩阵

只有一行的矩阵称为**行矩阵**，如

$$A=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$$

为避免元素间混淆，行矩阵一般记为

$$\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

只有一列的矩阵称为**列矩阵**，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3. 方阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 行数 m 和列数 n 相同，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ **方阵**(square matrix)，常称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵，简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 方阵中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**(main diagonal).

4. 对角矩阵

主对角线上的元素不全为零，其余的元素全都为零的方阵称为**对角矩阵**(diagonal matrix)，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵常记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$，如

$$\mathrm{diag}(3, -1, 2)=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 数量矩阵

主对角线上的元素全相等的对角矩阵称为**数量矩阵**，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & c \end{pmatrix} \qquad (c\text{ 为常数})$$

6. 单位矩阵

主对角线上的元素全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**(unit matrix)或**恒等矩阵**，简记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$，如

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

7. 对称矩阵

关于主对角线对称的元素都分别相等的方阵，即满足 $a_{ij}=a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$的方阵称为**对称矩阵**(symmetric matrix)，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. 反对称矩阵

关于主对角线对称的元素都分别互为相反数的方阵，即满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$的方阵称为**反对称矩阵**. 注意，反对称矩阵对角线上的元素均为零，如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

9. 上三角矩阵

主对角线以下元素均为零的方阵称为**上三角矩阵**，即满足 $a_{ij}=0(i>j)$的方阵，其中 $i, j=1, 2, \cdots, n$，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

注意，Gauss 消元法过程，本质上就是将线性方程组系数矩阵经过一系列处理，化简成上三角矩阵的过程.

10. 下三角矩阵

主对角线以上元素均为零的方阵称为**下三角矩阵**，即满足 $a_{ij}=0(i<j)$的方阵，其中 $i, j=1, 2, \cdots, n$，如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.2　矩阵的基本运算

1858 年，凯莱发表重要文章《矩阵论的研究报告》，在该文中凯莱用了单个的字母表示矩阵，定义了矩阵的基本运算及常见矩阵.

凯莱《矩阵论的研究报告》的公开发表标志着矩阵理论作为一个独立数学分支的诞生. 作为矩阵理论的创立者，凯莱在矩阵理论的创立与发展中做了开创性的工作，他是第一个把矩阵作为独立的概念提出来，并作为独立的理论加以研究的数学家. 从矩阵概念的引入、相关概念的定义、运算的定性与求法到矩阵一些重要结论的建立，凯莱发表了一系列研究成果，使得矩阵从零散的知识发展为系统完善的理论体系.

[阅读材料]　**数学家凯莱**

凯莱(Cayley Arthur，1821—1895 年)，英国数学家，涉足多个数学分支，共发表论文近 1000 篇，其中有不少是奠基之作. 凯莱是不变量的奠基人，是 n 维几何、高维空间的创始人之一. 另外，凯莱是矩阵理论的创立者. 他首先引进了矩阵的一些概念和简化记号，定义了零矩阵、单位矩阵以及两个矩阵的和，讨论了矩阵性质. 矩阵是他手中极为有效的工具. 他还通过将 $n\times m$ 矩阵方面的工作类比于几何中的概念，从而实现了高维空间的解释. 1841 年他创造了表示行列式的两竖线符号.

凯莱去世后，剑桥大学萨德勒教授福塞思写道，凯莱“不仅是一位数学家，……他的一生对于认识他的人有着重大的影响：他们钦佩他的品格，犹如他们敬重他的天才. 在他去世时，他们感到，一个伟大的人从这个世界上消失了.”

下面定义矩阵的运算：矩阵的加法、乘法、矩阵与数的乘法以及矩阵的转置等.

一、矩阵的线性运算

1. 矩阵加法

定义 1.2　设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

是两个 $m\times n$ 型矩阵，则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$$

矩阵的加法就是矩阵对应元素相加. 当然，相加的矩阵必须要有相同的行数和列数，即只有同型矩阵方可相加.

例 1.2　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & -1\\7 & 9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}12 & -4\\7 & 17\\6 & 11\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

解

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 4\\2 & -1\\7 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & -4\\7 & 17\\6 & 11\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+12 & 4-4\\2+7 & -1+17\\7+6 & 9+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0\\9 & 16\\13 & 20\end{pmatrix}$$

由于矩阵加法归结为它们元素的加法，即数的加法，故不难验证矩阵加法满足：

(1) 结合律：$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$；

(2) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

明显地，对零矩阵，有 $\boldsymbol{A}_{mn}+\boldsymbol{O}_{mn}=\boldsymbol{A}_{mn}$.

定义 1.3　矩阵

$$\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\-a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\-a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记为 $-\boldsymbol{A}$.

显然，有 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，从而可定义**矩阵减法**为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

我们可以将负矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 看做是实数 -1 和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘所得，从而抽象出一般数和矩阵的数量乘法.

2. 矩阵数量乘积

定义 1.4　矩阵

$$\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\\lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 λ 的**数量乘积**，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$. 换句话说，用数 λ 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$，就是把矩阵的每个元素都乘上 λ.

不难验证，数量乘积满足下列运算规律：

(1) $\lambda(k\boldsymbol{A})=(\lambda k)\boldsymbol{A}$(结合律)；

(2) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

(3) $(\lambda+k)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{A}$.

矩阵的加法和数乘运算，统称为矩阵的**线性运算**.

例 1.3　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 7 & 1\\2 & 0 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\5 & 6 & 0\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解

$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}4&7&1\\2&0&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3&1&-1\\5&6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&21&3\\6&0&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&2&-2\\10&12&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&19&5\\-4&-12&15\end{pmatrix}$$

二、矩阵的乘法

先来看一个例子.

例 1.4 某投资公司在甲、乙、丙三家公司所拥有的股份，在 2000 年与 2001 年每万股所分红利如表 1.1 所示. 问：这一投资公司在 2000 年和 2001 年分别得到红利的总额是多少？

表 1.1

公司	股份数 /万股	2000 年每万股红利 /万元	2001 年每万股红利 /万元
甲	300	0.5	0.8
乙	500	1.4	1.5
丙	200	2.3	2

解 将表 1.1 中股份数和红利分别用矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 表示，则 $\boldsymbol{A}=(300\quad 500\quad 200)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0.5&0.8\\1.4&1.5\\2.3&2\end{pmatrix}$，那么该投资公司在 2000 年和 2001 年得到的红利总额分别为

$$\boldsymbol{C}=(300\times0.5+500\times1.4+200\times2.3\quad 300\times0.8+500\times1.5+200\times2)$$

从矩阵运算的角度来看，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是一行两列矩阵，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第一行第一列元素是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一列元素对应相乘后相加得到的，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第一行第二列元素是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第二列元素对应相乘后相加得到的.

1. 矩阵乘法的定义

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$. 若

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\qquad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\tag{1.6}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素分别对应相乘后再相加就得到了矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij}，即

$$c_{ij}=\underset{\text{第}i\text{行}}{(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is})}\begin{array}{c}\text{第}j\text{列}\\ \begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}\end{array}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$