

数学建模案例丛书 / 主编 李大潜

UMAP

数学建模案例精选 1

姜启源 等 编译

The Mathematics of Scuba Diving

Insulation

Geological Dating

Mathematics and Fairness in Democratic Elections

Collecting Trading Cards

The Scheduling of Traffic Lights

Cards, codes, and kangaroos

Gravity-Fed Water Delivery Systems

A Temperature-Dependent Model of a Mite Predator-Prey Interaction

The Resilience of Grassland Ecosystems

Small Mammal Dispersion

The Mathematics of Medical X-Ray Imaging

高等教育出版社

COMAP

数学建模案例丛书 / 主编 李大潜

UMAP

数学建模案例精选

UMAP Shuxue Jianmo Anli Jingxuan

①



姜启源 等 编译

高等教育出版社·北京

图书在版编目 (C I P) 数据

UMAP数学建模案例精选. 1 / 姜启源等编译. -- 北京: 高等教育出版社, 2015. 7
(数学建模案例丛书 / 李大潜主编)
ISBN 978-7-04-041842-2

I. ①U… II. ①姜… III. ①数学模型 IV. ①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第027248号

策划编辑 李晓鹏	责任编辑 李晓鹏	封面设计 张雨薇	版式设计 张雨薇
插图绘制 杜晓丹	责任校对 王 雨	责任印制 张泽业	

出版发行 高等教育出版社	咨询电话 400-810-0598
社 址 北京市西城区德外大街4号	网 址 http://www.hep.edu.cn
邮政编码 100120	http://www.hep.com.cn
印 刷 北京天时彩色印刷有限公司	网上订购 http://www.landaco.com
开 本 787 mm×960 mm 1/16	http://www.landaco.com.cn
印 张 20.25	版 次 2015年7月第1版
字 数 300千字	印 次 2015年7月第1次印刷
购书热线 010-58581118	定 价 39.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 41842-00

数学建模案例丛书编委会

主 任 李大潜

副 主 任 陈叔平 谭永基 姜启源 叶其孝 谢金星 李艳馥

委 员 韩中庚 吴孟达 鲁习文 杨启帆 刘来福 边馥萍 蔡志杰 周义仓

薛 毅 黄海洋 陆立强 丁颂康 但 琦 张文博

常务编辑 谭永基 姜启源 叶其孝 韩中庚 吴孟达

秘 书 李晓鹏

序

数学作为一门研究现实世界中的空间形式与数量关系的科学,它所研究的并非真正的现实世界,而只是现实世界的数学模型,即所研究的那部分现实世界的一种虚构和简化的版本。尽管数学建模这个术语的兴起并被广泛使用不过是近些年来事,但作为联系数学与应用的重要桥梁,作为数学走向应用的必经的最初一步,数学建模与数学学科本身有着同样悠久的历史。从公元前三世纪建立的欧几里得几何,到根据大量天文观测数据总结出来的行星运动三大定律;从牛顿力学和微积分的创立,到出现在流体力学、电动力学、量子力学中的基本微分方程,无一不是揭露了事物本质的数学模型,且已成为相关学科的核心内容和基本构架。

半个多世纪以来,随着数学科学与计算机技术的紧密结合,已形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的一个重要组成部分和突出标志,“高技术本质上是一种数学技术”的提法,已经得到越来越多人们的认同。作为基础学科的数学籍助于建模与算法向技术领域转化,变成了一种先进的生产力,对加强综合国力具有重大的意义。与此同时,数学迅速进入了经济、金融、人口、生物、医学、环境、信息、地质等领域,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、生物数学、数学地质学等应运而生,为数学建模开拓了广阔的用武之地。

另一方面,将数学建模引入教学,为数学和外部世界的联系提供了一种有效的方式,让学生能亲自参加将数学应用于实际的尝试,参与发现和创造的过程,取得在传统的课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和切身感受,必将启迪他们的数学心智,促使他

们更好地应用、品味、理解和热爱数学,在知识、能力及素质三方面迅速成长。

自上世纪 80 年代初数学建模进入我国大学课堂以来,经过 30 多年健康、快速的发展,目前已有上千所高校开设了各种形式的数学建模课程,正式出版的教材和参考书达 200 多本。全国大学生数学建模竞赛自 1992 年创办以来,受到广大师生的热烈欢迎,到 2014 年已有 1 300 多所院校、23 000 多个队的 7 万余名学生参加。可以毫不夸张地说,数学建模的课堂教学实践与课外竞赛活动相互促进、协调发展,是这些年来规模最大、最成功的一项数学教学改革实践。

用数学的语言和工具表述、分析和求解现实世界中的实际问题,并将最终所得的结果回归实际、检验是否有效地回答了原先的问题,这是数学建模展示的一个全过程。在 30 多年数学建模的教学实践中,已冲破了原有的数学教学模式,形成了一种案例式、讨论式的教学方法。通过一些源于生活、生动新颖,又内涵丰富、启示性强的案例,不仅能吸引学生浓厚的学习兴趣,而且对于培养、提高学生数学建模的意识、方法和能力都有切实的成效。

事实充分说明,数学建模能力的培养和训练,各种案例所起的作用是十分重要的。我们不仅要充分利用案例的广度,通过生动、丰富的案例,展示及阐述数学在诸多领域中的应用,更要特别注重案例的深度,着意选择一些随着假设条件不断贴近实际、所建立的模型不断改进、而由模型得到的结果也更加符合实际的案例,体现数学建模逐步深入和发展的过程。正因为如此,这套数学建模案例丛书,将由翻译、改编国外相关机构出版的案例和收集、汇编国内撰写的案例这两部分组成,以期给广大教师和学生提供数学建模方面的教学素材、学习读物和竞赛辅导材料,促进我国数学建模的教学及竞赛不断深入发展。

当然,数学建模要不断深入,就不能认为现有的、包括那些目前可能是有口皆碑的模型,已经到了十全十美的境地,可以画上句号了。对本丛书中所精心收集的案例,自然也应抱着这样的态度。这是数学建模一个显著的特点,是数学建模永远生气蓬勃的标志,也是广大的数学建模工作者永不止步的鞭策和动力。诚挚地希望广大读者能提出宝贵的建议,并积极提供可以收入本丛书的有关数学建模的案例或者素材,帮助编委会将这套丛书愈办愈好。

李大潜

2014 年 10 月

前 言

经过数学建模案例丛书编委会成员的共同努力,在全国大学生数学建模竞赛组委会和高等教育出版社的支持、配合下,《UMAP 数学建模案例精选(1)》顺利问世了。

本书的案例全部选自美国 COMAP(Consortium for Mathematics and Its Applications)出版的 UMAP(Undergraduate Mathematics and Its Applications)期刊上的教学单元。该刊物的对象是大学生和教师,主要发表数学建模及数学科学在各个领域中应用的研究论文、教学单元等,在每年举办的美国大学生数学建模竞赛和交叉学科竞赛中获得 Outstanding 奖的论文也在该刊物上刊载。

本书选编的数学建模案例有以下几个特点:

应用领域涉及工程、经济、交通、社会、地质、生物、生态、医学、测量等,每篇都对案例的应用背景作了简明、生动的介绍,让不大熟悉那个领域的读者也能基本上了解这个案例要讨论的问题,有些还对材料的历史由来给出较详细的说明。

数学知识基本上不超出微积分、微分方程、线性代数、概率、向量分析等大学基础数学的内容,学完这些课程的学生阅读案例,数学上不会遇到多大困难。个别案例用到数值分析、傅里叶变换、博弈论的知识。

教学方法讲究循序渐进、步步为营,数学推导比较详细,特别是在问题展开的过程中配备了相应的习题,让学生边阅读边练习。如果能在学习时按照要求把全部习题都做一遍,相信不仅有利于对问题的深入理解,而且对相关数学方法的学习也是一次很好的复习和提高。

本书的案例可以作为数学建模课程的辅助教材和自学材料,也为讲授、学习其他数学课程的教师、学生提供了将数学方法应用于实际问题的丰富的素材和课外读物。

编译者对原文中某些专业知识的理解不可避免地存在可以商榷之处,对一些次要的、过时的部分也作了适当的删节,为了给读者提供方便,特将本书的全部原文放到与本书配套的“数字课程”网站上。

姜启源

2014年10月

内容简介

本书为《数学建模案例丛书》的第一册，书中的案例选自美国 COMAP 出版的 UMAP 期刊上的教学单元，包含的案例有戴水肺潜水的数学建模，日辐射量，地质定年法，民主选举中的数学与公正性，交易卡片的收集，交通信号灯的调度，纸牌、编码和大袋鼠，重力输水系统，依赖于温度的蠕虫捕食者—食饵模型，草地生态系统的抗灾能力，小型哺乳动物的扩散，医用 X-光学成像的数学。这些案例的应用领域涉及工程、经济、交通、社会、地质、生物、生态、医学、测量等，数学知识基本上不超出微积分、微分方程、线性代数、概率、向量分析等大学基础数学的内容。教学方法讲究循序渐进、步步为营，数学推导详细，特别是在问题展开的过程中配备了相应的习题，让学生边阅读边练习。

本书的案例可以作为数学建模课程的辅助教材和自学材料，也为讲授、学习其他数学课程的教师和学生提供了将数学方法应用于实际问题的丰富的素材和课外读物。

Undergraduate Mathematics and Its Applications

COMAP, 姜启源等编译

Copyright © 1997 by the Consortium for Mathematics and Its Applications(COMAP).

All Rights reserved.

本书原版由数学及其应用联合会出版。版权所有，盗印必究。

Higher Education Press is authorized by the Consortium for Mathematics and Its Applications(COMAP) to publish and distribute exclusively this simplified Chinese edition. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only (excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan). Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. No part of this publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体字翻译版由数学及其应用联合会授权高等教育出版社独家出版发行。此版本仅限在中华人民共和国境内（但不允许在中国香港、澳门特别行政区及中国台湾地区）销售。未经授权的本书出口将被视为违反版权法的行为。未经出版者预先书面许可，不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

COMAP, Inc.

175 Middlesex Turnpike, Suite 3B, Bedford, MA 01730, USA

目 录

1	戴水肺潜水的数学建模 / <i>The Mathematics of Scuba Diving</i>	1
2	日辐射量 / <i>Insolation</i>	29
3	地质定年法 / <i>Geological Dating</i>	47
4	民主选举中的数学与公正性 / <i>Mathematics and Fairness in Democratic Elections</i>	67
5	交易卡片的收集 / <i>Collecting Trading Cards</i>	101
6	交通信号灯的调度 / <i>The Scheduling of Traffic Lights</i>	121
7	纸牌、编码和大袋鼠 / <i>Cards, codes, and kangaroos</i>	159
8	重力输水系统 / <i>Gravity - Fed Water Delivery Systems</i>	189
9	依赖于温度的螨虫捕食者—食饵模型 / <i>A Temperature-Dependent Model of a Mite Predator—Prey Interaction</i>	225
10	草地生态系统的抗灾能力 / <i>The Resilience of Grassland Ecosystems</i>	243
11	小型哺乳动物的扩散 / <i>Small Mammal Dispersion</i>	257
12	医用 X - 光学成像的数学 / <i>The Mathematics of Medical X - Ray Imaging</i>	273

1 戴水肺潜水的数学建模

The Mathematics of Scuba Diving

叶其孝 编译 谭永基 审校

摘要:

利用微分方程的指数解构建不同深度、不同持续时间的潜水减压时间表.

原作者:

D. R. Westbrook
Dept. of Mathematics and
Statistics, University of Calgary,
Calgary, Alberta, Canada
T2N1N4.

westbroo@acs.ucalgary.ca

发表期刊:

The UMAP Journal, 1997, 18(2):
115 - 143.

数学分支:

基础微积分

应用领域:

生理学

授课对象:

学习基础微积分的学生

预备知识:

与指数函数有关的微分和积分
知识

相关材料:

Unit 676: Compartment Models in
Biology, by Ron Barnes. The
UMAP Journal, 8 (2): 133 - 160.
重印于 UMAP Modules: Tools for
Teaching 1987, edited by Paul J.
Campbell. Arlington, MA;
COMAP, 1988. 207 - 234.

目 录:

1. 引言
2. 潜水简史
3. Haldane 模型
4. 微分方程的求解
5. 半压力差时间
6. 戴水肺而且无中间暂停的潜水
7. 有减压暂停的潜水
8. 反复潜水
9. 下潜和上潜期间的压力变化
10. 结束语
11. 习题解答

参考文献

网上更多…… [本文英文版](#)

1. 引言

你是戴水肺的潜水者^①吗?你能使用潜水表吗?你知道潜水表的数学基础是什么吗?你能构建你自己的潜水表吗?本教学单元之目的是描述潜水表的生理学基础以及计算中用到的数学.

2. 潜水简史

潜水是一种古老的消遣方式.潜水用来获利——采集海绵动物、贝壳和珍珠——以及潜水用于获得食品已经伴随我们一段时间了,而且人们很可能以潜水作为乐趣.希腊人曾把潜水员用于军事目的,这在今天仍然具有重要战略意义.

古代潜水基本上是自由(或屏气)潜水,虽然有报道说大约公元前330年亚历山大大帝使用了一种原始的潜水钟(内贮空气、底部有开口,用于深海潜水——编译者注).潜水钟本质上是一个用重物固定的将空气(或其他气体)保留在其内部的倒置容器,将其沉到一定深度,使得潜水员可以在需要时返回该深度取氧,或者借助一根软管将潜水员与容器相连.在潜水的进程中钟内的空气质量会变差,随着潜水的进展,人们发明了许多重新装满气体的方法.

^① 戴水肺潜水(戴水下呼吸器潜水)又称 SCUBA DIVING(SCUBA - 全名为“Self-Contained Underwater Breathing Apparatus(自携式水下呼吸器)”),指潜水员自行携带水下呼吸系统所进行的潜水活动,其中有开放式(open-circuit)呼吸系统及封闭式(closed-circuit)呼吸系统,原理都是利用调节器(Regulator)装置把气瓶中的压缩气体转化成可供人体正常呼吸压力的气体.开放式呼吸系统相对较简单,亦为现时较多人使用的器材,此种系统供应呼吸用气体(压缩空气)给潜水员呼吸使用.封闭式呼吸系统又称循环式呼吸器(rebreather),此系统提供呼吸循环,充分利用呼吸器里的氧气,延长潜水时间.对潜水员使用过的气体,系统会将其中的二氧化碳吸收,并重新注入适量氧气,再供应给潜水员.此类系统可提供压缩空气、高氧(Nitrox)或多种混合气体给潜水员使用.通过对不同的潜水时限和不同潜水深度供应不同气体的方法,可以预防潜水员病 Decompression Sickness(又称“减压病”)或氧毒症(Oxygen Toxicity).——编译者注

1691年, Sir Edmund Halley(埃德蒙·哈雷爵士,因为计算出哈雷彗星的公转轨道而成名——编者注)建造了可能是第一个实用的潜水钟,并获得专利,该潜水钟大约有 60 ft^3 (ft —英尺, $1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$)的容积. 空气从桶里补充进来,而不洁的空气则通过一个阀装置排出去(直径为 3.5 ft 、高为 6 ft 的直圆柱的体积 $\approx 56 \text{ ft}^3$). 为了能够从潜水钟的表面把新鲜空气泵入潜水钟而研制出成功的压力泵之前,已经过去了近100年. 这种技术后来发展成从表面供给空气的个人潜水服,然后又发展成为自携式水下呼吸器(SCUBA).

随着下潜更深而且时间更长,很明显会有各种各样的生理风险介入进来. 这样的一种风险就是减压病,或“弯曲病”,这是一种和长时间潜水或深潜后快速回到水面相关的疾病.

除潜水外,19世纪还见证了“沉箱”——配备气锁并处在高压下的巨大箱子——的出现,这就能够使在地下或水下工作的隧道挖掘机和桥梁建设者在水不会浸入沉箱的条件下工作. 人们很快就清楚了,为使在高压环境下工作数小时的工人在回到正常大气压力环境时免遭伤害甚至死亡的风险,需要一些特别的操作程序. 明显需要执行一系列小心谨慎的减压措施. 1854年,医生 B. Pol 和 T. J. J. Wattelle 在一份报告中指出,“危险不在于进入含有压缩空气的竖井,也不在于待在那里时间长点或短点,唯独减压是危险的” [Hills 1977].

这时减压的常规程序通常是线性的(即,以每分钟大气压的恒定速率减压),而且一般说是根据部分实验对象的许多痛苦和若干死亡的经验设计出来的. 在圣路易斯大桥约600名工人中,119人遭遇严重的神经系统减压病,而且导致14人死亡. “弯曲病”这个名称显然是缘于这些建桥工人由于关节疼痛所导致的走路步态. 这类似于那个时代时尚妇女的上身微向前屈的“希腊式弯曲”步行姿势,她们主动地以这种方式走路.

20世纪早期,军事需求导致各国海军对减压病的兴趣,更细致的研究也已开始. 1906年由生理学家 J. S. Haldane^①为皇家海军做的这方面的研究最具影响力. Haldane

^① John Burdon Sanderson Haldane(约翰·伯顿·桑德森·霍尔丹, 1892. 11. 05—1964. 12. 01) 英国遗传学家、进化生物学家、数学家,被认为是种群遗传学的奠基人之一. ——编者注

的潜水表(1908年)是非常有效的,几乎消除了潜水所冒风险的减压病,从而使用了一段时间. 随着越来越多的经验被获得,Haldane的表对于短时间潜水有些保守的问题变得明显了,于是作出了若干调整. 之后随着更长时间更大深度潜水的展开,人们发现这些潜水表对于长时间大深度的潜水反而保守得不够,从而做出了更加细化的改进. 更晚些时候出现了更进一步的细化潜水表,但是这些潜水表基本上仍然是在Haldane的原始想法的基础上改编而成的.

在下面几节中,我们将研究这些基本思路及其背后的数学. 构建合乎需要的万能潜水表,它要用到十分精细的数学方法,但是我们会以一种简化的形式运用这些思路来构建自己的潜水表.

不要把我们构造的潜水表用于任何潜水!
请使用你的潜水教练给你的潜水表.

3. Haldane 模型

当Haldane开始他的实验时,研究证实减压病的主要原因是空气中的惰性气体氮的气泡释放到各种组织和动脉血流中. 女潜水员在水下期间,她是在高压下呼吸空气的,结果是更多的氮气被压入她的血液中. 当她上浮时,她在较低压力下呼吸空气,从而溶解在她的血液中的氮形成了气泡(由于溶解在血液里的空气中的氧被代谢掉了,所以它不会引起问题). 当旋松汽水瓶的瓶盖时会看到这种效应. 当瓶盖旋松时处于压力下的液体中的气体突然减压,气泡迅速形成.

起初,人们认为会有一个压力下降的临界值,高于这个临界值才会生病;但是Haldane对山羊做的实验却得到了不同的结论(Haldane发现山羊对减压病的敏感度是可接受地接近于人类对减压病的敏感度). 他发现不管原来的压力是多少,如果压力下降小于一个固定的比例,减压病就不会发生. 也就是说,存在一个值 M ,压力 P_1 可以降低到 $P_2 = MP_1$ 时仍然不会发生“弯曲病”. Haldane提出了一个略小于 $1/2$ 的 M 值. 在我们的计算中将采用 $M = 1/2.15 \approx 0.465$.

这些实验的受试者被长时间暴露于较高的压力下,所以溶解的气体被提高到了饱和水平. 在潜水时,情况可能并非如此. 此外,对于在绝对压力高于两倍以上大气压下的长时间潜水而言,没有一次或几次的中间暂停,受试者不可能被带到一个大气压之下.(两个大气压的绝对压力的水深约为 $10\text{ m} \approx 33\text{ ft.}$)

为确定一个合适的暂停次数,需要了解气体是怎样溶解到身体组织中的以及怎样从身体组织中释放出来的模型. 首先,已知在肺部循环中的惰性气体之压力几乎瞬间等于肺中之压力,这就是环境外部压力. 因此,血液进入动脉系统的气体压力等于外部环境压力. 现在,必须建立一个气体在身体各种组织中的分布的数学模型.

简单的房室模型

模型假设

我们在这个教学单元中使用的简单模型是基于以下的假设:

- 血液以一个恒定的体积率 $v(\text{mL/s})$ 流过组织.
- 如果在血液和组织中的气体压力为 $p(t)$,那么血液中气体的浓度为 $s_1 p(t)$ g/mL, 组织中气体的浓度为 $s_2 p(t)$ g/mL,其中 s_1, s_2 为溶解度,都是常数,不过在不同组织中 s_2 的值不同.

这个模型是一个简单的房室模型(参见 Barnes [1987]). 气体以外部环境压力 p_e 进入肺部循环系统. 我们假定,当气体进入房室组织时血液中的气体压力为 p_e . 在组织和血液中的压力迅速与当地压力 $p(t)$ 趋同,而血液以压力 $p(t)$ 流出房室.

模型建立

气体的质量守恒定律成立,即在 $[t, t + \Delta t]$ 时间区间里:

房室内的质量增加 = 流进房室的质量增加 - 流出房室的质量增加.

房室中气体在任何时刻的质量为 $V_1 s_1 p(t) + V_2 s_2 p(t)$,其中 V_1 和 V_2 是以 mL 为单位测量的,它们分别代表在房室内血液和组织的体积. 于是,在 $[t, t + \Delta t]$ 时间区间里房室内的气体质量的增加为

$$V_1 s_1 p(t + \Delta t) + V_2 s_2 p(t + \Delta t) - V_1 s_1 p(t) - V_2 s_2 p(t)$$

气体以速率 vs_1p_e g/s 进入房室,并以速率 vs_1p g/s 离开房室.

流进房室的质量增加 - 流出房室的质量增加 = $(vs_1p_e - vs_1p(t)) \Delta t$

由质量守恒知

$$V_1s_1p(t + \Delta t) + V_2s_2p(t + \Delta t) - V_1s_1p(t) - V_2s_2p(t) = vs_1(p_e - p(t)) \Delta t$$

或
$$\frac{V_1s_1p(t + \Delta t) + V_2s_2p(t + \Delta t) - V_1s_1p(t) - V_2s_2p(t)}{\Delta t} = vs_1(p_e - p(t))$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 得到下面的微分方程模型

$$(V_1s_1 + V_2s_2) \frac{dp(t)}{dt} = vs_1(p_e - p(t)) \quad \text{或} \quad \frac{dp}{dt} = k(p_e - p)$$

其中 $k = \frac{vs_1}{V_1s_1 + V_2s_2}$ 为组织常数. 图 1 给出了该模型的简单图解.

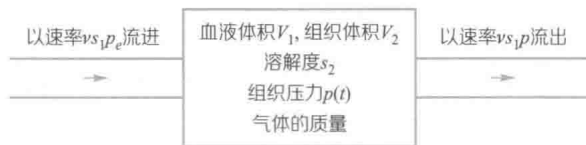


图 1 房室模型的图解

在 Haldane 所生活的年代,人们认为这个模型对于升压($p_e \geq p(t)$)和减压($p(t) \geq p_e$)都是合适的. 人们早就知道身体的不同组织要求 s_2 , V_1 , V_2 , v 的数值是不同的,而且同一血液并不流经所有的组织. Haldane 在设计他的潜水表时,考虑了微分方程中常数 k 的 5 种不同的值. 他的计算是基于微分方程的解和以下实验结果:可以通过在没有弯曲病来袭时的任何时刻的因子 M 的调整而降低外部的绝对压力.

在下面的模型求解中,为简单起见,我们假设空气全是氮气. 可以证明事实上这样的假设对结果并不造成大的区别(参见习题 6).

4. 微分方程的求解

可以求解微分方程

$$\frac{dp}{dt} = k(p_e - p) \quad (1)$$