新编高等院校公共基础课系列规划教材

高等数学

(第 3 版)

Gaodeng Shuxue

主编　林　益　毕重荣　涂　平

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

新编高等院校公共基础课系列规划教材

高等数学

G aodeng Shuxue

（第3版）

主 编 林 益 毕重荣 涂 平
副主编 张丹丹 李 锐 李春桃
参 编 吴 洁 邵 琨

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

内 容 简 介

本书是为理工类或经管类大专学生编写的基础课教材，内容包括函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分、无穷级数.

本书以“必需、够用”为度，注重“数学为人人”的理念，努力提高学生学习的兴趣，增强学生应用数学的能力.

对数学要求不高的理工类或经管类本科学生也可使用本书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/林益，毕重荣，涂平主编. —3 版. —武汉：华中科技大学出版社，2014.1
ISBN 978-7-5609-9846-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①林… ②毕… ③涂… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 017476 号

高等数学(第 3 版)　　林　益　毕重荣　涂平　主编

策划编辑：张　毅
责任编辑：史永霞
封面设计：龙文装帧
责任校对：李　琴
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编：430074　电话：(027)81321915
录　　排：华中科技大学惠友文印中心
印　　刷：华中理工大学印刷厂
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：19.75
字　　数：408 千字
版　　次：2008 年 9 月第 1 版　2011 年 7 月第 2 版　2014 年 9 月第 3 版第 1 次印刷
定　　价：36.50 元

前　　言

本书是为高等专科学校理工、经管类学生所编写的基础课教材，其内容包括函数与极限、导数及其应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分、无穷级数等。

高等数学是重要的基础课程，它不仅为后续的专业课程提供了必要的工具，同时也是专业技术人才素质教育的重要组成部分。结合大专教育的特点和要求，本书在内容取舍上不追求理论上的完整性和系统性，在取各家之长与精选的基础上，达到“必需、够用”的要求。编写时作者有意识地引导学生了解数学与社会的关系，注意从学生身边的各种社会、生活及科学的问题出发，展开数学理论和应用的学习。在教学观念上，本书不过分强求学生如何去更深刻地理解数学概念、原理及研究的过程，而是注重让学生体会数学的本质及数学的价值，让学生感受到“数学为人人”的思想。

全书语言流畅，内容深入浅出，通俗易懂，可读性强。特别是书中列举的应用问题新颖、趣味性强，亲近数学理论，能够激发学生的学习兴趣，提高学生应用数学的能力。

本书由林益、金丽宏、李志惠主编，吴洁、邵琨、涂平、张丹丹编。

由于作者水平有限，时间也紧迫，因此不可避免地会有不尽如人意之处，恳请有关专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

2008 年 5 月

目　　录

第1章　函数与极限

函数是微积分学研究的主要对象,极限方法是微积分学研究所采用的基本方法.本章将对函数与极限的概念、性质和运算进行较系统的学习.

1.1　函数的概念与性质

函数是变量与变量的一种对应关系.本书研究的变量均取值于实数,因此必须了解实数的一些性质及实数集的常见表示法.

1.1.1　实数

数是人类在争取生存、进行生产和交换中创造的一种特殊语言,是量的描述及其运算的手段.

实数是有理数与无理数的总称,它有以下性质.

(1) 实数对四则运算(即加、减、乘、除)是封闭的,即任意两个实数进行加、减、乘、除(除法要求分母不为零)运算后,其结果仍是实数.

(2) 有序性,即任意两个实数 a 与 b 都可以比较大小,满足且只满足下列关系之一:

$$a < b,\quad a = b,\quad a > b.$$

且大小关系具有传递性,即若 $a < b, b < c$,则 $a < c$.

(3) 稠密性,即任意两实数之间仍有实数.也就是说,有理数和无理数在实数集中是稠密的.

(4) 连续性,即实数与数轴上的点一一对应.

微积分学中经常需要比较两变量的大小,为此必须熟悉一些常见的不等式.

将实数 a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

它表示数轴上的点 a 到原点的距离.以下是两种常见的含绝对值的不等式.

三角不等式:设 a, b 为实数,则

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|.$$

利用数学归纳法可将它推广为

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数.

平均值不等式:设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是非负实数,则有

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

区间是今后常用的实数集.

设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,则:

(1) 满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的全体叫作以 a,b 为端点的开区间,记作 (a,b),即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

(2) 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体叫作以 a,b 为端点的闭区间,记作 $[a,b]$,即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

(3) 满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的全体叫作以 a,b 为端点的半开区间,记作 $[a,b)$ 或 $(a,b]$,即 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

以上三种区间称为有限区间,数 $b-a$ 称为它们的长度.从数轴上看,有限区间的长度为有限的线段(或不包括端点,或包括一个端点,或包括两个端点)(见图 1-1).

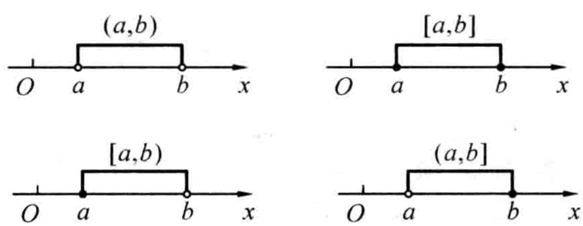

图 1-1

除上述有限区间外,还有无限区间.为了表示无限区间,首先引进记号 $+\infty$ 与 $-\infty$(不是数!),分别读作正无穷大与负无穷大.设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,则:

(1) 满足不等式 $a<x<+\infty$ 或 $-\infty<x<b$ 的实数 x 的全体记作 $(a,+\infty)$ 或 $(-\infty,b)$,称为无限的开区间,即 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;

(2) 满足不等式 $a\leqslant x<+\infty$ 或 $-\infty<x\leqslant b$ 的实数 x 的全体记作 $[a,+\infty)$ 或 $(-\infty,b]$,称为无限的半开区间,即 $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$.

$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(a,+\infty)$ 以及 $(-\infty,b)$ 在数轴上表现为长度为无限的半直线,如图 1-2 所示.

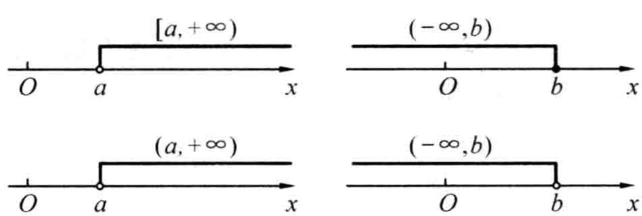

图 1-2

全体实数 **R** 记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限的开区间.

以 a 为中心的开区间$(a-\delta,a+\delta)(\delta>0)$ 称为 a 的邻域，δ 称为此邻域的半径(见图 1-3). 常将邻域$(a-\delta,a+\delta)$ 记作 $N(a,\delta)$ 或 $N(a)$. 在 $N(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后，称为 a 的去心邻域(见图 1-4)，记作 $N^{\circ}(a,\delta)$ 或 $N^{\circ}(a)$.

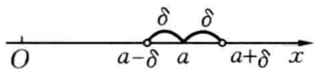

图 1-3

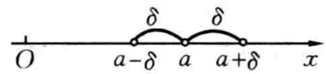

图 1-4

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$N(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 的距离，所以 $N(a,\delta)$ 表示与 a 的距离小于 δ 的实数 x 的全体.

类似地，$N^{\circ}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$，这里 $|x-a|>0$ 表示 $x\neq a$.

如果一个实数 x 在某个区间(a,b) 内，就用符号 $x\in(a,b)$ 表示，如 $2\in(0,3)$.

例 1　用区间表示 x 的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 6$；　(2) $x\geqslant 0$；　(3)$x^2<9$；　(4) $|x-3|\leqslant 4$.

解　(1) $(2,6]$；　(2) $[0,+\infty)$；　(3) $(-3,3)$；　(4) $[-1,7]$.

1.1.2　函数的定义

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会碰到各种各样的量. 在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量.

例如，对一个密闭容器中的气体加热时，容器中气体的体积和分子个数保持不变，是常量；而气体的温度和容器内的气压在不断变化，因而是变量.

又如，一个商场的面积是常量，而每天到商场购物的人数是变量.

在同一研究问题中，往往同时有几个变量变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 先看以下几个例子.

例 2　在物体做自由落体运动的过程中，物体的高度 h、运动速度 v、下落时间 t、下落距离 s 都是变量；下落开始时的初始高度 h_0 及加速度 g 是常量. 它们之间有以下关系：

$$s+h=h_0,\quad v=gt,\quad s=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 3　把一杯热的饮料放到冰箱里，饮料的温度随时间的变化而变化.

例 4　经济学家经常研究消费与收入之间的关系，一般的，消费随收入的变化而变化.

抛开上述例子各自的具体含义，其共同本质是变量之间相互依赖的关系. 当其中一个变量取定了一个数值时，按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的一个相应值. 函数的一般概念正是这样抽象出来的.

定义　设在某一问题中有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为 D. 如果 D 中每一个

值 x，按照某种对应法则 f，都有变量 y 的唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的一个函数，记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

称 x 为自变量，y 为因变量或函数. x 的变化范围 D 称为函数的定义域，y 的变化范围称为函数的值域，一般记为 W.

表示一个函数通常有以下三种方法.

1. 公式法

公式法就是用公式表示两变量之间的关系，公式法又称为解析法. 例如，$y = \sqrt{x}$，$y = \sin x$，$S = \pi r^2$ 等都是用公式表示的函数.

上面所列举的函数，都是用一个公式表示了一个函数. 但是有的函数用一个公式表示不出来，需要用两个或两个以上的公式表示，这样的函数叫分段函数. 例如：

绝对值函数 $$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

符号函数 $$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

在实际生活中，分段函数的例子也是常见的.

例 5 某路公共汽车的票价 y(单位:元) 与站数 x 间的函数关系是

$$y = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant 5; \\ 1.5, & 6 \leqslant x \leqslant 10; \\ 2, & 11 \leqslant x \leqslant 15; \\ 3, & x > 15. \end{cases}$$

也就是说，乘客乘车的站数不超过 5 站，只需购买 1 元的车票，乘车的站数超过 5 站但不超过 10 站，须购买 1.5 元的车票，等等.

例 6 从 2008 年 3 月 1 日起，个人工资、奖金所得按月应缴纳的个人所得税税款 y(单位:元) 与其工资、奖金所得 x(单位:元) 之间的关系是：

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 2\,000; \\ (x - 2\,000) \times 5\%, & 2\,000 < x \leqslant 2\,500; \\ 25 + (x - 2\,500) \times 10\%, & 2\,500 < x \leqslant 4\,000; \\ 25 + 150 + (x - 4\,000) \times 15\%, & 4\,000 < x \leqslant 7\,000; \\ 175 + 450 + (x - 7\,000) \times 20\%, & 7\,000 < x \leqslant 22\,000; \\ 625 + 3\,000 + (x - 22\,000) \times 25\%, & 22\,000 < x \leqslant 42\,000; \\ 3\,625 + 5\,000 + (x - 42\,000) \times 30\%, & 42\,000 < x \leqslant 62\,000; \\ 8\,625 + 6\,000 + (x - 62\,000) \times 35\%, & 62\,000 < x \leqslant 82\,000; \\ 14\,625 + 7\,000 + (x - 82\,000) \times 40\%, & 82\,000 < x \leqslant 102\,000; \\ 21\,625 + 8\,000 + (x - 102\,000) \times 45\%, & x > 102\,000. \end{cases}$$

也就是说，当 $x \leqslant 2\,000$ 时，不必纳税；当 $2\,000 < x \leqslant 2\,500$ 时，纳税部分是 $x - 2\,000$，税率为 5%；当 $2\,500 < x \leqslant 4\,000$ 时，其中 2 000 元不纳税，500 元应纳 5% 的税，即 500 元 $\times 5\% = 25$ 元，再多的部分，即 $x - 2\,500$，按 10% 纳税；等等.

对于分段函数要注意下面几点：

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集；

(3) 在处理问题时，对属于某一段的自变量就应用该段的表达式.

公式法的优点是准确、简单，便于进行理论研究.

2. 列表法

列表法就是将自变量的一系列值和与其对应的函数值列成一张表来表示函数. 例如中学数学用表中所列的立方根表、三角函数表等；在现实生活中，彩票的中奖号码是日期的函数，可以列表将两者对应起来，但是没有一个能使我们致富的抽彩中奖公式.

列表法的优点是便于应用.

3. 图像法

图像法就是在坐标系中用图形来表示函数 $y = f(x)$. 如股票价格的运行图(实际上，很难用公式表示股票价格与时间的关系).

用图形表示函数的优点是它的直观性，函数的变化趋势从图形上可以一目了然，便于对函数进行定性分析.

例 7　在统计学上饮食消费占日常支出的比例称为恩格尔系数，它反映了一个国家或地区的富裕程度，是国际通用的一项重要经济指标. 联合国根据恩格尔系数来划分一个国家国民的富裕程度：恩格尔系数小于 20 为绝对富裕；20 到 40 之间属比较富裕；40 到 50 之间算小康水平；50 到 60 之间则刚够温饱；60 以上则为贫困. 以 x 表示恩格尔系数，y 表示富裕程度，则国民富裕程度如图 1-5 所示.

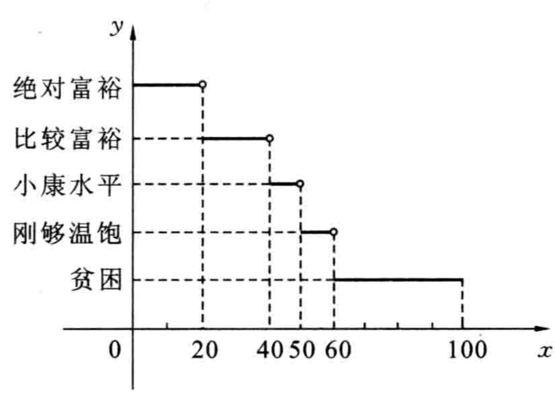

图 1-5

本书中函数的表示将以公式法为主，并尽可能地辅以图像说明.

一个函数主要是由对应法则和其定义域 D 所确定的，与其变量所选用的记号没有关系. 函数的定义域 D 可根据问题的实际意义来确定. 例如，在圆的面积 $S = \pi r^2$ 中，定义域 $D = \{r \mid r \geqslant 0\}$. 若考虑由某一公式表示的函数 $y = f(x)$，如果不特别声明，则认定其定义域为使 $f(x)$ 有意义的 x 的全体. 例如 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为$[-1,1]$. 通常求定义域

时应注意如下几点：

(1) 分母不能为零；

(2) 开偶次方时，被开方式的值非负；

(3) 对数式中的真数必须大于零，底数大于零且不等于 1，等等.

例 8 判断下述函数 $f(x)$，$g(x)$ 是否相等.

(1) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；(2) $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；

(3) $f(x)=2\lg x$，$g(x)=\lg x^2$；(4) $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$.

解 两函数相等的充分必要条件是定义域与对应法则完全一致.

(1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相等. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，定义域不同.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相等. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不同.

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相等. 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域不同.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同. 首先是定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，其次是对应法则相同，因为 $g(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=f(x)$.

1.1.3 函数的性质

研究函数的性质是为了了解函数所具有的特性，以便掌握它的变化规律.

1. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，即 $x\in(-a,a)$. 若函数满足

$$f(-x)=f(x),\quad \forall x\in(-a,a),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数；若函数满足

$$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in(-a,a),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数；$y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的（见图 1-6(a)）；奇函数的图形关于原点是对称的（见图 1-6(b)）.

需要注意的是，不能说函数 $f(x)$ 非奇即偶或非偶即奇. 如 $f(x)=x+1$ 既不是奇函数，也不是偶函数，因 $f(-1)=0$，$f(1)=2$，既无 $f(-1)=-f(1)$，也无 $f(-1)=f(1)$.