

数学分析原理

第一卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 陆秀丽 译

人民教育出版社

数 学 分 析 原 理

第一卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

吴 亲 仁 陆 秀 丽 译



人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的菲赫金哥尔茨 (Г. М. Фихтенгольц) 著“数学分析原理” (Основы математического анализа) 第一卷 1956 年版译出。

全书共二卷, 第一卷中译本分二分册出版。第一分册的内容是: 实数、单变量的函数、极限论、单变量的连续函数、单变量函数的微分法、微分学的基本定理、应用导数来研究函数、多元函数、多元函数的微分学共九章。

本书可作为综合大学和师范学院数学系的参考书。

简装本说明

目前 850×1168 毫米规格纸张较少, 本书暂以 787×1092 毫米规格纸张印刷, 定价相应减少 20%。希鉴谅。

数 学 分 析 原 理

第一卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 陆秀丽 译

人民教育出版社出版 (北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0316 开本 $787 \times 1092^{1/32}$ 印张 $9^{10/16}$

字数 227,000 印数 60,301—260,300 定价 (6) ¥0.76

1959 年 6 月第 1 版 1979 年 2 月北京第 10 次印刷

序 言

“数学分析原理”是作为大学数学系一二年級学生的分析教科书而編写的；因此也就把书分成两卷。在編写本书时，广泛地采用了我的三卷本“微积分学教程”的材料；但为了要使本书接近于正式的数学分析教学大綱与講課的实际可能性，我已把这三卷中包含的材料加以精簡与修改。

我給自己定下的任务是这样的：

1. 我認为在数学分析原理中主要的一个任务是要做到叙述上的系統性与在可能範圍內的严格性。为了使給予学生的知識有一定的系統，我認为对于教科书來說，材料的叙述有必要按照邏輯的順序。

虽然如此，但教本这样的編排仍然使講課者在个别的地方——从教授法着眼——有可能放弃严格的系統性（也許，甚至使他更容易获得这种可能）。例如，我自己在講課中通常把那种对于初学者困难的东西，如实数理論、收斂性原理或者連續函数的性質都稍稍拖后。

2. 同时，数学分析教程对于学生來說，不應該只是一連串的“定义”与“定理”，而應該是行动的指南。必須教会学生把这些定理应用到实际中去，帮助他们掌握分析的計算工具。虽然这个任务大部分是落到分析的习题課上，可是随着理論材料的叙述，我也按照需要采用了一些例題；例題为数虽不多，但却是为了培养学生能自覺地做习题而选择的。

3. 大家知道，数学分析無論在数学本身方面或在相近的知識領域方面有着何等奇妙的与多种多样的应用；学生以后将会时常

碰到它們。可是关于数学分析与其他数学部門，以及与实际需要相联系的这种思想，在研究分析原理时就应该为学生所通曉。正因为如此，所以一有可能，我就引进了分析在几何上、在力学上以及在物理上与工程上的应用的例題。

4. 关于把分析計算一直算到求出数字的結果的問題，在原則上与实用上有着同样的重要性。因为只有在最簡單的情况下，分析上的問題才有“准确的”解或“有限形状的”解，所以使学生熟悉近似方法的运用与学会作出近似公式都有其重要性。在本书中也注意到了这一点。

5. 关于叙述本身方面，我想作少許說明。首先要提到的是极限概念，它在分析的基本概念中占有主要的地位，并且以各种形式出現而貫串着全部教程。这种情况向我們提出了一項任务，那就是要建立各种形式的极限的統一概念。这不仅在原則上是重要的，而且在实际上也是必須的，为的是避免时常要从新建立极限的理論。要达到这个目的，有两条途徑：或者一开始就給出“有序变量”的最一般的极限定义（例如，跟着沙都諾夫斯基与摩尔-史密斯那样去做），或者把各种极限归結为最簡單的情形——在編号数列上变化着的变量的极限。第一种观点对初学者是不易了解的，所以我采用了第二种观点：每一种新形式的极限定义首先都用序列的极限給出，然后才用“ ε - δ 語言”給出。

6. 还要指出叙述上的一个細節：在第二卷中，讲到曲綫积分与曲面积分时，我提出了“第一型”的曲綫积分与曲面积分（恰好与沿无定向的区域的普通积分及二重积分相似）和“第二型”的这些积分（其中相似之处已經局部地失去了）之間的区别。根据多次的經驗，我深信这样的区分有助于更好的了解，并且也便于应用。

7. 在对教学大綱所作的为数不多的补充中，我把橢圓积分（这是在实际上常遇到的）簡要介紹到书內，并且有些时候提出了

一些恰好要引用橢圓積分的問題。使得那種由於解答一些簡單問題養成起來的有害錯覺——仿佛認為分析計算的一些結果一定是“初等式子”，從此消滅！

8. 在本書中各個地方，讀者可找到帶有數學史性質的說明。並且第一卷是以“數學分析基本觀念發展史概述”結尾的，而在第二卷末載出了“數學分析進一步發展的概述”。當然，這一切決不是用來代替學生以後在一般的“數學史”教程中所要熟悉的數學分析的历史。如果在上面提到的前一概述中涉及到概念本身的來源，那末帶有历史意義的說明就在於使讀者至少了解分析學历史中最重要的事件在年代上一般的次序。

我現在要把和剛才所說的密切有關的事直接告訴讀者——學生。那就是，書中敘述的次序是按照現代對於數學的嚴格性的要求安排的，這種要求是在長時間內形成起來的，因此，敘述的次序自然和數學分析在历史上的發展所經過的道路有所不同。如馬克思所說：“……正如一切科學的历史進程一樣，在摸到它們的真正出發點之前，總先走過許多彎路。科學不同於其他建築師，它不只畫出空中樓閣，而且在它打下地基之前，先造出房屋的各層。”^①

讀者一開始研究分析學時就會遇到與此類似的情況：本書第一章講述“實數”，第三章講述“極限論”，從第五章起才開始微分學與積分學的系統的敘述。

在历史上的次序恰恰是與此相反的：微分學與積分學起源於十七世紀，而在十八世紀發現了很多重要的應用，有了進一步的發展；在十九世紀初，極限論才成為數學分析的基础，至於用來論證最精密的極限論原理的實數理論，它的明晰概念一直到十九世紀後半期才建立起來。

① 馬克思“政治經濟學批判”中譯本，1955年人民出版社出版，第30頁。

这部书总结了我在列宁格勒大学教数学分析的多年經驗。希望它对苏联青年将会是有用的。

格·馬·費赫金哥尔茨

第一卷第一分册目录

序言	1
----	---

第一章 实数	1
--------	---

§ 1. 实数集合及其有序化	1
----------------	---

1. 前言	1
-------	---

2. 无理数定义	2
----------	---

3. 实数集合的有序化	5
-------------	---

4. 实数的无尽十进小数的表示法	7
------------------	---

5. 实数集合的連續性	9
-------------	---

6. 数集合的界	11
----------	----

§ 2. 实数的四则运算	14
--------------	----

7. 实数的和的定义及其性质	14
----------------	----

8. 对称数·绝对值	15
------------	----

9. 实数的积的定义及其性质	17
----------------	----

§ 3. 实数的其他性质及其应用	19
------------------	----

10. 根的存在性·具有有理指 数的乘幂	19
-------------------------	----

11. 具有任何实数的乘幂	20
---------------	----

12. 对数	22
--------	----

13. 线段的测量	23
-----------	----

第二章 单变量的函数	26
------------	----

§ 1. 函数概念	26
-----------	----

14. 变量	26
--------	----

15. 变量的变域	27
-----------	----

16. 变量間的函数关系·例题	28
-----------------	----

17. 函数概念的定义	29
-------------	----

18. 函数的解析表示法	32
--------------	----

19. 函数的图形	34
-----------	----

20. 以自然数为变元的函数	36
----------------	----

21. 历史的附注	38
-----------	----

§ 2. 几类最重要的函数	40
---------------	----

22. 初等函数	40
----------	----

23. 反函数的概念	43
------------	----

24. 反三角函数	45
-----------	----

25. 函数的造置·結束語	49
---------------	----

第三章 极限論	51
---------	----

§ 1. 函数的极限	51
------------	----

26. 历史的說明	51
-----------	----

27. 数的序列	51
----------	----

28. 序列的极限定义	53
-------------	----

29. 无穷小量	54
----------	----

30. 例	56
-------	----

31. 无穷大量	59
----------	----

32. 函数的极限定义	61
-------------	----

33. 函数的极限的另一定义	63
----------------	----

34. 例	65
-------	----

35. 单側极限	71
----------	----

§ 2. 关于极限的定理	72
--------------	----

36. 具有有限的极限的自然数 变元的函数的性质	72
-----------------------------	----

37. 推广到任意变量的函数情形	74
------------------	----

38. 在等式与不等式中取极限	76
-----------------	----

39. 关于无穷小量的预备定理	78
-----------------	----

40. 变量的算术运算	79
-------------	----

41. 未定式	81
---------	----

42. 推广到任意变量的函数情形	84
------------------	----

43. 例	85
-------	----

§ 3. 单調函数	89
-----------	----

44. 自然数变元的单調函数的 极限	89
-----------------------	----

45. 例	91
-------	----

46. 关于区間套的预备定理	93
----------------	----

47. 在一般情形下单調函数的	
-----------------	--

极限	94
§ 4. 数 e	96
48. 数 e 看作序列的极限	96
49. 数 e 的近似算法	98
50. 数 e 的基本公式 · 自然对数	100
§ 5. 收敛原理	102
51. 部分序列	102
52. 以自然数为变元的函数其有限的极限的存在条件	105
53. 任何变元的函数具有有限极限的存在条件	107
§ 6. 无穷小量与无穷大量的分类	108
54. 无穷小量的比较	108
55. 无穷小量的尺度	110
56. 等价的无穷小量	111
57. 无穷小量的主部的分离	113
58. 应用问题	114
59. 无穷大量的分类	115

第四章 單变量的連續函数 · 117

§ 1. 函数的連續性(与間断点)	117
60. 函数在一点处的連續性的定义	117
61. 單調函数的連續性的条件	119
62. 連續函数的算术运算	121
63. 初等函数的連續性	121
64. 連續函数的疊置	123
65. 几个极限的計算	124
66. 幂-指数表达式	126
67. 間断点的分类 · 例子	127
§ 2. 連續函数的性质	129
68. 关于函数取零值的定理	129
69. 应用于解方程	132
70. 关于中間值的定理	132
71. 反函数的存在性	134
72. 关于函数的有界性的定理	136

73. 函数的最大值与最小值	137
74. 一致連續性的概念	139
75. 关于一致連續性的定理	141

第五章 單变量函数的微分法 · 143

§ 1. 导数及其計算	143
76. 动点速度的計算問題	143
77. 作曲綫的切綫的問題	145
78. 导数的定义	147
79. 計算导数的例	151
80. 反函数的导数	154
81. 导数公式汇集	156
82. 函数增量的公式	157
83. 計算导数的几个最簡單法則	158
84. 复合函数的导数	160
85. 例	162
86. 单側导数	164
87. 无穷导数	165
88. 特殊情况的例子	166
§ 2. 微分	167
89. 微分的定义	167
90. 可微性与导数存在之間的关系	168
91. 微分的基本公式及法則	170
92. 微分形式的不变性	172
93. 微分作为近似公式的来源	173
94. 微分在估計誤差中的应用	174
§ 3. 高阶导数及高阶微分	176
95. 高阶导数的定义	176
96. 任意阶导数的普遍公式	178
97. 莱布尼茲公式	180
98. 高阶微分	182
99. 高阶微分形式不变性的破坏	183

第六章 微分学的基本定理 · 186

§ 1. 中值定理	186
100. 費馬定理	186

101. 罗尔定理	187
102. 有限增量定理	189
103. 导数的极限	191
104. 有限增量定理的推广	192
§ 2. 戴劳公式	193
105. 多项式的戴劳公式	193
106. 任意函数的展开式	195
107. 余项的其他形式	199
108. 已得的公式在初等函数 上的应用	202
109. 近似公式·例	204
第七章 应用导数来研究函 数	207

§ 1. 函数的变化过程的研究	207
110. 函数为常数的条件	207
111. 函数为单调的条件	208
112. 极大及极小·必要条件	210
113. 第一法则	211
114. 第二法则	214
115. 函数的作图	215
116. 例	216
117. 高阶导数的应用	219
§ 2. 函数的最大值及最小值	221
118. 最大值及最小值的求法	221
119. 问题	222
§ 3. 未定式的定值法	224
120. $\frac{0}{0}$ 型未定式	224
121. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	227
122. 其他类型的未定式	229

第八章 多元函数	232
§ 1. 基本概念	232
123. 变量之间的函数关系·例	232
124. 二元函数及其定义区域	233
125. m 维算术空间	236
126. m 维空间中的区域举例	239
127. 开区域及闭区域的一般	

定义	241
128. m 元函数	243
129. 多元函数的极限	244
130. 例	247
131. 累次极限	248
§ 2. 连续函数	251
132. 多元函数的连续性及间断	251
133. 连续函数的运算	253
134. 关于函数取零值的定理	254
135. 波尔察诺-维尔斯特拉斯 辅助定理	256
136. 关于函数有界性的定理	257
137. 一致连续性	258

第九章 多元函数的微分学

§ 1. 多元函数的导数与微分	261
138. 偏导数	261
139. 函数的全增量	262
140. 复合函数的导数	265
141. 例	267
142. 全微分	268
143. 一阶微分形式的不变性	270
144. 全微分在近似计算中的 应用	272
145. 齐次函数	274
§ 2. 高阶导数与高阶微分	277
146. 高阶导数	277
147. 关于混合导数的定理	278
148. 高阶微分	281
149. 复合函数的微分	283
150. 戴劳公式	285
§ 3. 极值、最大值与最小值	287
151. 多元函数的极值·必要 条件	287
152. 静止点的研究(二元函数 的情况)	288
153. 函数的最大值与最小值· 例子	292
154. 问题	294

第一章 实数

§ 1. 实数集合及其有序化

1. 前言 从中学教程中讀者已熟悉有理数及其性質。同时由于初等数学的需要,有理数域的擴張也就成为必要了。事实上,在有理数中甚至連正整数(自然数)往往都沒有根,如 $\sqrt{2}$ 就是一个例子,这就是說,没有一个其平方能等于2的有理分数 $\frac{p}{q}$ (p 与 q 是两个自然数)存在。

要証明这一点,我們用反証法:假定有这样的分数 $\frac{p}{q}$ 存在,使得 $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ 。我們可設这个分数是既約的,也就是說, p 与 q 无公因子。因为 $p^2 = 2q^2$,所以 p 是偶数: $p = 2r$ (r 是整数),因而, q 是奇数。用 p 的表达式来代替 p ,得 $q^2 = 2r^2$,由此推得 q 是偶数。所得到的这个矛盾就証明了我們的論断。

与此同时,假若我們所討論的只是含有理数的数域,那末在几何中显然就不是所有的綫段都能有长度。事实上,考虑边为单位长度的正方形。它的对角綫不能有有理长度 $\frac{p}{q}$,因为如若不然,则由毕达哥拉斯定理,这个长度的平方就应等于2,但我們已知这是不可能的。

在本章中我們的任务是要擴張有理数的数域,把具有新的性質的数——无理数加入到这領域中来。

在数学实践中含有根式表达式的无理数,事实上早在中世紀已开始出現,不过沒有把它看作是实在的数。十七世紀由笛卡儿^①所創立的坐标方

① 笛卡儿(1596—1650)是法国的著名哲学家与科学家。

法，又以新的方法提出了用数来表达几何量的問題。在这种影响下无理数与有理数同样是数的观念逐漸地成熟起来；这种观念在牛頓的“普遍算术”（1707）^①中所下的（正）数的定义里面有了透辟的叙述：

“我們所理解的数，与其說它是单位的集合，不如說它是任何一个量与另一个由我們取来作单位的同类量的抽象比”。

这时整数与分数表达和单位可通約的量，而无理数表达着和单位不可通約的量。

在十七世紀萌芽而在整个十八世紀蓬勃发展着的数学分析，长时期內滿足于这个定义，但是它是与算术格格不入的，并且仍然不能揭露出扩大了的数量域的最重要的性質——連續性（参考后面第5段）。在十八世紀末与十九世紀初数学方面兴起了批判的潮流，提出了数学分析的基本概念要有正确的定义以及它的基本命題要有严格的証明。这种要求也就很快地使得根据无理数的純粹的算术定义来建立在邏輯上沒有錯誤的无理数論变成了必要的事情。在十九世紀的七十年代里，有关这方面的理論已經建立了几种，它們在形式上各不相同而實質上是一样的。所有这些理論与有理数的各种无穷集合联系起来，定义了无理数。

2. 无理数定义 我們仿效狄台金^②来叙述无理数理論。这种理論的基础归于有理数域內的分割的概念。考虑把全部有理数的集合分成的两个非空的（即确实至少包含一个数的）集合 A, A' ；換句話說，我們假定

1° 每一个有理数在而且只在 A 与 A' 两个集合的一个中。

如果下面的条件也能滿足，我們就称这种分法为分割：

2° 集合 A 中每一数 a 小于集合 A' 中每一个数 a' 。

集合 A 叫做分割的下类，集合 A' 叫做上类。分割用 $A|A'$ 表示。

由分割的定义推知，凡小于下类中的数 a 的有理数，也属于下

① 有俄文譯本：“Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе”(АН СССР, 1948)；参考第8頁。

② 狄台金(Richard Dedekind)(1831—1916)是德国的数学家。

类。同样，凡大于上类中的数 a' 的有理数也属于上类。

例題 1) 把 A 定义为所有一切满足不等式 $a < 1$ 的有理数 a 的集合，而把使 $a' \geq 1$ 的全部有理数 a' 归入集合 A' 。

不难檢驗，这样一来我們就确实得到一个分割。数 1 属于 A' 类并且显然是其中最小的数。另一方面，在 A 类中沒有最大的数；因为，不論我們取 A 中怎样的数 a ，我們总可以在 a 与 1 之間指出一个有理数 a_1 ，因而， a_1 大于 a 而且也属于 A 类。

2) 把所有小于或等于 1 的有理数 $a \leq 1$ 归入下类 A ；所有大于 1 的有理数 $a' > 1$ 归入上类 A' 。

这也是一个分割，并且这时在上类中沒有最小的数，而在下类中有最大的数（就是 1）。

3) 把一切使 $a^2 < 2$ 者的正有理数 a ，零，以及一切負有理数都归入 A 类，而把一切使 $a'^2 > 2$ 者的正有理数 a' 归入 A' 类。

不难証实，我們又得到一个分割。这时在 A 类中既无最大的数，在 A' 类中也无最小的数。这两个論断中，我們可取第一个为例加以証明（第二个可同样地証明）。設 a 是 A 类中的任一正数（这时 $a^2 < 2$ ）。我們要指出，可以选得这样的正数 n ，使得

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

这就是說， $a + \frac{1}{n}$ 也要属于 A 类。

这一不等式与下面的不等式是等价的：

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2,$$

$$\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2.$$

如果 n 满足不等式 $\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$ ，則最后这个不等式成立；为此，只要取

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}.$$

由此可見，不論 a 是 A 类中怎样的一個正數，在 A 类中總找得到大於 a 的數；因為對於數 $a \leq 0$ 這個論斷是很明顯的，所以 A 类中任何數不能是其中最大的數。

不難了解，要在下类有最大的數 a_0 而同時在上类又有最小的數 a'_0 ，這樣的分割不能存在。事實上，假定有這樣的分割存在。我們就取介乎 a_0 與 a'_0 之間的任一有理數 c ， $a_0 < c < a'_0$ 。數 c 不能屬於 A 类，因為要不這樣，那 a_0 就會不是這類中的最大數；依同理 c 也不能屬於 A' 类。可是這與在分割概念的定義中所包含的分割的性質 1° 相矛盾。

由此可見，分割只能有由剛才的例題 1)、2)、3) 所說明的三個类型：

- 1) 在下类 A 中沒有最大的數，而在上类 A' 中有最小的數 r ；
- 2) 在下类 A 中有最大的數 r ，而在上类 A' 中沒有最小的數；
- 3) 既在下类中沒有最大的數，又在上类中沒有最小的數。

在前兩種情形下我們說，這分割由有理數 r 產生（ r 是 A 與 A' 兩类中間的界數），或者說，這分割定義了有理數 r 。在例題 1) 與 2) 中這樣的數 r 是 1。在第三種情形下界數不存在，分割不能定義任何有理數。我們現在引進新的對象——無理數，而規定說：任何屬於类型 3) 的分割定義了某一個無理數 α 。這個數 α 就代替着缺少的界數，好象我們把它插在 A 类所有的數 a 與 A' 类所有的數 a' 的中間一樣。在例題 3) 中這個新建立的數不難推想它就是 $\sqrt{2}$ 。

我們不再對於無理數引進統一的記號^①，而常把無理數 α 和定義它的有理數域的分割 $A|A'$ 聯繫起來。

① 這裡所指的是有限型的記號；在第 4 段中讀者會遇見一種無盡的記號。個別給定的無理數多半是依照它們的起源和作用來記的，如 $\sqrt{2}$ ， $\log 5$ ， $\sin 10^\circ$ 等等。

为了一致起见，对于有理数 r 也作同样的处理，这对我们常常是方便的。可是对于每一个有理数 r 存在着两个定义它的分割：在两种情形之下都是数 $a < r$ 归入下类，数 $a' > r$ 归入上类，而数 r 本身则可任意地或者归入下类（这时 r 是其中最大的数），或者归入上类（这时 r 是其中最小的数）。为了确定起见，我们规定：凡说到定义有理数 r 的分割时，总把这个数归入上类。

有理数与无理数统称为实数。实数的概念是数学分析的基本概念之一，一般地说，也是整个数学的一个基本概念。

3. 实数集合的有序化 由两个分割 $A|A'$ 与 $B|B'$ 分别所定义的两无理数 α 与 β ，在而且只在这两个分割相同时才算是相等；实际上只要 A 与 B 两个下类相同即可，因为这时 A' 与 B' 两个上类也相同。这个定义在 α 与 β 是有理数时也一样成立。换句话说，如果两个有理数 α 与 β 相等，则定义它们的两个分割相同，反之，从这两个分割的相同即可推出数 α 与 β 的相等。在这情况应该考虑到上面对于有理数所加上的条件。

我们现在来建立关于实数的“大于”的概念。对于有理数来说这个概念已从中学课本中知道了。对于有理数 r 与无理数 α 来说，“大于”的概念实际上已在第 2 段中建立了：就是说，如果 α 是由分割 $A|A'$ 定义的，我们就算作 α 大于所有属于 A 类的数，而同时所有 A' 类的数都大于 α 。

现在设有两个无理数 α 与 β ，并且 α 由分割 $A|A'$ 确定，而 β 由分割 $B|B'$ 确定。我们把具有较大的下类的那个数算作是较大的。确切地说，我们算作 $\alpha > \beta$ ，只要 A 类完全包含 B 类且不与 B 类相同（这个条件显然和 B' 类完全包含 A' 类且不与 A' 类相同的条件是等价的）。不难验证，这个定义在 α 与 β 两数中有一个为有理数时甚至两个都是有理数时也一样能成立。

“小于”的概念就可当作派生的概念引出来。就是说，在而且

只在 $\beta > \alpha$ 的情形下我們說 $\alpha < \beta$ 。

由我們的定義可以推到：

在任何两个实数 α 与 β 之間必有而且只有下列三种关系之一：

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \alpha < \beta.$$

其次，

从 $\alpha > \beta, \beta > \gamma$ 推得 $\alpha > \gamma$ 。

显然也可

从 $\alpha < \beta, \beta < \gamma$ 推得 $\alpha < \gamma$ 。

最后，我們要建立两个在以后的叙述上常常有用的補助定理。

補助定理1. 不論 α 与 β 是两个怎样的实数，若 $\alpha > \beta$ ，总可找到这样的一个实数——甚至是有理数—— r ，使得 r 介在 α 与 β 之間： $\alpha > r > \beta$ （因而也有无穷多个这样的有理数）。

因为 $\alpha > \beta$ ，所以定义着数 α 的分割的下类 A 完全包含了对于数 β 的下类 B ，并且不与 B 相同。所以在 A 中可找到这样的有理数 r ，它不包含在 B 中，因而，它属于 B' ；对于 r 有

$$\alpha > r \geq \beta$$

（等号只在 β 是有理数时才能成立）。但因在 A 中沒有最大的数，所以在必要时加大 r 可以取消等号。

補助定理2. 設 α 与 β 是两个給定的实数。如果不論取怎样的有理数 $\epsilon > 0$ ，总能使数 α 与 β 夹在同样两个有理数的中間：

$$s' \geq \alpha \geq s, \quad s' \geq \beta \geq s,$$

其中

$$s' - s < \epsilon,$$

則数 α 与 β 必定相等。

我們用归謬法証明。例如，假定 $\alpha > \beta$ 。由補助定理1，在 α 与 β 之間可以插入两个有理数 r 与 $r' > r$ ：

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

于是对于任何两个数 s 与 s' ，只要在它們的中間包含有 α 与 β ，則下面的不等式显然成立：

$$s' > r' > r > s \text{ 或者 } s' - s > r' - r > 0.$$

由此可見，差数 $s' - s$ 不符合補助定理中的条件，譬如說，不能使得它小于数 $e = r' - r$ 。这个矛盾就証明了補助定理。

4. 实数的无尽十进小数的表示法 我們考虑实数的这样一种表示法，使分数部分(尾数)是正的，可是整数部分可正可負，也可为零。

我們首先假定，所考虑的实数 α 既不是整数，也不是任何有限十进小数。現在来求它的十进小数近似值。如果它是由分割 $A|A'$ 所定义的数，那末首先就易看出，在 A 类中可找到一整数 M ，而在 A' 类中可找到一整数 $N > M$ 。将 M 逐次加以 1，我們一定可得到这样的两个相邻的整数 C 与 $C+1$ ，使得

$$C < \alpha < C+1.$$

这里的 C 可以是正的、負的或者是零。

其次，如果把 C 与 $C+1$ 之間的区間用数

$$C.1; C.2; \dots; C.9$$

分成十个相等的部分，則 α 落在其中一个(且只一个)部分內，于是我們得到两个相差 $\frac{1}{10}$ 的有理数，即 $C.c_1$ 与 $C.c_1 + \frac{1}{10}$ ，使得

$$C.c_1 < \alpha < C.c_1 + \frac{1}{10}.$$

繼續进行这个方法，在确定了 $n-1$ 个数字 $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ 以后，我們用不等式

$$C.c_1c_2\dots c_n < \alpha < C.c_1c_2\dots c_n + \frac{1}{10^n} \quad (1)$$

来确定第 n 个数字 c_n 。

于是在求数 α 的十进小数近似值的过程中，我們作出了整数 C 与一无穷序列的数字 $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ 。由这些数字作成的无尽