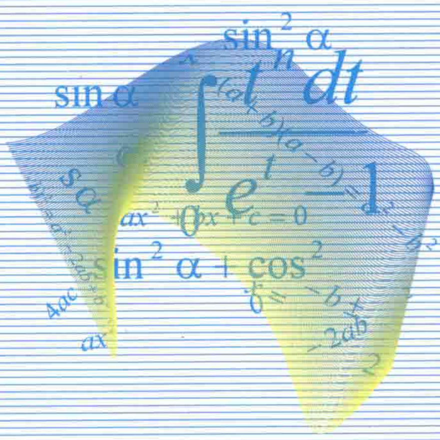
21世纪高等学校规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

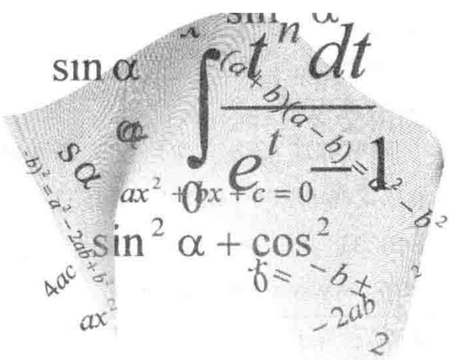
陈远强　编著



西南交通大学出版社

高等数学

陈远强　编著



西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 陈远强编著. —成都：西南交通大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5643-3915-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 105817 号

高 等 数 学

陈远强 编著

责任编辑	刘娉婷
封面设计	原谋书装
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://www.xnjdcbs.com
印刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印张	17.5
字数	434 千
版次	2015 年 8 月第 1 版
印次	2015 年 8 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-3915-9
定价	39.00 元

前　言

本书共分七章，内容包括变量与函数、一元函数的极限与连续性、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分，以及多元函数的微积分等.

本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》,结合分层次教学和实际工作的需要,充分注重逻辑思维的规律性，突出重点，循序渐进，在保证数学学科的严密性与简洁性的前提下，尽可能做到易教和易学.

本书的编写渗透了大量数学建模的思想和方法，通过对一些实际问题的提出、分析、求解和总结概括，提出微积分的相关概念、基本理论和基本方法. 尽可能将所涉及的理论从现时的“冰冷的美丽”还原到原始时的“火热的思考”. 力图使读者通过本书的学习，领悟数学的思想、数学的思维、数学的观点和数学的方法以及数学的精神实质.

本书的编写参考了许多教材、资料和文献，在此表示感谢.

本书可作为普通高等院校理工科非数学类专业（如统计学、金融学和管理学等）学生的教学用书或教学参考书.

由于编者水平有限，书中一定存在不妥之处，诚恳期望广大读者批评指正.

编　者

2015 年 2 月 17 日于花溪

目　录

第一章　变量与函数

建立在变量之间的函数关系是高等数学的主要研究对象，也是现代数学的基本概念之一．早在 17 世纪初，科学家从天文、航海等问题的研究中首先引出了函数这一基本概念．它在之后的 200 多年里，占据了几乎所有的科学研究的中心位置．本章将介绍函数的概念、表示方法、性质和几个重要的函数类以及初等函数等内容，这既是对过去所学知识的复习，同时也是对相关知识的提升和加强．

第一节　集合与数集

一、集　合

1．集合的概念

19 世纪 70 年代，德国数学家康托对集合论做了大量的工作，奠定了集合论的基础，后经过大批数学家近半个世纪的努力，集合论才被系统地建立起来，从而成为现代数学理论体系的基础．

一般地，由具有某种特征的全体对象构成的总体就称为集合，记为 A 、B 、α 、β 等．一个集合中的任何一个对象都称为该集合的一个元素，一般用 a 、b 、x 等表示．根据集合中所含元素的多少可以将集合分为有限集和无限集．无限集还可以划分为可数无限集和不可数无限集．一个对象与一个集合的关系是属于（记作 $\in$ ）或不属于（记作 $\notin$ ）的关系，且二者必居其一．集合中的元素具有确定性、无序性、互异性．特别地，将不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$ ．要注意符号 $\varnothing$ ，$\{\varnothing\}$ ，$\{0\}$ 和 0 的区别．

2．集合的表示方法

（1）列举法：将集合中的所有元素一一罗列出来的方法．其一般形式为

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ ，其中 a_i 都是集合 A 的元素．

（2）描述法：将集合中元素所具有的某种共同特征表述出来的方法．其一般形式为

$A=\{x|x\text{所具有的某种共同特征}\}$．

（3）图像法：用平面上的一个区域来表示一个集合的方法，其一般形式见图 1-1 所示．

图 1-1　集合的图像法表示

3．集合之间的关系

（1）包含关系：给定集合 A 与 B ，若 A 的任何一个元素均是 B 的元素，则称 B 包含 A 或 A 包含于 B ，记作 $A\subseteq B$ ，此时也称 A 是 B 的子集，见图 1-2 所示．

（2）真包含关系：给定集合 A 与 B ，若 A 的任何一个元素均是 B 的元素，但 B 中至少有

一个元素 x 不属于 A，则称 B 真包含 A 或 A 真包含于 B，记作 $A \subset B$，此时也称 A 是 B 的一个真子集，见图 1-3 所示.

图 1-2　A 是 B 的子集

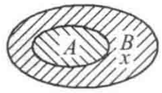


图 1-3　A 是 B 的真子集

（3）相等关系：给定集合 A 与 B，若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

规定 $\varnothing$ 是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集. 集合之间的这三种关系（包含、真包含、相等）都具有传递性. 可以证明，若 A 是含有 n 个元素的有限集，则 A 有 2^n 个子集，有 $2^n - 1$ 个真子集，有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

4. 集合之间的运算

（1）并集：给定集合 A 与 B，则由 A 和 B 的所有元素所构成的一个集合称为 A 与 B 的并集（见图 1-4 所示），记作

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}. \tag{1.1}$$

（2）交集：给定集合 A 与 B，则由 A 和 B 的公共元素所构成的集合称为 A 与 B 的交集（见图 1-5 所示），记作

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}. \tag{1.2}$$

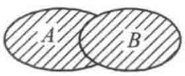


图 1-4　A 与 B 的并集

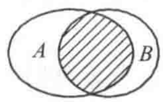


图 1-5　A 与 B 的交集

（3）差集：给定集合 A 与 B，则由属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的差集（见图 1-6 所示），记作

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}. \tag{1.3}$$

（4）补集：给定集合 A 与 B，且 $A \subseteq B$，则 $B - A$ 称为 A 相对于 B 的补集或者余集（见图 1-7 所示），记作

$$\complement_B A = \overline{A} = \{x \mid x \in B \text{且} x \notin A\}. \tag{1.4}$$

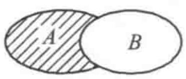


图 1-6　A 与 B 的差集

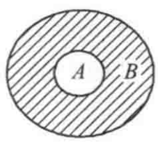


图 1-7　A 相对于 B 的补集

注意 $(A - B) \cup B = A \cup B$，但 $(A - B) \cup B = A$ 不一定成立.

例 1　设 $A = \{x \mid 2 \leqslant x < 7, x \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid 1 < x \leqslant 6, x \in \mathbf{R}\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$，$A - B$ 以及 $\complement_B (A \cap B)$.

解　　$A\cup B=\{x|1<x<7,x\in\mathbf{R}\}$，$A\cap B=\{x|2\leqslant x\leqslant 6,x\in\mathbf{R}\}$，

$A-B=\{x|6\leqslant x<7,x\in\mathbf{R}\}$，$\complement_B(A\cap B)=\{x|1<x<2,x\in\mathbf{R}\}$.

5. 集合的运算律

给定集合 A、B 和 C，则

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律：$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）德摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、数　集

1. 数域（集）的组织结构图与性质（见图 1-8）

- 复数域（$\boldsymbol{C}$）
  - 实数域（$\boldsymbol{R}$）
    - 有理数域（$\boldsymbol{Q}$）
      - 有限小数
      - 无限循环小数
    - 无理数集：无限不循环小数
  - 虚数集

图 1-8　数集的组织结构图

通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集. $+\infty$、$-\infty$ 均不是实数，它们只表示实数大小的变化趋势.

实数集有如下的一些基本性质.

性质 1　若 $x\in\mathbf{Q}^+$，则存在 $p,q\in\mathbf{Z}$，且 p,q 互质（它们的最大公因数为 1），使得

$$x=\frac{q}{p}\quad(p\neq 0).\tag{1.5}$$

性质 2　在实数集中，无理数的个数要比有理数的个数多得多.

性质 3　实数集具有稠密性，即任何两个实数之间必然存在第三个实数.

性质 4　实数集对于加法、减法、乘法和除法运算具有封闭性，即任何两个实数的和、差、积与商仍是实数.

性质 5　任何两个实数均可以比较大小，其大小关系必是“$a>b$”，“$a<b$”和“$a=b$”中之一.

性质 6　阿基米德定理：设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a>>b>0$，则一定存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $nb\geqslant a$.

2. 数　轴

规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴. 实数集中的实数与数轴上的点是一一对应的关系. 数轴是代数问题几何化的基本工具.

3. 区　间

由数轴上连续不断的一段区域内的点所对应的全体实数所构成的数集称为区间．根据区间的长度，可分为有限区间和无限区间．

（1）有限区间：

① 开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$；

② 闭区间：$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$；

③ 半开半闭区间：$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$；$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$．

（2）无限区间：

① $(-\infty,a)=\{x|x<a,x\in\mathbf{R}\}$；$(a,+\infty)=\{x|x>a,x\in\mathbf{R}\}$；

② $(-\infty,a]=\{x|x\leqslant a,x\in\mathbf{R}\}$；$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\}$．

4. 邻　域

在高等数学中，函数的有些性质不一定在某一个区间上成立．因此，经常需要讨论函数在某一点附近的局部性质，这就需要邻域这个概念．

（1）点 x 的 δ 实心邻域：以数轴上的点 x 为中心，δ 为半径的区域，记作

$$U(x,\delta)=(x-\delta,x+\delta)．\qquad(1.6)$$

（2）点 x 的 δ 空心邻域：以数轴上的点 x 为中心，δ 为半径，且不包含点 x 的区域，记作

$$U^{\circ}(x,\delta)=(x-\delta,x)\cup(x,x+\delta)，\qquad(1.7)$$

其中，点 x 的 δ 左邻域为 $U^{\circ}(x,\delta^-)=(x-\delta,x)$，点 x 的 δ 右邻域为 $U^{\circ}(x,\delta^+)=(x,x+\delta)$．

例 2　用区间表示 $U(-1,1)$，$U^{\circ}(-1,1)$，$U^{\circ}(0,2^+)$ 和 $U^{\circ}(0,2^-)$．

解
$$U(-1,1)=(-2,0)，\quad U^{\circ}(-1,1)=(-2,-1)\cup(-1,0)，$$
$$U^{\circ}(0,2^+)=(0,2)，\quad U^{\circ}(0,2^-)=(-2,0)．$$

第二节　函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 映　射

定义 1.1　给定两个非空集合 A 和 B，以及 A 到 B 的一个对应法则 f．若对于任意的 $x\in A$，恒存在唯一 $y\in B$，使得 $f：x\to y$，则称 f 是从 A 到 B 的一个映射，记作 $f：A\to B$．其中 A、B 分别称为原像集与像集，y 称为 x 的像，x 称为 y 的原像．

为了理解映射的定义，需要注意如下三点：

① 若 f 是 A 到 B 的一个映射，则 A 中任何一个元素均有唯一的像，即不会出现某个元素无像或某个元素有两个及以上的像．

② 若 f 是 A 到 B 的一个映射，则 B 中的任何一个元素不一定均有原像，且有原像时，其原像也不一定唯一．

③ 映射允许“多对一”，但不允许“一对多”.

下面再介绍三个重要的映射.

（1）单射：设 f 是 A 到 B 的一个映射，若对于任意的 $x_1, x_2 \in A$，且 $x_1 \neq x_2$，恒有 $y_1 \neq y_2$（其中 $f: x_1 \to y_1$，$f: x_2 \to y_2$），则称 f 为 A 到 B 的一个单射.

（2）满射：设 f 是 A 到 B 的一个映射，若对于任意的 $y \in B$，恒有 $x \in A$，使得 $f: x \to y$，则称 f 是一个满射.

（3）一一映射：设 f 是 A 到 B 的一个映射，若对任意的 $y \in B$，恒存在唯一的 $x \in A$，使得 $f: x \to y$，则称 f 是 A 到 B 的一个一一映射.

定理 1.1　f 为一一映射的充要条件是 f 既是单射，也是满射.

2. 函　数

定义 1.2　称实数集 A 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 f 为定义在 A 上的一个函数，记作 $y = f(x), x \in A$. 其中 x 与 y 分别称为自变量和因变量，y 也称为 x 的函数值. A 称为该函数的定义域，记作 $A = D_f$.

在这里，我们需要注意如下几点：

① 因为值域 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$，所以函数的定义域和对应法则完全确定其值域，即一个函数关系完全由其定义域和对应法则确定.

② 函数的表现形式具有多样性，即同一个函数可能有多种表达形式，但这些函数的定义域和对应法则均分别相等.

例 3　判断 $f(x) = \sqrt{x^6}$ 和 $g(x) = |x|^3$ 是否相同.

解　因为 $D_f = \mathbf{R}$，$D_g = \mathbf{R}$，且

$$f(x) = \sqrt{x^6} = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases} = \left|x^3\right| = |x|^3,$$

所以 $f(x) = g(x)$.

③ 不考虑实际背景，由所有使得函数关系成立的自变量所构成的集合称为该函数的自然定义域.

例 4　求 $y = \dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$ 的自然定义域.

解　因为要使得此函数有意义，x 必须满足

$$\begin{cases} 3 - x > 0, \\ |x| - 1 > 0, \end{cases}$$

即得 $x < -1$，所以 $y = \dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$ 的自然定义域为 $D_f = (-\infty, -1)$.

④ 称坐标平面上的点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 的轨迹为函数 $y = f(x), x \in D_f$ 的图像.

⑤ 一般函数 $y = f(x), x \in D_f$ 的图像为坐标平面上的一条曲线，此曲线具有一个基本特征：

在定义域内，用平行于 y 轴的直线去截它，有且只有一个交点. 例如图 1-9 中的曲线就不是某一个函数的图像.

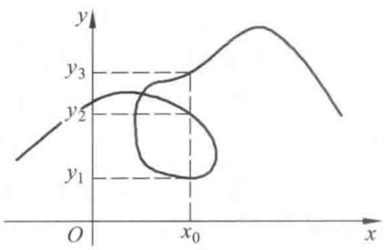


图 1-9 非函数关系的曲线

⑥ 一个函数的图像的形状既与函数本身有关，也与所选取的坐标平面有关.

⑦ 分段函数是一个函数关系，并不是多个函数关系，只是在整个定义域上分段对函数关系进行表达而已.

例 5 火车站行李收费规定如下：当行李不超过 50 公斤时，按每公斤 0.15 元收费；当超过 50 公斤时，超重部分按每公斤 0.25 元收费，求行李的收费与行李重量之间的函数关系.

解 设 x（公斤）表示行李的重量，y（元）表示行李的收费.

因为当 $0 \leqslant x \leqslant 50$ 时，$y = 0.15x$；当 $x > 50$ 时，$y = 0.15 \times 50 + 0.25(x-50) = 0.25x - 5$. 所以，行李的收费与行李重量之间的函数关系可以表示成如下的分段函数：

$$y = \begin{cases} 0.15x, 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0.25x - 5, x > 50 \end{cases}.$$

一个函数关系的表示通常有如下几种方法.

（1）解析式法：用自变量 x 与因变量 y 的一个数学表达式来表示函数的方法. 其一般形式为

$$F(x, y) = 0, x \in D_f. \tag{1.8}$$

若某一个函数关系中的因变量 y 不能独立的用自变量 x 进行表示，则称此函数是一个隐函数，其一般形式为 $F(x, y) = 0, x \in D_f$. 例如 $\ln y = \cos(x+y)$ 就是一个隐函数. 否则称此函数为显函数，显函数的一般形式为 $y = f(x), x \in D_f$. 例如 $y = x^2 + \cos x$ 就是一个显函数. 隐函数虽然可以用以 x 和 y 为变量的一个方程来表示，但不是任何一个以 x 和 y 为变量的方程均表示某一个隐函数，即隐函数的存在是有条件的.

（2）表格法：用一个表格将自变量 x 在若干个取值处的函数值一一罗列出来的方法，其一般形式如表 1-1 所示.

表 1-1 函数的表格法表示

x	a_1	a_2	$\cdots$	a_k
$f(x)$	b_1	b_2	$\cdots$	b_k

（3）图像法：用坐标平面上的一条曲线来表示一个函数关系的方法.

在初等数学中，所涉及的函数关系多数是用解析式给出的，但这并不能说明解析式法是表示一个函数关系的主要方法. 在现实实践中，绝大部分函数关系都无法用解析式写出来，只能用表格法或图像法来表示. 例如，某一个地方的气温会随时间的变化而变化，显然气温是时间的一个函数关系，但这个函数关系是无法用解析式来进行表示的.

二、函数的性质

在高中阶段，我们已经学习过函数的如下几个性质，但在高等数学中，除了继续研究函

数的这些性质外，我们将会讨论函数的其他性质.

1. 奇偶性

给定函数 $y=f(x), x\in D_f$，对于任意的 $x\in D_f$，

（1）若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；

（2）若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

由此可见，一个函数是奇或偶函数的前提条件是该函数的定义域关于原点对称，否则该函数一定非奇非偶. 而且偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

很容易证明如下的结论.

定理 1.2　设 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，令

$$F(x)=\frac{1}{2}\big(f(x)+f(-x)\big),\quad G(x)=\frac{1}{2}\big(f(x)-f(-x)\big),\quad x\in D_f, \tag{1.9}$$

则称 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别为偶函数和奇函数，且 $f(x)=F(x)+G(x)$.

2. 单调性

设函数 $y=f(x), x\in D_f$，对于任意的 $x_1,x_2\in I\subseteq D_f$，且 $x_1<x_2$，

（1）若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上单调递增，此时称 I 为 $y=f(x)$ 的单调递增区间，简记为 $f_I\uparrow$；

（2）若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上单调递减，此时称 I 为 $y=f(x)$ 的单调递减区间，简记为 $f_I\downarrow$.

若 $y=f(x)$ 在 I 上单调递增，则 $y=f(x)$ 的图像在 I 上是上升的；若 $y=f(x)$ 在 I 上单调递减，则 $y=f(x)$ 在 I 上的图像是下降的.

作差法和作商法是判断函数单调性的两种基本方法，但在实际使用中，有时候比较繁琐. 需要注意的是，单调递增（减）区间的并集不一定仍是单调递增（减）区间. 如图 1-10 所示，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上都单调递增，但由于 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $[a,b]\cup[c,d]$ 不是 $f(x)$ 的单调递增区间.

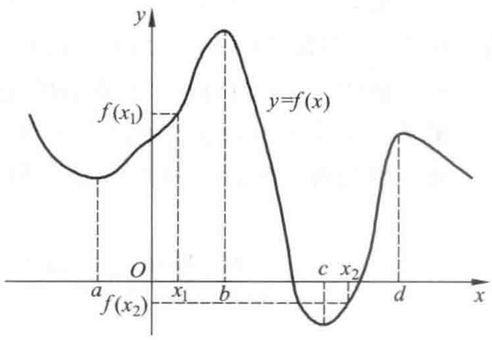


图 1-10　单调区间的图示

例 6　判断 $y=x(1-x)$ 的奇偶性，并求其单调区间.

解　因为 $D_f=\mathbf{R}$，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有

$$f(-x)=(-x)[1-(-x)]=-x(1+x)\neq\pm f(x),$$

所以 $y=x(1-x)$ 是非奇非偶函数.

因为

$$y=x(1-x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4},$$

故当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$y=x(1-x)$ 单调递增；当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$y=x(1-x)$ 单调递减. 因此 $y=x(1-x)$ 的单

调递增区间为$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$，其单调递减区间为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

3. **周期性**

设函数 $y=f(x)$，若存在 $T\in\mathbf{R}$，对任意的 $x\in D_f$，恒有

$$f(x+T)=f(x)\,, \tag{1.10}$$

则称 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的函数，T 称为其周期.

由于以 T 为周期的函数的图像每间隔 $|T|$ 个单位就会重复出现一次. 因此，在以 $|T|$ 为长度的任何一个区间内均包含了该函数的所有基本特征，即只需研究函数在一个周期内的性质就可以得到该函数的所有性质. 另外，若 T 是 $y=f(x)$ 的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z})$ 也是 $y=f(x)$ 的周期，即一个周期函数有无数个周期. 在一个周期函数的所有周期中，最小的正数周期称为最小正周期，并不是所有周期函数都有最小正周期，例如 $y=f(x)=2,x\in\mathbf{R}$ 是以任何实数为周期的函数，但是没有最小正周期.

4. **有界性**

设函数 $y=f(x),x\in D_f$，若存在 $M>0$，对任意的 $x\in I\subseteq D_f$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M\,, \tag{1.11}$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上有界.

类似地，若存在 M_1，对任意的 $x\in I\subseteq D_f$，恒有 $f(x)\leqslant M_1$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上有上界；若存在 M_2，对任意的 $x\in I\subseteq D_f$，恒有 $f(x)\geqslant M_2$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上有下界.

可以证明，$y=f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在 I 上既有上界，也有下界.

例 7 证明 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

证 因为对于任意大的正数 M，恒存在正整数 k，使得

$$f\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\frac{\pi}{2}>M\,,$$

因此 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界的.

第三节　函数之间的运算与关系

一、函数之间的运算

1. **四则运算**

设函数 $y=f(x),y=g(x)$ 的定义域分别为 D_f 和 D_g，若 $D_f\cap D_g\neq\varnothing$，则可以定义这两个函数的如下运算：

（1）和（差）：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D_f\cap D_g$；

（2）积：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D_f\cap D_g$；

（3）商：$(f/g)(x)=f(x)/g(x), x\in D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0, x\in D_g\}$.

2. 逆运算

设函数 $y=f(x), x\in D_f$，若对于任意的 $y\in R_f$，恒存在唯一的 $x\in D_f$，使得 y 对应于 x，则从 R_f 到 D_f 建立了一个新的函数关系，称其为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y), y\in R_f$. 但根据习惯，记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x), x\in R_f$.

从反函数的定义，可以得到 $y=f(x)$ 具有反函数的充要条件是此映射是一个一一映射. 由于一个函数与其反函数的定义域和值域是互换的，故 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在直角坐标平面 Oxy 上是相同的，$y=f(x)$ 与其习惯记法的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像在直角坐标平面 Oxy 上是关于 $y=x$ 直线对称的.

下面给出求 $y=f(x)$ 反函数的步骤：

（1）判断 $y=f(x)$ 是否为一个一一映射；

（2）从等式 $y=f(x)$ 中将 x 求出，得 $x=\varphi(y)$；

（3）写出 $y=f(x)$ 习惯记法的反函数 $y=\varphi(x)$，并求出其定义域.

例 8 求 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，得

$$x=\log_2\frac{y}{1-y},$$

所以 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}, x\in(0,1)$.

3. 复合运算

设已知函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成了一个新的函数，称此函数为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，简记作 $f\circ\varphi$；其中 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 分别称为外层函数和内层函数，u 称为中间变量.

若 $D_f\cap R_\varphi=\varnothing$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $\varnothing$，此时该函数无任何意义. 一个复杂函数可以分解成若干个简单函数的复合，但此分解不一定是唯一的.

例 9 设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2-1, x<0\\ x+2, x\geqslant 0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x, x<1\\ e^x, x\geqslant 1\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解 因为

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\varphi(x), \varphi(x)<1\\ e^{\varphi(x)}, \varphi(x)\geqslant 1\end{cases},$$

又因为

（1）当 $\varphi(x)<1$ 时：① 当 $x<0$ 时，由 $\varphi(x)=x^2-1<1$，解得 $x\in(-\sqrt{2},0)$；② 当 $x\geqslant 0$ 时，由 $\varphi(x)=x+2<1$，解得 $x\in\varnothing$.

（2）当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时：① 当 $x<0$ 时，由 $\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，解得 $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]$；② 当 $x\geqslant 0$ 时，由 $\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，解得 $x\in[0,+\infty)$. 所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x^2-1}, & x\leqslant -\sqrt{2} \\ x^2-1, & -\sqrt{2}<x<0 \\ e^{x+2}, & x\geqslant 0 \end{cases}.$$

二、函数图像之间的关系

设已知 $y=f(x),x\in D_f$ 的图像，则以下函数的图像可以通过 $y=f(x)$ 的图像经过一系列的变换而得到.

（1）函数 $y=f(x+a),x\in D_f$ 的图像是将 $y=f(x)$ 向左（$a>0$）或向右（$a<0$）平移 $|a|$ 个单位而得到；

（2）函数 $y=f(kx),x\in D_f$（$k>0$）的图像是将 $y=f(x)$ 的图像沿 x 轴方向压缩（$k>1$）或伸长（$0<k<1$）到原来的 $\frac{1}{k}$ 倍而得到；

（3）函数 $y=f(x)+b,x\in D_f$ 的图像是将 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴方向向上（$b>0$）或向下（$b<0$）平移 $|b|$ 个单位而得到；

（4）函数 $y=kf(x),x\in D_f$，（$k>0$）的图像是将 $y=f(x)$ 的图像沿 y 轴方向压缩（$0<k<1$）或伸长（$k>1$）为原来的 k 倍而得到；

（5）函数 $y=f(-x),x\in D_f$ 的图像是 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称的对称图形；

（6）函数 $y=-f(x),x\in D_f$ 的图像是 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称的对称图形；

（7）函数 $y=|f(x)|,x\in D_f$ 的图像是将 $y=f(x)$ 的图像中 x 轴下方部分关于 x 轴对称到 x 轴上方，而 x 轴上方部分的图像保持不变而得到的图形.

读者可以推导，看看 $y=|lf(-kx+a)+b|-c,x\in D_f$（其中 a,b,c,l,k 均是正常数）的图像是如何由 $y=f(x)$ 的图像变换而得的.

第四节　几个重要的函数类

在高等数学中，将会重点讨论以下几类函数的一些性质. 这些函数中，有一部分在初等数学里已经介绍过，但它们仍然是高等数学的研究对象.

一、基本初等函数类

1. 常量函数

$$y=c,\quad x\in\mathbf{R}\ （c\text{为常数}）.$$

简单性质：偶函数，非严格的单调函数，以任何实数为周期的有界函数. 其图像见图 1-11.