普通高等教育基础课规划教材

高等代数

ADVANCED ALGEBRA

申亚男　李为东◎编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等代数

申亚男　李为东　编著

机械工业出版社

高等代数主要讲授线性空间的理论，也兼顾一部分多项式理论和代数基本知识. 本书内容包括预备知识、多项式、矩阵、线性空间、线性变换、欧氏空间、二次型、线性方程组、行列式、矩阵的相似标准形及进一步学习的资料.

本书可以作为数学系本科低年级教材，也可作为工科高年级教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等代数/申亚男，李为东编著. -北京：机械工业出版社，2014.12

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-50689-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①申…②李… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 143981 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫

责任校对：张晓蓉 封面设计：鞠 杨

责任印制：李 洋

北京振兴源印务有限公司印刷

2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 17.25 印张 · 355 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-50689-8

定价：34.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线：010-88379833

读者购书热线：010-88379649

网络服务

机 工 官 网：www.cmpbook.com

机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

高等代数与数学分析、解析几何并称本科数学专业的三大数学专业基础课程，是进一步学习各个数学分支学科的必备基础.

高等代数主要讲授线性空间的理论，也兼顾一部分多项式理论与代数基本知识. 现代科技的最成功之处就是把纷繁复杂的现实问题进行合理的线性化，从而使得问题可以得到良好的近似，而线性化之后的问题比较易于解决. 线性化之后抽象出的数学模型就是一种最简单的数学结构——线性空间. 本书的主体部分正是介绍线性空间的理论及其应用的.

本书共分 11 章.

第 1 章是一些基本的、常用的数学概念，如集合、映射、数学归纳法等；对这部分内容非常熟悉的读者可以略去.

第 2 章是多项式理论，这部分内容是研究矩阵或者线性变换的特征多项式的有力工具. 除此以外，多项式理论本身也有非常重要的意义，以及广泛的应用.

第 3 章是矩阵的初步知识. 矩阵是研究线性空间以及线性代数的有力工具，而其本身也有丰富的研究课题.

第 4、5 两章介绍线性空间的几何理论，这实际上可以看作是向量几何的一种自然推广.

第 6 章是读者熟知的欧氏空间的推广，这种推广是通过引入内积这个概念得以实现的.

第 7 章实质上可以看作是研究多元二次齐次多项式，当然二次型本身在线性空间中也有实际意义.

第 8 章研究一般的线性方程组的解的结构和解法.

第 9 章介绍行列式理论.

第 10 章则是研究一般线性变换的对角化问题，也就是 Jordan 标准形理论.

第 11 章提供了一些较为困难的，或者开放性的问题，供学有余力或者兴趣浓厚的学生做研究性课题使用.

本书的初稿完成于 2003 年，以校内讲义的形式使用了近十年. 2011 年编者对讲义进行了修订和增补. 在使用过程中，编者尝试过两种形式，一是按照书的顺序进行，二是把第 8 章和第 9 章提前，放在线性空间理论之前讲授. 两种方式的教学效果都不错.

本书的编写得到了北京科技大学教材建设经费的资助.

编　者

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章

预备知识

本章的内容是一些基本的数学概念，以及学习代数学的基础知识. 第1.1节介绍了集合的概念、关系及其研究方法. 第1.2节介绍了一种重要的数学关系——等价关系，这种关系在分类中有重要作用，在本课程中会多次用到. 第1.3节则用众多的例子介绍了映射概念，并讨论了映射的简单性质与应用. 第1.4节是对熟知的自然数与数学归纳法的介绍、总结和加深. 最后一节则介绍了以后常用的一种基本代数结构——数域.

1.1 集合及其运算

在数学中，有许多概念是不定义概念，如几何学中的点、线、面等概念. 集合与元素是集合论的基本概念，也是一对不定义概念. 集合论是著名的德国数学家George Cantor（1845—1918）在19世纪后期创立的，之后作为一种基本的数学语言和强有力的研究工具渗透到数学的每一个分支，成为全部数学研究的基础.

所谓**集合**就是由具有某种性质的个体所组成的一个整体，其中的个体都称之为**元素**. 例如，2008年北京奥运会的所有冠军可以组成一个集合；从北京到上海的全部航班也可以组成一个集合；小于5的自然数也可以组成一个集合，等等.

通常集合用大写字母表示，如 A，B，C，P，Q，…；而元素用小写字母表示，如 a，b，c，p，q，r，…. 如果 a 是集合 A 的元素，则称为元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；相反的情况叫作 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\in A$.

由全体自然数组成的集合叫作自然数集合，通常把这个集合记作 $\mathscr{N}$. 例如，我们有 $1\in\mathscr{N}$，$23\in\mathscr{N}$ 等，但是 $-1\notin\mathscr{N}$，$2.3\notin\mathscr{N}$ 等. 类似地，我们还可以定义整数集合、有理数集合、实数集合、复数集合，这些集合通常记作 $\mathscr{Z}$，$\mathscr{Q}$，$\mathscr{R}$，$\mathscr{C}$.

集合的表示方法主要有两种：枚举法和描述法. 所谓**枚举法**，就是写出集合的所有元素，例如：20以下的所有素数集合记作 $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$；所有完全平方数的集合 $\{1,4,9,16,25,\cdots\}$；获得过汤姆斯杯冠军的国家的集合 {马来西亚，印度尼西亚，中国，日本} 等. **描述法**就是用元素的性质来限

定集合中的元素，其表示形式是 $\{x \mid x$ 具有的性质$\}$. 例如：$\{x \mid x^3-1=0\}$、$\{x \mid 3x^4-4x^2+1\leqslant 0\}$ 及 $\{x^2 \mid x\in\mathscr{N}\}$ 等. 很显然可以看到集合 $\{x^2 \mid x\in\mathscr{N}\}$ 与集合 $\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$ 应该是完全一样的.

集合 A 可以按其包含的元素是否有限分为有限集合与无限集合，有限集合 A 的元素个数通常记为 $|A|$.

两个集合之间的基本关系是包含关系.

定义 1.1 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 B 包含集合 A，或者集合 A 包含于集合 B，记作 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$. 这时，我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

这一定义的另一说法是，如果 $x\in A$，那么必然有 $x\in B$. 显然，关于数的集合我们有一系列的包含关系：

$$\mathscr{N}\subseteq\mathscr{Z}\subseteq\mathscr{Q}\subseteq\mathscr{R}\subseteq\mathscr{C}.$$

还有一个特殊的集合称为空集，记作 ϕ，空集是不含有任何元素的集合. 显然，对任何集合 A 都有 $\phi\subseteq A$.

集合的包含关系有如下性质：

(1) 对于任意集合 A 都有 $A\subseteq A$；

(2) 如果集合 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则有 $A\subseteq C$.

证明：这里来证明性质 (2). 由包含关系的定义可以知道，我们只需要证明集合 A 中的元素必然在集合 C 中就可以了. 对任意的元素 $x\in A$，由于 $A\subseteq B$，因此 $x\in B$. 又由于 $B\subseteq C$，因此 $x\in C$. 由定义 1.1 知道 $A\subseteq C$. 证毕.

定义 1.2 若集合 A 与 B 互相包含，即有 $A\subseteq B$ 与 $A\supseteq B$ 同时成立，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

所谓集合 B 真包含集合 A，是指 $B\supseteq A$ 但是 $A\neq B$，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 这时也称集合 A 是 B 的真子集.

集合的运算有交、并、差、对称差和补等.

定义 1.3 若 A，B 是集合，则 A，B 的交、并、差和对称差的定义和记法依次为

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\},$$
$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A).$$

当我们考虑一个问题时，所需要考虑的所有元素的集合称为全集.

定义 1.4 若 I 为全集，A 是 I 的子集，则称 $I-A=\{x\in I \mid x\notin A\}$ 为集合 A 的补集，记作 $\complement_I A$ 或 $\overline{A}$.

在全集存在的时候，利用补集可以得到差运算的另一表示式：

$$A-B=A\cap\overline{B}.$$

关于集合的这些运算有如下一些性质：

(1) **交换律** $A\cap B=B\cap A$,
$A\cup B=B\cup A$,
$A\triangle B=B\triangle A$.

(2) **结合律** $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.

(3) **分配律** $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,
$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

(4) **幂等律** $A\cap A=A$,
$A\cup A=A$.

(5) **0—1 律** $A\cup\phi=A$,
$A\cap\phi=\phi$.

(6) **吸收律** $A\cup(A\cap B)=A$,
$A\cap(A\cup B)=A$.

(7) **排中律** $A\cup\overline{A}=I$.

(8) **矛盾律** $A\cap\overline{A}=\phi$.

(9) **De Morgan 律** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证明：这里我们证明分配律的第一条和 De Morgan 律的第一条，其他的证明留作习题.

证明分配律$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$. 由定义 1.2 可以知道，只需要证明等式两端的集合相互包含，这通常称为证明双包含关系.

首先，证明$(A\cap B)\cup C\subseteq(A\cup C)\cap(B\cup C)$. 设$x\in(A\cap B)\cup C$，则$x\in A\cap B$或者$x\in C$. 如果$x\in A\cap B$，那么$x\in A$并且$x\in B$，因此$x\in A\cup C$并且$x\in B\cup C$. 由定义 1.3 知道$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$. 如果$x\in C$，那么$x\in A\cup C$并且$x\in B\cup C$，由定义 1.3 知道$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$. 可以看到总有

$$(A\cap B)\cup C\subseteq(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

其次，证明$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C$. 设$x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$，那么一定有$x\in A\cup C$并且$x\in B\cup C$. 如果$x\in C$，那么显然$x\in(A\cap B)\cup C$. 如果$x\notin C$，那么必然有$x\in A$并且$x\in B$，这时$x\in A\cap B$，因此$x\in(A\cap B)\cup C$. 可以看到无论如何总有

$$(A\cup C)\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C.$$

综上所述，有分配律$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$成立.

证明 De Morgan 律$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. 我们仍然证明双包含关系.

首先，证明$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$. 设$x\in\overline{A\cup B}$，则$x\notin A\cup B$，这表明$x\notin A$并且$x\notin B$，

也即 $x\in\overline{A}$ 并且 $x\in\overline{B}$. 于是有 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. 因此，$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

其次，证明 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$. 设 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$，那么 $x\in\overline{A}$ 并且 $x\in\overline{B}$，即 $x\notin A$ 并且 $x\notin B$，因此 $x\notin A\cup B$，即 $x\in\overline{A\cup B}$. 于是 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.

综上所述，有 De Morgan 律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ 成立.

证毕.

例 1.1 化简集合表达式 $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$.

解：

$$\begin{aligned}&((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)\\=&(A\cup B)-A\\=&(A\cup B)\cap\overline{A}\\=&(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\\=&\phi\cup(B\cap\overline{A})\\=&B\cap\overline{A}\\=&B-A.\end{aligned}$$

其中，第一个等号使用的是吸收律；第二、六个等号使用的是差运算的第二种形式；第三个等号利用的是分配律；第四个等号用矛盾律；第五个等号用 0－1 律.

例 1.2 已知集合 A，B，X 满足等式

$$A\cup B\cup X=A\cup B,$$
$$A\cap X=B\cap X=A\cap B.$$

证明：$X=A\cap B$.

证明：

$$\begin{aligned}X&=(A\cup B\cup X)\cap X\\&=(A\cup B)\cap X\\&=(A\cap X)\cup(B\cap X)\\&=(A\cap B)\cup(A\cap B)\\&=A\cap B.\end{aligned}$$

其中，第一个等号使用吸收律；第二、四个等号使用已知条件；第三个等号使用分配律；第五个等号使用幂等律.

定义 1.5 若集合 A，B 都是非空集合，那么集合

$$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为集合 A 与 B 的笛卡儿积，记作 $A\times B$.

一般来说，$A\times B\neq B\times A$. 类似地，还可以定义 n 个非空集合 A_i 的笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

※习 题

1.1.1. 设 A，B 是两个集合，$A\subseteq B$ 且 $A\in B$ 可能吗？

1.1.2. 化简集合表达式：$(A-B-C)\cup((A-B)\cap C)\cup(A\cap B-C)\cup(A\cap B\cap C)$.

1.1.3. 证明：$A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq A$.

1.1.4. 证明：$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cup B=B$.

1.1.5. 证明：$A\subseteq B$ 当且仅当 $A\cap B=A$.

1.1.6. 证明：$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

1.1.7. 已知：$A\cap C\subseteq B\cap C$，$A-C\subseteq B-C$，证明：$A\subseteq B$.

1.1.8. 证明：$A\triangle A=\phi$，$A\triangle\phi=A$.

1.1.9. 证明：对任何集合 A，B，C，都有 $A\triangle B\subseteq(A\triangle C)\cup(B\triangle C)$.

1.1.10. 证明：对两个集合 X，Y，$X=\phi$ 当且仅当 $Y=X\triangle Y$.

1.1.11. 若 $A\triangle B=A\triangle C$，那么 $B=C$.

1.2 等价关系

数学的一项重要任务是在纷繁复杂的个体中发现它们的某种共性，并且利用这种共性解决问题. 等价关系就是为实现这样一个目的而引入的. 本节的目的就是对于这种在数学中最常见的等价关系作一个初步的研究.

设 A 是一个非空集合，a，b 是集合 A 的两个元素，如果这两个元素之间具有某种特定的关系或者性质，则我们把这个事实记作 $a\sim b$，并称 a，b 具有关系 $\sim$.

关系在数学中无处不在. 例如，在实数集合 $\mathscr{R}$ 上的等于关系、小于关系、大于等于关系等都是这里所说的关系的例子，当然它们都有各自特定的符号 $=$、$<$、$\geqslant$. 在所有平面图形组成的集合上，我们最熟悉的关系有直线的垂直、平行、三角形全等关系，当然它们也都有各自常用的符号 $\perp$、$/\!/$、$\cong$ 等.

等价关系是一种重要且具有良好性质的关系，其定义如下：

定义 1.6 设 A 是一个非空集合，$\sim$ 是定义在 A 上的一个关系，并且满足下面三个条件：

(1) **反身性** 对任意的 $a\in A$，都有 $a\sim a$；

(2) **对称性** 对任意的 a，$b\in A$，如果 $a\sim b$，那么有 $b\sim a$；

(3) **传递性** 对任意的 a，b，$c\in A$，如果 $a\sim b$ 且 $b\sim c$，那么有 $a\sim c$，则称这个关系 $\sim$ 为集合 A 上的一个等价关系.

例 1.3 考虑实数集合 $\mathscr{R}$，很容易验证，在 $\mathscr{R}$ 上定义的实数相等关系就是一种等价关系. 小于关系不是一种等价关系，因为反身性和对称性都不成立.

例 1.4 考虑所有的平面直线组成的集合 L，如果我们可以认为每一条直线都是和自身平行的，那么平行关系就是 L 上的一个等价关系. 但是垂直关系却不可能是等价关系，因为反身性和传递性都不可能是成立的.

例 1.5 考虑平面上所有三角形组成的集合 $\triangle$，容易验证，全等关系和相似关

系都是△上的等价关系.

例 1.6 考虑平面上所有圆形组成的集合⊙，在其上定义关系 $\sim_1$，如果对两个圆 a，$b\in\odot$，它们有共同的圆心，那么 $a\sim_1 b$. 这个关系可以称之为同心圆关系.

再定义关系 $\sim_2$，如果对两个圆 a，$b\in\odot$，它们有相等的面积，那么 $a\sim_2 b$. 这个关系可以称之为等积关系.

非常显然的是这里定义的同心圆关系与等积关系都是⊙上的等价关系. 但是，这两个等价关系显然是不同的.

下面我们在整数集合 $\mathscr{Z}$ 上定义一种重要的等价关系，即同余关系，并研究它的一些基本性质.

定义 1.7 设 n 是一个大于 1 的正整数，若 a，b 是整数且 n 整除 $a-b$，则称整数 a 和 b 模 n 是**同余**的，记作 $a\equiv b\pmod n$.

命题 整数模 n 的同余关系是一种等价关系，也就是说，

(1) **反身性** 对任意的整数 a，有 $a\equiv a\pmod n$；

(2) **对称性** 对任意的整数 a，b，如果 $a\equiv b\pmod n$，那么 $b\equiv a\pmod n$；

(3) **传递性** 对任意的整数 a，b，c，如果 $a\equiv b\pmod n$ 且 $b\equiv c\pmod n$，那么 $a\equiv c\pmod n$.

证明略.

例 1.7 任何两个奇数模 2 都是同余的，任何两个偶数模 2 也都是同余的。

例 1.8 15 和 22 模 7 是同余的，15 和 −6 模 7 也是同余的，即

$$15\equiv 22\pmod 7,\quad 15\equiv -6\pmod 7.$$

定理 1.1 若 $a\equiv b\pmod n$ 及 $a_1\equiv b_1\pmod n$，则

$$a\pm a_1\equiv b\pm b_1\pmod n,\quad aa_1\equiv bb_1\pmod n.$$

证明：由条件可知，$n\mid a-b$ 及 $n\mid a_1-b_1$. 又因为

$$(a\pm a_1)-(b\pm b_1)=(a-b)\pm(a_1-b_1),$$

$$aa_1-bb_1=a(a_1-b_1)+b_1(a-b),$$

所以，定理中的两个等式都成立. 证毕.

定理 1.2 若 $ab\equiv ac\pmod n$ 且 $(a,n)=1$，则 $b\equiv c\pmod n$.

证明：由条件有 $n\mid a(b-c)$，又 $(a,n)=1$，所以 $n\mid b-c$，即 $b\equiv c\pmod n$. 证毕.

例 1.9 计算 3^{100} 除以 14 的余数.

解：简单计算得到 $3^2\equiv 9\pmod{14}$，$3^3\equiv -1\pmod{14}$，所以 $3^{99}\equiv -1\pmod{14}$，进而有 $3^{100}\equiv(-1)\times 3\equiv 11\pmod{14}$. 所以，$3^{100}$ 除以 14 的余数是 11.

定理 1.3（Fermat 小定理） 设 p 是素数，$(a,p)=1$，则 $a^{p-1}\equiv 1\pmod p$.

证明：若 $(a,p)=1$，考虑 $p-1$ 个数 a，$2a$，…，$(p-1)a$，由定理 1.2 可见这 $p-1$ 个数一定是模 p 互不同余的，并且没有一个数是和零同余的. 这样，a，$2a$，…，$(p-1)a$ 分别除以 p 的余数应该是 1，2，…，$p-1$ 的一个排列，利用定

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

理1.1有

$$a\times 2a\times\cdots\times(p-1)a\equiv 1\times 2\times\cdots\times(p-1)(\bmod p),$$

再利用定理1.2有

$$a^{p-1}\equiv 1(\bmod p).$$

推论 设p是素数，则$a^p\equiv a(\bmod p)$.

Pierre de Fermat（1601—1665）是一位法国数学家，他的职业是法官，数学只是他的业余爱好. Fermat是现代数论研究的先驱，他在1640年给出这个重要定理. Fermat还是解析几何的创立者之一. 作为微积分学的先行者，Fermat成功地解决了求曲线切线的问题. 此外，他还研究了素数的平方和表示、Fermat素数等问题. 他还提出了著名的Fermat猜想：不定方程$x^n+y^n=z^n$在$n\geqslant 3$时没有正整数解. 这个猜想在1994年已经变成Fermat-Wiles定理了.

※习 题

1.2.1. 请给出一些等价关系.

1.2.2. 请给出一些关系，使之只满足反身性、对称性、传递性这三个条件中的一个或者两个.

1.2.3. 计算5^{200}除以18的余数.

1.2.4. 求出7^{365}的最后两位数.

1.2.5. 证明：$7\mid 2222^{5555}+5555^{2222}$.

1.2.6. 利用Fermat小定理求解下列同余式方程.

(1) $6x\equiv 5(\bmod 7)$；(2) $5x\equiv 7(\bmod 11)$；

(3) $28x\equiv 9(\bmod 43)$；(4) $106x\equiv 29(\bmod 89)$.

1.3 映射

定义1.8 设X，Y是非空集合，所谓映射f是集合X，Y以及X和Y的元素之间的一个对应法则f，依照这个法则，X中的每一个元素x都对应于Y中唯一确定的一个元素y. 映射通常记作$f: X\to Y$. X称为映射f的定义域，Y称为映射f的值域.

在这个对应关系中，若$x\in X$对应于$y\in Y$，记作$y=f(x)$或$f: x\mapsto y$，y叫作x的像，x叫作y的原像. 集合$\{f(x)\mid x\in X\}$称为映射f的像，记作$f(X)$或$\mathrm{Im}f$. 若$y\in Y$，集合$\{x\mid f(x)=y\}$称为y的原像，记作$f^{-1}(y)$.

定义1.9 如果$\mathrm{Im}f=Y$，则称f为满射；如果$x_1\neq x_2$，则$f(x_1)\neq f(x_2)$，称f为单射. 如果f既是满射，又是单射，则称为双射.

定理1.4 若f是X到Y的映射，

(1) f 是单射当且仅当对任意的 x_1，$x_2 \in X$，如果 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$；

(2) f 是满射当且仅当对任意的 $y \in Y$，存在 $x \in X$，使得 $y=f(x)$.

此定理的证明是相当简单的，故从略.

若 X，Y 都是数集，从 X 到 Y 的映射称为函数. 设 X，Y，Z 都是非空集合，映射 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，定义一个新映射记作 $g \circ f$，

$$g \circ f: X \to Z,\ x \mapsto g(f(x))$$

称为映射 g 与 f 的复合映射. 若 f 都是非空集合 X 到自身上的映射，那么复合映射 $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$ 记作 f^n.

定理 1.5 设 A，B，C，D 是非空集合，$f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$，那么，有等式

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

成立. 也就是说，映射的复合运算满足结合律.

证明：显然映射 $h \circ (g \circ f)$ 与 $(h \circ g) \circ f$ 都是从 A 到 D 的映射.

设 A 中元素 x_A 在 f 之下的像是 x_B，x_B 在 g 之下的像是 x_C，x_C 在 h 之下的像是 x_D，即

$$f(x_A)=x_B, g(x_B)=x_C, h(x_C)=x_D.$$

那么根据复合映射的定义，$g \circ f$ 将把 x_A 对应到 x_C，$h \circ g$ 将把 x_B 对应到 x_D，即

$$g \circ f(x_A)=x_C,\ h \circ g(x_B)=x_D.$$

因此我们有

$$h \circ (g \circ f)(x_A)=h(x_C)=x_D,$$

以及

$$(h \circ g) \circ f(x_A)=(h \circ g)(x_B)=x_D.$$

由此可见，$h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$. 证毕.

若 X，Y 是非空集合，映射 $f: X \to Y$，$g: Y \to X$，则 $g \circ f$ 和 $f \circ g$ 都有定义. 但是 $g \circ f$ 和 $f \circ g$ 是不同的映射.

设 X 是一个非空集合，所谓恒等映射，通常记作 i_X 或简记作 i（也可记作 e，1），定义为 $i_X: X \to X$，$x \mapsto x$ 或 $i_X(x)=x$，$i(x)=x$.

设 f 是非空集合 X 到自身上的双射，定义一个对应关系 $g: X \to X$，$y \mapsto x$，这里，$y=f(x)$. 容易验证 g 是一个映射，也是双射，并且 $f \circ g = g \circ f = i_X$. 映射 g 称为映射 f 的逆映射，记作 f^{-1}. 函数的逆映射（如果存在）叫作反函数.

例 1.10 f，g，h 是实数集合 $\mathscr{R}$ 上的映射，也就是函数，定义如下：

$$f(x)=2x+1,\ g(x)=e^x,\ h(x)=x^2+1.$$

由于 $h(1)=h(-1)=2$，因此 h 不是单射. 又由于 $h(x) \geqslant 1 \neq 0$，因此零不可能有原像，h 不是满射.

显然，$g(x)>0$，因此 g 不是满射. 对实数 x_1，x_2，如果 $g(x_1)=g(x_2)$，即

$e^{x_1}=e^{x_2}$，那么有 $e^{x_1-x_2}=1$，因此有 $x_1-x_2=0$，即 $x_1=x_2$. 这表明 g 是单射.

对任意的实数 y，显然有 $f\left(\frac{y-1}{2}\right)=2\cdot\frac{y-1}{2}+1=y$，因此 f 是满射. 另一方面，对于两个实数 x_1，x_2，若 $f(x_1)=f(x_2)$，即 $2x_1+1=2x_2+1$，因此 $x_1=x_2$. 这表明 f 是单射. 映射 f 既满且单，因此是一个双射. 容易计算出 f 的反函数是 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$.

另外，简单计算还有

$$f\circ f(x)=4x+3,\ f\circ g(x)=2e^x+1,\ g\circ f(x)=e^{2x+1},$$

以及

$$f^n(x)=2^n(x+1)-1.$$

例 1.11（Euler ϕ - 函数） 定义在自然数集合 $\mathcal{N}$ 上的函数称为数论函数. 函数 $\phi:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ 称为 Euler ϕ - 函数，如果 $\phi(n)$ 等于不超过 n 的与 n 互素的自然数的个数.

通过简单的计算可以得到 $\phi(1)=1$，$\phi(2)=1$，$\phi(3)=2$，$\phi(4)=2$，$\phi(5)=4$，$\phi(6)=2$，$\phi(7)=6$，$\phi(8)=4$，$\phi(9)=6$，$\phi(10)=4$ 等.

另外，还有 $\phi^{-1}(1)=\{1,2\}$，$\phi^{-1}(2)=\{3,4,6\}$，$\phi^{-1}(3)=\phi$ 等. 求出集合 $\mathrm{Im}\phi$ 是一个困难的数学问题.

例 1.12 用 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，即不超过 x 的最大整数. 函数 $f:\mathcal{R}\to\mathcal{Z}$，$x\mapsto[x]$，$f$ 称为取整函数. 例如，$[4]=4$，$[5.7]=5$，$[-\pi]=-4$ 等.

例 1.13（$3n+1$ 映射） 定义数论函数 C 如下，$C:\mathcal{N}\to\mathcal{N}$，

$$n\mapsto\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & 2\mid n\\[2ex] \dfrac{3n+1}{2}, & 2\nmid n\end{cases}.$$

这个映射 C 称为 $3n+1$ 映射或 Collatz 映射.

容易计算 $C(1)=2$，$C(2)=1$，$C(3)=5$，$C(4)=2$，$C(5)=8$，…，$C(18)=9$，$C(19)=29$ 等. 映射 C 是满射，但不是单射，这是因为 $C(3)=C(10)=5$，$C^{-1}(5)=\{3,10\}$，$C^{-1}(6)=\{12\}$.

一个著名的猜想是对任意的自然数 n，一定存在自然数 k，使得 $C^k(n)=1$，这个猜想称为 $3n+1$ 猜想.

例 1.14 在平面直角坐标系 OXY 中，由所有的圆心在坐标原点的同心圆组成的集合记作 A. 这样的圆可以由它们的半径 r 决定，记为 $O(r)$，那么 $A=\{O(r)\mid r>0\}$.

建立从实数集合 $\mathcal{R}$ 到集合 A 的映射 $f:\mathcal{R}\to A$，$x\mapsto O(e^x)$. 显然，映射 f 是双射，它的逆映射是 $f^{-1}:A\to\mathcal{R}$，$O(r)\mapsto\ln r$.

例 1.15 记 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，定义映射 f 如下：

$$f:[0,2\pi)\to A,t\mapsto(\cos t,\sin t).$$

映射f是双射，其逆映射

$$f^{-1}:A\to[0,2\pi),(x,y)\mapsto\begin{cases}\arccos x & y\geqslant 0\\ 2\pi-\arccos x & y<0\end{cases}.$$

这一对应关系也可以写作

$$(x,y)\mapsto\pi(1-\operatorname{sgn}y)+\arccos x\cdot\operatorname{sgn}y.$$

例 1.16 本例试图在一个单位圆周与直线之间建立一个双射. 在平面直角坐标系 OXY 中，集合

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\text{ 且 }y\neq 1\},B=\{(x,0)\mid x\in\mathscr{R}\}.$$

对单位圆周上的任意一个异于 $(0,1)$ 的点 (x,y)，连接 $(0,1)$、(x,y) 的直线交直线 $y=0$ 于$\left(\frac{x}{1-y},0\right)$. 建立映射

$$f:A\to B,(x,y)\mapsto\left(\frac{x}{1-y},0\right).$$

可以验证f是双射. f的逆映射f^{-1}是

$$f^{-1}:B\to A,(x,0)\mapsto\left(\frac{2x}{x^2+1},\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$$

例 1.17（Erdös Szekeres） 在一个有 $mn+1$ 个各不相同的整数的数列 u_1，u_2，…，u_{mn+1}中，或者存在一个长度大于 m 的减子数列，或者存在一个长度大于 n 的增子数列.

证明：分别用 l_i^-，l_i^+ 表示从 u_i 开始的最长的减子数列和最长的增子数列的长度. 假设命题的结论是错误的，即每个减子数列的长度不超过 m，并且每个增子数列的长度不超过 n.

定义一个从集合 $\{u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}\}$ 到笛卡儿积 $\{1,2,\cdots,m\}\times\{1,2,\cdots,n\}$ 的映射f如下：

$$\begin{aligned}f:\{u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}\}&\to\{1,2,\cdots,m\}\times\{1,2,\cdots,n\}\\ u_i&\mapsto(l_i^-,l_i^+)\end{aligned}$$

下面我们来证明f是单射.

假定 $i<j$. 在这个情形下，$u_i>u_j$就蕴涵 $l_i^->l_j^-$. 因为我们至少可以加一个元素（即 u_i）到从 u_i开始的最大长度的减子数列的左边，从而得到一个从 u_i开始的更长的减子数列，所以 $l_i^->l_j^-$. 类似地，$u_i<u_j$就蕴涵 $l_i^+>l_j^+$. 因为我们至少可以加一个元素（即 u_i）到从 u_i开始的最大长度的增子数列的左边，从而得到一个从 u_i开始的长度更大的增子数列，所以 $l_i^+>l_j^+$. 因此 $u_i\neq u_j$就蕴涵 $(u_i^-,u_i^+)\neq(u_j^-,u_j^+)$. 因为这些有序对中至少有一个位置上的数是不同的. 最后这个不等式就意味着 $f(u_i)\neq f(u_j)$. 这样就证明了f是单射.

集合 $\{u_1,u_2,\cdots,u_{mn+1}\}$ 中有 $mn+1$ 个元素，笛卡儿积集 $\{1,2,\cdots,m\}\times\{1,$

$2,\cdots,n\}$ 中有 mn 个元素，f 是单射表明 $mn+1\leqslant mn$，但这是不可能的.

※习 题

1.3.1. 若 X 是一个含有 n 个元素的集合，试问从 X 到自身的映射有多少个？其中有多少个是双射？

1.3.2. 证明：例 1.14 中给出的映射 f 是双射.

1.3.3. 证明：例 1.16 中的映射 f 是双射.

1.3.4. 若 $f\circ g$ 是一个单射，证明 g 也是单射；若 $f\circ g$ 是一个满射，证明 g 也是满射.

1.3.5. 若 X，Y 都是有限集合，f 是从 X 到 Y 的映射，分别以 $|X|$，$|Y|$ 表示集合 X，Y 含有的元素的个数. 证明：当 f 是单射时，$|X|\leqslant|Y|$；当 f 是满射时，$|X|\geqslant|Y|$；进而当 f 是双射时，$|X|=|Y|$.

1.3.6. 若 X 是一个有限集，f 是其上的映射. 证明：f 是单射的充分必要条件是 f 是满射.

1.3.7. 画出函数 $[x]$ 的图形.

1.3.8. 在空间直角坐标系 $OXYZ$ 中，集合

$$A=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1 \text{ 且 } z\neq 1\},\ B=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathscr{R}\}.$$

试建立集合 A 与 B 之间的双射，并求出它的逆映射.

1.3.9. 设函数 $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$，$f(x)=5x+3$. 求：

(1) $f(5)$，$f(-2)$；

(2) $f([0,1])$，$f((-10,9])$；

(3) $f^{-1}(0)$，$f^{-1}(9)$；

(4) $f^{-1}([0,1])$，$f^{-1}((-10,9])$；

(5) $f^n(x)$ 及其反函数.

1.3.10. 设函数 $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$，$f(x)=-x^2+4$. 求：

(1) $f(5)$，$f(-2)$；　　(2) $f([0,1])$，$f((-10,9])$；

(3) $f^{-1}(0)$，$f^{-1}(9)$；　　(4) $f^{-1}([0,1])$，$f^{-1}((-5,2])$.

1.3.11. 设函数 f 如例 1.12 定义，求：$f^{-1}(3)$，$f^{-1}(\{-2,2\})$.

1.4 自然数与数学归纳法

自然数 1，2，3，…是我们最先认识到的数，是我们日常计数的工具，也是代数学研究的基础. 通常把全体自然数组成的集合，记作 $\mathscr{N}$. 自然数来源于我们对计数的需要，在这里我们对自然数集合 $\mathscr{N}$ 给出一个公理化的定义，其目的在于更深入地认识自然数的本质.

意大利数学家 Peano 在 1889 年提出了如下一组公理来定义自然数集合 $\mathscr{N}$，称之为 Peano 公理.

Peano 公理 自然数集 $\mathscr{N}$ 是满足下述条件的集合，

Ⅰ. 1 是自然数；

Ⅱ. 每一个自然数 n 都有一个确定的后继，记作 n^+；

Ⅲ. 没有一个自然数的后继是 1；

Ⅳ. 如果 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

Ⅴ. 由自然数组成的每个集合，如果它含有 1；并且含有集合中每个自然数的后继. 那么，这个集合一定是自然数集合.

在这组公理中，公理Ⅴ称为归纳公理，它是我们通常所使用的数学归纳法的基础. 归纳公理也可以写成下面的形式：

Ⅴ'. 若 $S \subseteq N$，且满足条件：

(ⅰ) $1 \in S$；

(ⅱ) 若 $n \in S$，则 $n^+ \in S$，

那么，$S = \mathscr{N}$.

在 Peano 公理中，所谓 n 的后继 $n+$ 也就是 $n+1$. 在以这组公理定义了自然数之后，可以用代数方法建立有理数系. 归纳公理的一个最直接用处是导致我们熟知的数学归纳法.

数学归纳法原理 设 P 是一个与自然数有关的命题，且

(1) $P(1)$ 成立；

(2) 如果 $P(n)$ 成立，那么 $P(n+1)$ 也成立，

则命题 P 对所有的自然数都成立.

证明：记 $S = \{n \in \mathscr{N} \mid P(n) \text{成立}\}$，即 S 是使得命题 P 成立的所有自然数组成的集合. 由条件 (1)$1 \in S$；由条件 (2) 如果 $n \in S$，那么，$n^+ \in S$. 由归纳公理可以知道这时必然有 $S = \mathscr{N}$，即命题 P 对所有的自然数都成立. 证毕.

第二数学归纳法原理 设 P 是一个与自然数有关的命题，且

(1) $P(1)$ 成立；

(2) 如果 $P(1), P(2), \cdots, P(n)$ 成立，那么 $P(n+1)$ 也成立，

则命题 P 对所有的自然数都成立.

证明留作习题.

例 1.18 (Cauchy **不等式**) 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n；b_1，b_2，$\cdots$，b_n 是两组实数，证明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

也即

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com