



“十二五”应用型本科系列规划教材

微积分

Calculus

主 编 吴建成 李志林



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”应用型本科系列规划教材

微 积 分

主 编 吴建成 李志林
副主编 涂庆伟 王 强
参 编 费忠华 刘 佳 沈永梅



机 械 工 业 出 版 社

本书根据应用型本科院校对微积分课程教学的要求编写,内容符合最新的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》,包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量与空间解析几何初步、多元函数微分法及其应用、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等11章,并配有习题与答案.考虑到不同专业和考研学生的需要,教材选编了部分超出要求的内容,这些内容标有*号,供选学.

本书适合作为应用型本科院校经济管理类专业的微积分课程教材,也可作为相关科研教学人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/吴建成,李志林主编. —北京:机械工业出版社,2015.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-51025-3

I. ①微… II. ①吴…②李… III. ①微积分-高等学校-教材 IV. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第176207号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 陈崇昱

版式设计:霍永明 责任校对:任秀丽 陈秀丽

封面设计:路恩中 责任印制:刘 岚

北京京丰印刷厂印刷

2015年8月第1版·第1次印刷

190mm×215mm·19.333印张·479千字

标准书号:ISBN 978-7-111-51025-3

定价:59.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线:010-88379833

读者购书热线:010-88379649

封面无防伪标均为盗版

网络服务

机工官网:www.cmpbook.com

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

金书网:www.golden-book.com

前 言

随着社会经济的迅速发展,数学在经济、管理领域中的应用日渐突出.本书是顺应这一发展趋势,在认真总结部分本科院校经济管理类专业微积分教材的基础上,结合应用型本科院校的教学特点而编写的.

本教材的特点:

1. 针对性强.教材紧密结合经济管理类专业,根据《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)而编写.书中还专门介绍了经济管理应用中的常用函数、边际分析、弹性分析,以及定积分、微分方程、差分方程、最小二乘法等在经济管理科学中的应用等内容,并围绕应用问题选编了一定量的例题与习题.

2. 根据应用型人才培养的特点,教材中淡化了计算技巧,突出了数学的基本原理和思想方法,注重直观描述,力求通俗易懂,便于学生自学.教材中对于一些重要概念、定理和方法尽量用一些直观、通俗的语言加以描述,如极限的定义、函数可导与不可导的几何表示、复合函数求导的“链式法则”等,一些定义、定理和方法也常常借助于几何图形加以描述,如连续的概念,中值定理的引入、条件与结论等.

3. 考虑到不同专业和不同层次学生的需要,本书选编了部分超出《基本要求》的内容,各章中还增加了综合例题供考研学生选学,每章的复习题也分为一般和较难两个层次.这样处理使得教材有较宽的适应面.凡超出《基本要求》的内容均标有*号供学生选学.

尽管我们对全书进行了认真仔细的推敲、审阅,但难免还会存在一些疏漏.书中存在的问题欢迎专家、同行和广大读者给予批评指正.

编 者

目 录

前言		
第一章 函数	1	
第一节 集合	1	
一、集合的概念	1	
二、集合的运算	2	
习题 1-1	3	
第二节 实数集	4	
一、实数与数轴	4	
二、绝对值	4	
三、区间与邻域	5	
习题 1-2	6	
第三节 函数	7	
一、一元函数的定义	7	
二、函数的几种特性	10	
三、反函数	11	
习题 1-3	12	
第四节 初等函数	13	
一、基本初等函数	13	
二、复合函数	16	
三、初等函数的概念	17	
习题 1-4	18	
第五节 参数方程* 和极坐标	18	
一、参数方程*	18	
二、极坐标	19	
习题 1-5	20	
第六节 函数关系的建立	21	
一、如何建立函数关系	21	
二、经济中常用的函数关系	22	
习题 1-6	23	
复习题一	23	
第二章 极限与连续	27	
第一节 数列的极限	27	
一、数列	27	
二、数列极限的直观定义	29	
三、数列极限的若干定理	30	
习题 2-1	33	
第二节 函数的极限	33	
一、自变量趋向无穷大时函数的极限	33	
二、自变量趋向有限值时函数的极限	35	
三、函数极限的性质	36	
习题 2-2	38	
第三节 无穷小与无穷大	39	
一、无穷小	39	
二、无穷大	40	
习题 2-3	41	
第四节 极限运算法则	41	
习题 2-4	46	
第五节 两个重要极限	47	
一、重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	47	
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	49	
习题 2-5	51	
第六节 无穷小的比较	51	
习题 2-6	53	
第七节* 极限的精确定义	53	
一、数列极限的精确定义	53	
二、函数极限的精确定义	56	
三、无穷小与无穷大的精确定义	58	

四、极限的一些基本定理的证明	59	二、对数求导法	103	目
习题 2-7	64	三、由参数方程所确定的函数的导数*	104	
第八节 函数的连续性	64	习题 3-4	107	录
一、函数连续的定义	65	第五节 函数的微分	108	
二、函数的间断点	67	一、微分的概念	108	
习题 2-8	68	二、微分的运算公式	110	
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	69	三、微分在近似计算中的应用	112	
一、连续函数的和、积及商的连续性	69	习题 3-5	113	
二、反函数与复合函数的连续性	69	第六节* 综合例题	114	
三、初等函数的连续性	70	复习题三	116	
习题 2-9	71	第四章 中值定理与导数的应用	121	
第十节 闭区间上连续函数的性质	72	第一节 中值定理	121	
一、最大值和最小值定理	72	一、费马引理	121	
二、介值定理	73	二、罗尔定理	122	
习题 2-10	73	三、拉格朗日中值定理	123	
第十一节* 综合例题	73	四、柯西中值定理	125	
复习题二	77	习题 4-1	126	
第三章 导数与微分	81	第二节 洛必达法则	126	
第一节 导数的概念	81	习题 4-2	132	
一、引例	81	第三节* 泰勒中值定理	132	
二、导数的定义	82	习题 4-3*	137	
三、求导数举例	84	第四节 函数单调性判别法	137	
四、函数的可导性与连续性之间的关系	87	习题 4-4	139	
五、导数的几何意义	87	第五节 函数的极值与最值	139	
习题 3-1	88	一、函数的极值及其求法	139	
第二节 函数的求导法则	89	二、函数的最值及其求法	141	
一、函数的和、差、积、商的求导法则	89	习题 4-5	143	
二、反函数的导数	93	第六节 曲线的凹凸性与拐点	143	
三、复合函数的导数	94	习题 4-6	145	
习题 3-2	97	第七节 函数作图	146	
第三节 高阶导数	98	一、曲线的渐近线	146	
习题 3-3	101	二、函数作图的方法	147	
第四节 隐函数的导数 由参数方程所确定的		习题 4-7	150	
函数的导数	102	第八节 变化率及相对变化率在经济中的应用	150	
一、隐函数的导数	102	一、函数的变化率——边际函数	150	

微	二、函数的相对变化率——函数的弹性	152
积	习题 4-8	155
分	第九节* 综合例题	156
	复习题四	160
	第五章 不定积分	165
	第一节 不定积分的概念和性质	165
	一、原函数与不定积分的概念	165
	二、不定积分的性质	167
	三、不定积分的基本积分公式	168
	习题 5-1	170
	第二节 换元积分法	171
	一、第一类换元法	171
	二、第二类换元法	175
	习题 5-2	180
	第三节 分部积分法	181
	习题 5-3	184
	第四节 综合例题	184
	复习题五	189
	第六章 定积分	193
	第一节 定积分的概念	193
	一、引例	193
	二、定积分的定义	195
	习题 6-1	198
	第二节 定积分的性质	198
	习题 6-2	201
	第三节 微积分基本公式	202
	习题 6-3	207
	第四节 定积分的换元法与分部积分法	208
	一、定积分的换元法	208
	二、定积分的分部积分法	211
	习题 6-4	213
	第五节 广义积分	214
	一、积分区间为无穷的广义积分	214
	二、无界函数的广义积分	216
	习题 6-5	218

第六节 定积分的应用	218
一、定积分的元素法	219
二、平面图形的面积	220
三、旋转体的体积	222
四、定积分在经济方面的应用	223
习题 6-6	224
第七节* 综合例题	226
复习题六	230
第七章 向量与空间解析几何初步	237
第一节 空间直角坐标系	237
一、空间直角坐标系及点的坐标	237
二、两点间的距离公式	238
习题 7-1	239
第二节* 向量及其运算	239
一、向量的概念	239
二、向量的线性运算	239
三、向量的数量积	243
四、向量的向量积	245
习题 7-2*	246
第三节* 平面方程	247
习题 7-3*	249
第四节* 空间直线的方程	250
一、空间直线的一般方程	250
二、空间直线的对称式方程与参数方程	250
三、两直线的夹角	252
四、直线与平面的夹角	252
习题 7-4*	253
第五节 曲面及其方程	254
一、曲面与方程	254
二、母线平行于坐标轴的柱面	255
三、旋转曲面	256
四、二次曲面*	257
习题 7-5	259
第六节* 空间曲线的参数方程 投影柱面	260
一、空间曲线的一般方程	260

二、空间曲线的参数方程	260
三、空面曲线在坐标面上的投影	261
习题 7-6*	262
复习题七	263
第八章 多元函数微分法及其应用	267
第一节 多元函数的基本概念	267
一、多元函数的概念	267
二、二元函数的定义域	268
三、二元函数的几何意义	269
四、常见的多元经济函数	269
五、二元函数的极限	270
六、二元函数的连续性	272
习题 8-1	273
第二节 偏导数	274
一、偏导数的概念及计算	274
二、高阶偏导数	277
习题 8-2	278
第三节 全微分	279
习题 8-3	281
第四节 多元复合函数的求导法则	282
习题 8-4	287
第五节 隐函数的求导公式	288
习题 8-5	290
第六节* 多元微分学在几何上的应用	291
一、空间曲线的切线和法平面	291
二、曲面的切平面和法线	294
习题 8-6*	295
第七节 多元函数的极值与最值	296
一、极值与最值	296
二、条件极值	298
三*、最小二乘法	302
习题 8-7	305
第八节* 综合例题	306
复习题八	310
第九章 二重积分	313

第一节 二重积分的概念与性质	313	目
一、二重积分的概念	313	
二、二重积分的性质	316	
习题 9-1	318	录
第二节 直角坐标系下二重积分的计算	319	
习题 9-2	325	
第三节 极坐标系下二重积分的计算	326	
习题 9-3	328	
第四节* 综合例题	329	
复习题九	332	
第十章 无穷级数	337	
第一节 常数项级数的基本概念和性质	337	
一、常数项级数的基本概念	337	
二、级数的基本性质	340	
习题 10-1	341	
第二节 常数项级数敛散性的判别法	342	
一、正项级数及其敛散性判别法	342	
二、交错级数及其敛散性判别法	347	
三、绝对收敛与条件收敛	348	
习题 10-2	349	
第三节 幂级数	350	
一、函数项级数的一般概念	50	
二、幂级数及其收敛性	351	
三、幂级数的运算	355	
习题 10-3	358	
第四节 函数展开成幂级数	358	
习题 10-4	363	
第五节 函数的幂级数展开式的应用	364	
一、函数值的近似计算	364	
二、计算定积分	364	
三、欧拉公式	365	
习题 10-5	366	
第六节* 综合例题	366	
复习题十	370	
第十一章 微分方程与差分方程	375	

微 积 分	第一节 微分方程的基本概念	375
	习题 11-1	378
	第二节 一阶微分方程	379
	一、可分离变量的微分方程	379
	二、一阶齐次微分方程	382
	三、一阶线性微分方程	384
	习题 11-2	386
	第三节* 可降阶的二阶微分方程	388
	一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	388
	二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	388
	三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	389
	习题 11-3	391
	第四节 二阶线性微分方程及解的结构	391
	习题 11-4	394
	第五节 二阶常系数线性微分方程	395

一、二阶常系数齐次线性微分方程	395
二、二阶常系数非齐次线性微分方程*	398
习题 11-5	402
第六节 差分方程	402
一、差分的概念与性质	402
二、差分方程的概念	404
三、一阶常系数线性差分方程	405
习题 11-6	408
第七节 微分方程在经济中的应用	408
习题 11-7	411
第八节* 综合例题	412
复习题十一	415
部分习题答案与提示	419
参考文献	455

第一章 函数

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象。集合是现代数学的基本语言。本章将在中学已有基础上，复习和介绍集合、函数及其相关知识，并做适当延伸，为以后各章的学习打下必要的基础。

一般地，所谓集合（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素。例如：彩电，电冰箱，录像机构成一个集合，其中彩电是这个集合的元素。直线 $x+y-1=0$ 上所有的点构成一个集合，其中点 $(0, 1)$ 是这个集合的元素。习惯上用大写字母如 A, B, C 等表示集合，用小写字母如 a, b, c, x, y, t 等表示集合的元素。

第一节 集合

一、集合的概念

设 M 是一集合，事物 a 是集合 M 的元素，则记为 $a \in M$ （读作 a 属于 M ）。事物 a 不是集合 M 的元素，记为 $a \notin M$ （读作 a 不属于 M ）。

集合的表示方法有两种：一种是列举法（又称穷举法），就是在花括号内把集合中所有的元素一一列举出来，元素之间用逗号隔开。如 $M = \{a, b, c\}$, $A = \{\text{彩电, 电冰箱, 录像机}\}$, 自然数集 $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 等等。

另一种方法是描述法，就是在花括号内，左边写出集合的一个代表元素，右边写出集合的元素所具有的性质，中间用竖线“ $|$ ”分开。以 x 表示 A 的元素，记作

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的性质}\}.$$

例如，满足不等式 $1 < x < 3$ 的一切实数构成的集合可以表示成 $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$. $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2, x, y \text{ 为实数}\}$ 代表了 xOy 平面上以原点为中心、半径等于 R 的圆周上点的全体所组成的集合。

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 I 。全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集。例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数就不是全集。

不含有任何元素的集合称为空集. 记作 $\emptyset$. 例如, 集合 $\{x \mid x > 4 \text{ 且 } x < 1\} = \emptyset$.

二、 集合的运算

如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素, 则称集合 B 是集合 A 的子集; 记作 $B \subset A$, 或 $A \supset B$.

对于任一集合 A , 因为 $\emptyset \subset A$, $A \subset A$, 所以 $\emptyset$, A 都是集合 A 的子集.

如果 $A \supset B$ 且 $B \supset A$, 则称集合 A 和集合 B 相等, 记作 $A = B$. 表示集合 A 和集合 B 中元素完全相同. 若 $A \subset B$, 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集.

设 A 、 B 为两个集合, 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集(简称并), 记作 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

设 A 、 B 为两个集合, 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集(简称交), 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

设 A 、 B 为两个集合, 由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的差集(简称差), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

假设考虑的集合都是全集 I 的子集, 称全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合 $I \setminus A$ 为 A 的余集或补集, 记作 A^c , 即

$$A^c = I \setminus A = \{x \mid x \in I, x \notin A, A \subset I\}.$$

集合的运算结果, 可用图 1-1 直观表示(图中阴影部分为运算结果).

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$, 全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$, 全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$, 全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 我们有如下关系:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

若 $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 是所有的自然数集, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$. $A \setminus B = \{1, 2\}$, $A^c = I \setminus A = \{5, 6, 7, \dots\}$.

集合的运算有下列性质:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

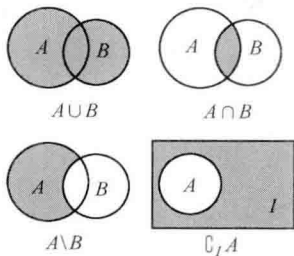


图 1-1

- (2) 结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
 (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
 (4) 幂等律 $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;
 (5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$;
 (6) 对偶律(德·摩根律)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

集合的笛卡儿乘积: 将两个元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 (x, y) , 称为二元有序数组. (x, y) 与 (y, x) 是两个不同的二元有序数组.

类似地, 有三元有序数组 (x, y, z) , $\cdots$, n 元有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

一般地, 设有集合 A 和 B . $x \in A$, $y \in B$, 所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合称为集合 A 与 B 的笛卡儿乘积, 记为 $A \times B$. 即

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

例如, 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, 则

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}.$$

设 $\mathbf{R}$ 为全体实数的集合, 则笛卡儿直角坐标系的坐标平面可记作

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\},$$

也记作为 $\mathbf{R}^2$.

类似地, 可以定义

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}.$$

同样有 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}.$

习题 1-1

1. 写出 $A = \{0, 1, 2\}$ 的一切子集.
2. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, 求 $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $A \setminus B$.
3. 已知 $A = \{0, 2, 4, 6, 9\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, 求 $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.
4. 已知 $A = \{x \mid x \geq -1\}$, $B = \{x \mid x < 3\}$, 求 $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.
5. 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{d, e, f\}$, 验证:
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

6. 如果 $X=Y=\{3, 0, 2\}$, 求 $X \times Y$.

7. 设集合 $A=\{\text{北京, 上海}\}$, $B=\{\text{南京, 广州, 深圳}\}$. 求 $A \times B$ 与 $B \times A$.

第二节 实数集

一、 实数与数轴

人们对于数的认识是逐步发展的, 先是自然数, 继而发展到有理数(即正、负整数), 正、负分数及零, 再进一步就发展到无理数. 有理数可以表

示为分数 $\frac{p}{q}$, 其中 p, q 为整数, 无理数不能表示成为这种形式. 我们熟知

的无理数有 $\pi, \sqrt{2}$ 等. 由于分数可表示为小数或无限循环小数, 因此, 有理数总可以表示为小数或无限循环小数. 而无理数必定为无限不循环小数. 有理数与无理数统称为实数.

设有一条直线, 在这条直线上取定一点 O , 称为原点, 规定一个正方向, 再规定一个长度, 称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.

任何一个有理数都可以在数轴上找到一个点与之对应, 这样的点称为有理点. 反之, 数轴上任何一个有理点也必然对应于一个有理数. 在任意两个有理数之间可以找到无穷多个有理数, 这就是有理数的稠密性. 同样, 在数轴上任意两个有理点之间总可找到无穷多个有理点, 即有理点在数轴上是处处稠密的. 虽然有理点在数轴上处处稠密, 但是有理点尚未充满数轴. 数轴上除了有理点之外还有大量的“空隙”, 这些空隙处的点就是无理点, 与无理点相对应的数就是无理数.

有理数与无理数一起作为实数充满数轴而且没有空隙, 这就是实数的连续性.

每一个实数必是数轴上某一个点的坐标; 反之, 数轴上每一点的坐标也必是一个实数, 这就是说全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.

为了简单起见, 常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别, 用相同的符号表示.

二、 绝对值

设 $a \in \mathbf{R}$, 符号 $|a|$ 表示 a 的绝对值, 定义

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geq 0, \\ -a, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

在几何上, $|a|$ 表示点 a 至原点 O 的距离; 例如, 点 -1 和点 1 至原点的距

离都是1, $|-1|=1$, $|1|=1$. 由算术根的意义可知

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

可见, 永远有 $|a| \geq 0$.

绝对值具有下述性质:

- (1) $-|a| \leq a \leq |a|$;
- (2) $|a| \leq b$ (b 是常数, 且 $b > 0$) 等价于 $-b \leq a \leq b$;
 $|a| \geq b$ (b 是常数, 且 $b > 0$) 等价于 $a \leq -b$ 与 $a \geq b$;
- (3) $|ab| = |a| |b|$;
- (4) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$);
- (5) $|a+b| \leq |a| + |b|$; $|a-b| \geq |a| - |b|$.

下面仅证性质(5).

证 由性质(1)知

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|,$$

两式相加, 得 $-(|a| + |b|) \leq a+b \leq |a| + |b|$,

所以由性质(2)得

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

又 $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$,

移项即得

$$|a-b| \geq |a| - |b|.$$

集合 $\{x | a < x < b\}$ 简记作 (a, b) , 称为开区间; 集合 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 简记作 $[a, b]$, 称为闭区间. 类似还有 $(a, b]$ 与 $[a, b)$ 称为半开区间; $(-\infty, a)$ 与 $(a, +\infty)$ 称为半无穷区间; $(-\infty, +\infty)$ 称为无穷区间.

上述任何一个区间都可以在数轴上表示出来, 如图 1-2 所示.

设 x_0 为某一实数, 集合 $\{x | |x - x_0| < \delta\}$ 可以用开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 或不等式 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 表示, 称为点 x_0 的 δ 邻域, 通常简记作 $U(x_0, \delta)$. 在数轴上, $U(x_0, \delta)$ 表示以点 x_0 为对称中心, 以 δ 为半径画出的开区间, 如图 1-3 所示.

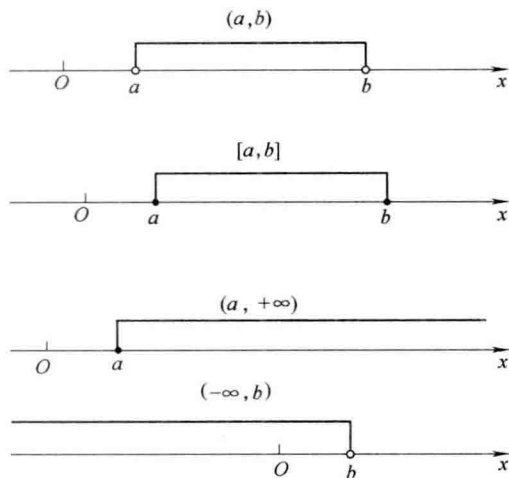


图 1-2

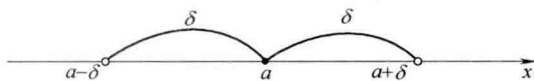


图 1-3

常用的还有空心邻域 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, 将点 x_0 排除在外, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$.

习题 1-2

1. 解下列不等式:

- (1) $|x - 4| < 7$; (2) $0 < (x - 2)^2 < 4$;
 (3) $|x + 1| > 2$; (4) $|ax - x_0| < \delta$ ($a > 0, \delta > 0, x_0$ 为常数).

2. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

- (1) $|x| \leq 10$; (2) $|x - 3| \leq 1$;
 (3) $|x - a| < \varepsilon$, a 为常数, $\varepsilon > 0$; (4) $|x + 3| > 5$.

3. 用区间表示出邻域 $U(2, 1)$, $U(-1, 2)$.

第三节
函数一、
一元函数的
定义

在观察自然现象或研究科学技术与各种应用问题的过程中,会遇到各种不同的量.有的量不变化,始终保持一定的数值,这种量称为常量,如圆周率 π ,重力加速度 g 等;有的量不断变化着,可以取不同的数值,这种量称为变量.我们常用 x, y, t 等表示变量,用 a, b, c 等表示常量.

通常,一些客观事物所反映出的变量往往不是孤立的,它们常相互依赖并按一定规律变化,这就是变量间的函数关系.例如:

例1 当圆的半径 r 变化时,圆的周长 C 也跟着变化.这两个变量之间的关系为

$$C = 2\pi r, 0 < r < +\infty.$$

其中 π 是圆周率,是常量.

例2 在某地乘坐出租车,3km 之内付 7 元,3km 以上,超出的部分按 1.4 元/km 计价.设 x, y 分别表示某乘客的里程与应付的车费,它们都是变量,其对应的关系为,当 $0 < x \leq 3$ 时, $y = 7$; 当 $x > 3$ 时, $y = 7 + 1.4(x - 3) = 1.4x + 2.8$. 即

$$y = \begin{cases} 7, & 0 < x \leq 3, \\ 1.4x + 2.8, & x > 3. \end{cases}$$

上述两例反映了变量之间的相互依赖关系,这些关系确立了相应的法则,当其中一个变量在一定范围内取值时,另一变量相应地有确定的值与之对应.两个变量之间的这种对应关系就是数学上的函数关系.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$. x 叫作自变量, y 叫作因变量,数集 D 叫作这个函数的定义域,对应的函数值组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的函数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $f(x)|_{x=x_0}$. 在平面直角坐标系 Oxy 中以自变量 x 为横轴,因变量 y 为纵轴,则平面点集 $L = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形(见图 1-4). 函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,如 F, φ 等.

下面看几个函数的例子.

例3 设 c 为一常数,函数 $y = c$ 的定义域为所有实数,对任意实数 x, y 都只有一个值 c 与之对应,因此函数的值域为一个元素.它的图形为一条平行于 x 轴的直线,如图 1-5 所示.

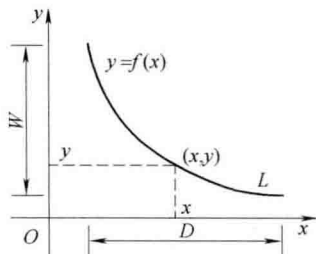


图 1-4

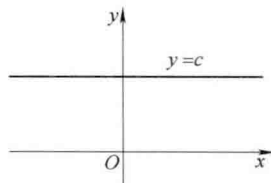


图 1-5

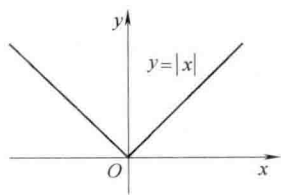


图 1-6

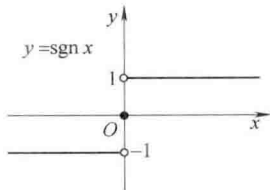


图 1-7

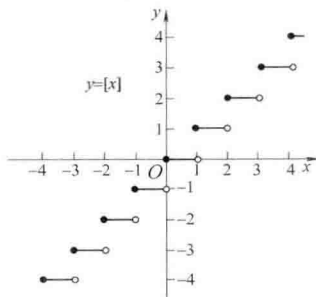


图 1-8

例 4 函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$,

值域 $W = [0, +\infty)$, 它的图形如图 1-6 所示.

例 5 函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 称为符号函数, 其定义域为 $D =$

$(-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 对于任何实数 x , 有 $x = |x| \operatorname{sgn} x$. 它的图形如图 1-7 所示, 在点 $x=0$ 处曲线是断开的.

例 6 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数, 记作 $[x]$. 如 $[0.7] = 0$, $[\pi] = 3$, $[-1] = -1$, $[-2.8] = -3$ 等. 因此, 取整函数 $y = [x]$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 值域 $W = \mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-8 所示, 在 x 为整数值处图形发生跳跃.

用几个式子来表示一个(注意不是几个)函数, 也称为分段函数, 这也是一种常见的函数表达方式, 如例 4 ~ 例 6. 这种表达方式在应用中更为常见.

例 7 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x^2, & 2 < x \leq 4, \end{cases}$ 求 $f(x-1)$.

解

$$f(x-1) = \begin{cases} (x-1)+2, & 0 \leq x-1 \leq 2, \\ (x-1)^2, & 2 < x-1 \leq 4, \end{cases}$$

整理得

$$f(x-1) = \begin{cases} x+1, & 1 \leq x \leq 3, \\ (x-1)^2, & 3 < x \leq 5. \end{cases}$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时, 对应的函数值只有一个, 这种函数就叫作单值函数, 否则叫作多值函数. 前面几例都是单值函数的例子. 下面看一个多值函数的例子.

例 8 在直角坐标系中, 抛物线的方程是 $y^2 = x$, 该方程在区间 $[0, +\infty)$ 上确定了以 x 为自变量 y 为因变量的函数. 当 $x=0$ 时, 对应的函数值只有一个, 但当 x 取开区间 $(0, +\infty)$ 内的任何一个值时, 对应的函数值就有两个, 即 $y = \pm\sqrt{x}$. 所以这个函数是多值函数.

对于多值函数, 通常分为若干个单值函数来讨论. 如上例中多值函数可分为两个单值函数: $y = \sqrt{x}$ 和 $y = -\sqrt{x}$. 以后若无特别说明, 函数都是指单值函数.