"十二五"应用型本科系列规划教材

微积分

Calculus

主　编　吴建成　李志林

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型本科系列规划教材

微　积　分

主　编　吴建成　李志林
副主编　涂庆伟　王　强
参　编　费忠华　刘　佳　沈永梅

机 械 工 业 出 版 社

本书根据应用型本科院校对微积分课程教学的要求编写，内容符合最新的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量与空间解析几何初步、多元函数微分法及其应用、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等11章，并配有习题与答案. 考虑到不同专业和考研学生的需要，教材选编了部分超出要求的内容，这些内容标有 * 号，供选学.

本书适合作为应用型本科院校经济管理类专业的微积分课程教材，也可作为相关科研教学人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分/吴建成，李志林主编. —北京：机械工业出版社，2015.8

“十二五”应用型本科系列规划教材

ISBN 978-7-111-51025-3

Ⅰ.①微… Ⅱ.①吴…②李… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第176207号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 陈崇昱
版式设计：霍永明 责任校对：任秀丽 陈秀丽
封面设计：路恩中 责任印制：刘 岚
北京京丰印刷厂印刷
2015年8月第1版·第1次印刷
190mm×215mm·19.333印张·479千字
标准书号：ISBN 978-7-111-51025-3
定价：59.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机工官博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金书网：www.golden-book.com

前　　言

随着社会经济的迅速发展，数学在经济、管理领域中的应用日渐突出．本书是顺应这一发展趋势，在认真总结部分本科院校经济管理类专业微积分教材的基础上，结合应用型本科院校的教学特点而编写的．

本教材的特点：

1. 针对性强．教材紧密结合经济管理类专业，根据《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》（以下简称《基本要求》）而编写．书中还专门介绍了经济管理应用中的常用函数、边际分析、弹性分析，以及定积分、微分方程、差分方程、最小二乘法等在经济管理科学中的应用等内容，并围绕应用问题选编了一定量的例题与习题．

2. 根据应用型人才培养的特点，教材中淡化了计算技巧，突出了数学的基本原理和思想方法，注重直观描述，力求通俗易懂，便于学生自学．教材中对于一些重要概念、定理和方法尽量用一些直观、通俗的语言加以描述，如极限的定义、函数可导与不可导的几何表示、复合函数求导的“链式法则”等，一些定义、定理和方法也常常借助于几何图形加以描述，如连续的概念，中值定理的引入、条件与结论等．

3. 考虑到不同专业和不同层次学生的需要，本书选编了部分超出《基本要求》的内容，各章中还增加了综合例题供考研学生选学，每章的复习题也分为一般和较难两个层次．这样处理使得教材有较宽的适应面．凡超出《基本要求》的内容均标有＊号供学生选学．

尽管我们对全书进行了认真仔细的推敲、审阅，但难免还会存在一些疏漏．书中存在的问题欢迎专家、同行和广大读者给予批评指正．

编　者

目　　录

第一章 函　　数

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象．集合是现代数学的基本语言．本章将在中学已有基础上，复习和介绍集合、函数及其相关知识，并做适当延伸，为以后各章的学习打下必要的基础．

第一节 集合

一、集合的概念

一般地，所谓**集合**（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的**元素**．例如：彩电，电冰箱，录像机构成一个集合，其中彩电是这个集合的元素．直线 $x+y-1=0$ 上所有的点构成一个集合，其中点 $(0,1)$ 是这个集合的元素．习惯上用大写字母如 A、B、C 等表示集合，用小写字母如 a、b、c、x、y、t 等表示集合的元素．

设 M 是一集合，事物 a 是集合 M 的元素，则记为 $a\in M$（读作 a 属于 M）．事物 a 不是集合 M 的元素，记为 $a\notin M$（读作 a 不属于 M）．

集合的表示方法有两种：一种是**列举法**（又称**穷举法**），就是在花括号内把集合中所有的元素一一列举出来，元素之间用逗号隔开．如 $M=\{a, b, c\}$，$A=\{$彩电，电冰箱，录像机$\}$，自然数集 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$，等等．

另一种方法是**描述法**，就是在花括号内，左边写出集合的一个代表元素，右边写出集合的元素所具有的性质，中间用竖线“|”分开．以 x 表示 A 的元素，记作

$$A=\{x \mid x\text{ 所具有的性质}\}.$$

例如，满足不等式 $1<x<3$ 的一切实数构成的集合可以表示成 $A=\{x \mid 1<x<3\}$．$M=\{(x, y) \mid x^2+y^2=R^2,\ x, y\text{ 为实数}\}$ 代表了 xOy 平面上以原点为中心、半径等于 R 的圆周上点的全体所组成的集合．

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 I．全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集．例如，讨论的问题仅限于正整数，则全体正整数的集合为全集；讨论的问题包括正整数和负整数，则全体正整数就不是全集．

不含有任何元素的集合称为空集. 记作$\varnothing$. 例如，集合$\{x \mid x>4$ 且 $x<1\}=\varnothing$.

二、集合的运算

如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素，则称集合 B 是集合 A 的**子集**；记作 $B\subset A$，或 $A\supset B$.

对于任一集合 A，因为$\varnothing\subset A$，$A\subset A$，所以$\varnothing$，A 都是集合 A 的子集.

如果 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称集合 A 和集合 B **相等**，记作 $A=B$. 表示集合 A 和集合 B 中元素完全相同. 若 $A\subset B$，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集.

设 A、B 为两个集合，由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

设 A、B 为两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集(简称交)，记作 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

设 A、B 为两个集合，由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的差集(简称差)，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

假设考虑的集合都是全集 I 的子集，称全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^{C}，即

$$A^{\mathrm{C}}=I\setminus A=\{x \mid x\in I,\ x\notin A,\ A\subset I\}.$$

集合的运算结果，可用图 1-1 直观表示(图中阴影部分为运算结果).

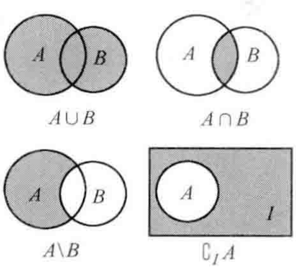

图 1-1

全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 我们有如下关系：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

若 $I=\{0,1,2,3,\cdots\}$是所有的自然数集，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{3,4\}$. $A\setminus B=\{1,2\}$，$A^{\mathrm{C}}=I\setminus A=\{5,6,7,\cdots\}$.

集合的运算有下列性质：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 幂等律 $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(5) 吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$;

(6) 对偶律(德·摩根律)

$$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C},$$
$$(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}.$$

集合的笛卡儿乘积:将两个元素 x 和 y 按前后顺序排列成一个元素组 (x, y),称为二元有序数组. (x, y)与(y, x)是两个不同的二元有序数组.

类似地,有三元有序数组(x, y, z), $\cdots$, n 元有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

一般地,设有集合 A 和 B. $x\in A$, $y\in B$, 所有二元有序数组(x, y)构成的集合称为集合 A 与 B 的笛卡儿乘积,记为 $A\times B$. 即

$$A\times B=\{(x, y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

例如,若 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3\}$, 则

$$A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)\}.$$

设 $\mathbf{R}$ 为全体实数的集合,则笛卡儿直角坐标系的坐标平面可记作

$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\},$$

也记作为 $\mathbf{R}^2$.

类似地,可以定义

$$A\times B\times C=\{(x, y, z)\mid x\in A, y\in B, z\in C\}.$$

同样有 $\mathbf{R}^3=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y, z)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, z\in\mathbf{R}\}$.

习题 1-1

1. 写出 $A=\{0, 1, 2\}$ 的一切子集.

2. 设 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3, 5\}$, $C=\{2, 4, 6\}$, 求 $A\cup B$; $A\cap B$;$A\cup B\cup C$; $A\cap B\cap C$; $A\setminus B$.

3. 已知 $A=\{0, 2, 4, 6, 9\}$, $B=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, 求 $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$.

4. 已知 $A=\{x\mid x\geqslant -1\}$, $B=\{x\mid x<3\}$, 求 $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$.

5. 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d, e\}$, $C=\{d, e, f\}$, 验证: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

6. 如果 $X=Y=\{3,0,2\}$，求 $X\times Y$.

7. 设集合 $A=\{$北京，上海$\}$，$B=\{$南京，广州，深圳$\}$. 求 $A\times B$ 与 $B\times A$.

第二节 实数集

一、实数与数轴

人们对于数的认识是逐步发展的，先是自然数，继而发展到有理数(即正、负整数)，正、负分数及零，再进一步就发展到无理数. 有理数可以表示为分数$\dfrac{p}{q}$，其中 p，q 为整数，无理数不能表示成为这种形式. 我们熟知的无理数有 π，$\sqrt{2}$等. 由于分数可表示为小数或无限循环小数，因此，有理数总可以表示为小数或无限循环小数. 而无理数必定为无限不循环小数. 有理数与无理数统称为实数.

设有一条直线，在这条直线上取定一点 O，称为原点，规定一个正方向，再规定一个长度，称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴.

任何一个有理数都可以在数轴上找到一个点与之对应，这样的点称为有理点. 反之，数轴上任何一个有理点也必然对应于一个有理数. 在任意两个有理数之间可以找到无穷多个有理数，这就是有理数的稠密性. 同样，在数轴上任意两个有理点之间总可找到无穷多个有理点，即有理点在数轴上是处处稠密的. 虽然有理点在数轴上处处稠密，但是有理点尚未充满数轴. 数轴上除了有理点之外还有大量的“空隙”，这些空隙处的点就是无理点，与无理点相对应的数就是无理数.

有理数与无理数一起作为实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连续性.

每一个实数必是数轴上某一个点的坐标；反之，数轴上每一点的坐标也必是一个实数，这就是说全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系.

为了简单起见，常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别，用相同的符号表示.

二、绝对值

设 $a\in\mathbf{R}$，符号 $|a|$ 表示 a 的**绝对值**，定义

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{当 } a<0.\end{cases}$$

在几何上，$|a|$表示点 a 至原点 O 的距离；例如，点 -1 和点 1 至原点的距

离都是1，$|-1|=1$，$|1|=1$. 由算术根的意义可知

$$|a|=\sqrt{a^2}.$$

可见，永远有$|a|\geqslant 0$.

绝对值具有下述性质：

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(2) $|a|\leqslant b$(b是常数，且$b>0$)等价于$-b\leqslant a\leqslant b$；

$|a|\geqslant b$(b是常数，且$b>0$)等价于$a\leqslant -b$与$a\geqslant b$；

(3) $|ab|=|a||b|$；

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}(b\neq 0)$；

(5) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$；$|a-b|\geqslant |a|-|b|$.

下面仅证性质(5).

证 由性质(1)知

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

两式相加，得 $-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|$,

所以由性质(2)得

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

又 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|$,

移项即得

$$|a-b|\geqslant |a|-|b|.$$

三、区间与邻域

集合$\{x\mid a<x<b\}$简记作(a, b)，称为**开区间**；集合$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$简记作$[a, b]$，称为**闭区间**. 类似还有$(a, b]$与$[a, b)$称为**半开区间**；$(-\infty, a)$与$(a, +\infty)$称为**半无穷区间**；$(-\infty, +\infty)$称为**无穷区间**.

上述任何一个区间都可以在数轴上表示出来，如图1-2所示.

设x_0为某一实数，集合$\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$可以用开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$或不等式$x_0-\delta<x<x_0+\delta$表示，称为点x_0的**δ邻域**，通常简记作$U(x_0, \delta)$. 在数轴上，$U(x_0, \delta)$表示以点x_0为对称中心，以δ为半径画出的开区间，如图1-3所示.

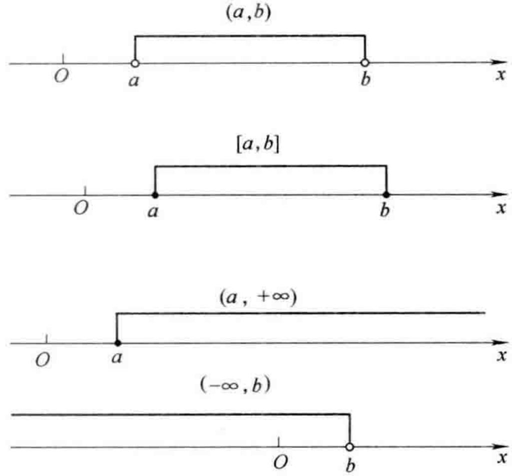

图 1-2

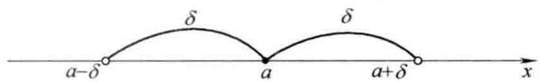

图 1-3

常用的还有空心邻域$(x_0-\delta,\ x_0)\cup(x_0,\ x_0+\delta)$，将点$x_0$排除在外，记作$\mathring{U}(x_0,\ \delta)$.

习题 1-2

1. 解下列不等式：

(1) $|x-4|<7$;　　(2) $0<(x-2)^2<4$;

(3) $|x+1|>2$;　　(4) $|ax-x_0|<\delta(a>0,\ \delta>0,\ x_0$为常数).

2. 用区间表示满足下列不等式的所有x的集合.

(1) $|x|\leqslant 10$;　　(2) $|x-3|\leqslant 1$;

(3) $|x-a|<\varepsilon$, a为常数, $\varepsilon>0$; (4) $|x+3|>5$.

3. 用区间表示出邻域$U(2,\ 1)$, $U(-1,\ 2)$.

第三节 函数

一、一元函数的定义

在观察自然现象或研究科学技术与各种应用问题的过程中，会遇到各种不同的量. 有的量不变化，始终保持一定的数值，这种量称为**常量**，如圆周率 π，重力加速度 g 等；有的量不断变化着，可以取不同的数值，这种量称为**变量**. 我们常用 x，y，t 等表示变量，用 a，b，c 等表示常量.

通常，一些客观事物所反映出的变量往往不是孤立的，它们常相互依赖并按一定规律变化，这就是变量间的函数关系. 例如：

例 1 当圆的半径 r 变化时，圆的周长 C 也跟着变化. 这两个变量之间的关系为

$$C=2\pi r,\ 0<r<+\infty.$$

其中 π 是圆周率，是常量.

例 2 在某地乘坐出租车，3km 之内付 7 元，3km 以上，超出的部分按 1.4 元/km 计价. 设 x，y 分别表示某乘客的里程与应付的车费，它们都是变量，其对应的关系为，当 $0<x\leqslant 3$ 时，$y=7$；当 $x>3$ 时，$y=7+1.4(x-3)=1.4x+2.8$. 即

$$y=\begin{cases}7, & 0<x\leqslant 3,\\ 1.4x+2.8, & x>3.\end{cases}$$

上述两例反映了变量之间的相互依赖关系，这些关系确立了相应的法则，当其中一个变量在一定范围内取值时，另一变量相应地有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是数学上的函数关系.

定义 **设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫作自变量，y 叫作因变量，数集 D 叫作这个函数的定义域，对应的函数值组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域.**

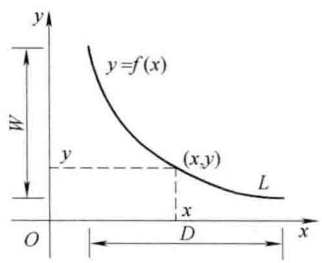

图 1-4

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的函数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $f(x)\mid_{x=x_0}$. 在平面直角坐标系 Oxy 中以自变量 x 为横轴，因变量 y 为纵轴，则平面点集 $L=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形（见图 1-4）. 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，如 F，φ 等.

下面看几个函数的例子.

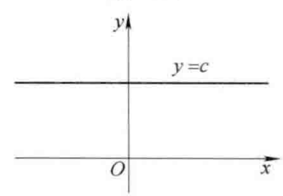

图 1-5

例 3 设 c 为一常数，函数 $y=c$ 的定义域为所有实数，对任意实数 x，y 都只有一个值 c 与之对应，因此函数的值域为一个元素. 它的图形为一条平行于 x 轴的直线，如图 1-5 所示.

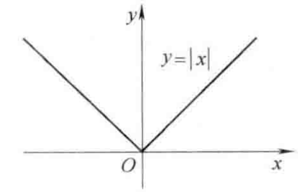

图 1-6

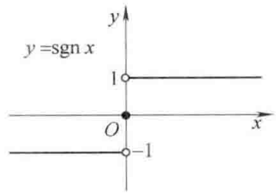

图 1-7

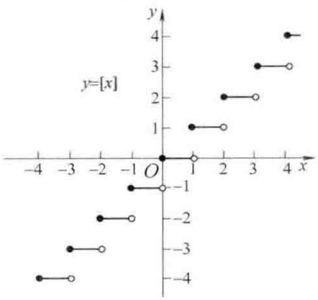

图 1-8

例 4 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=[0, +\infty)$，它的图形如图 1-6 所示.

例 5 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 称为符号函数，其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $W=\{-1, 0, 1\}$，对于任何实数 x，有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$. 它的图形如图 1-7 所示，在点 $x=0$ 处曲线是断开的.

例 6 设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记作$[x]$. 如$[0.7]=0$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-2.8]=-3$ 等. 因此，取整函数 $y=[x]$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域 $W=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-8 所示，在 x 为整数值处图形发生跳跃.

用几个式子来表示一个(注意不是几个)函数，也称为分段函数，这也是一种常见的函数表达方式，如例 4 ~ 例 6. 这种表达方式在应用中更为常见.

例 7 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ x^2, & 2<x\leqslant 4, \end{cases}$ 求 $f(x-1)$.

解

$$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+2, & 0\leqslant x-1\leqslant 2, \\ (x-1)^2, & 2<x-1\leqslant 4, \end{cases}$$

整理得

$$f(x-1)=\begin{cases} x+1, & 1\leqslant x\leqslant 3, \\ (x-1)^2, & 3<x\leqslant 5. \end{cases}$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数就叫作单值函数，否则叫作多值函数. 前面几例都是单值函数的例子. 下面看一个多值函数的例子.

例 8 在直角坐标系中，抛物线的方程是 $y^2=x$，该方程在区间$[0, +\infty)$上确定了以 x 为自变量 y 为因变量的函数. 当 $x=0$ 时，对应的函数值只有一个，但当 x 取开区间$(0, +\infty)$内的任何一个值时，对应的函数值就有两个，即 $y=\pm\sqrt{x}$. 所以这个函数是多值函数.

对于多值函数，通常分为若干个单值函数来讨论. 如上例中多值函数可分为两个单值函数：$y=\sqrt{x}$和 $y=-\sqrt{x}$. 以后若无特别说明，函数都是指单值函数.