高等学校教材

高等数学

化、地、生类专业

第二版 上册

主　编　姜作廉
副主编　胡龙桥　姜　山

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

化、地、生类专业

第二版

上 册

主 编 姜作廉
副主编 胡龙桥 姜 山

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是根据作者多年讲授该课程的经验和体会，在2007年出版的教材《高等数学（化、地、生类专业）（上册）》的基础上修订而成。

第一版内容主要包括：函数、极限与函数连续性和一元函数微积分学。

本次再版在第一版的基础上做了必要的修订和部分章节的改动：1. 在许多章节增加了应用例题；2. 习题配备上，将每章的习题分为A类与B类；3. 分章上作了适当的处理，第一版的第7章（定积分的应用）归并在第6章的最后，第8章（向量代数）归并在原来的第9章（空间解析几何）中。

本书概念清楚、表达准确、例题典型、循序渐进、难易适当、富有系统性。在强化基本概念、基本理论、基本方法和基本运算的同时，注重数学在化学、生物科学等学科领域中的应用。每章都精选一定数量的习题，并附有参考答案与提示。

本书可作为综合性大学和高等师范院校的化学、生物科学、环境工程与环境科学、地理科学、医学、药学、心理学等专业本科生的高等数学教材，也可以作为工科院校相关专业的高等数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册／姜作廉主编. --2版. --北京：高等教育出版社，2015.7

化、地、生等类专业

ISBN 978-7-04-039545-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第069600号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　封面设计 张申申　版式设计 余 杨
插图绘制 郝 林　责任校对 杨凤玲　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787mm×960mm 1/16		
印　　张	16.5	版　　次	2007年8月第1版
字　　数	300千字		2015年7月第2版
购书热线	010-58581118	印　　次	2015年7月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	25.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 39545-00

第二版前言

根据南开大学培养人才和提升教学理念的要求，通过在南开大学化学学院、生命科学学院、环境科学与工程学院、医学院、药学院等学院的本科生教学实践，为了进一步反映近几年来的使用教材的经验，提高这套教材的质量，使之符合教学规律和教育改革的要求，我们重新审查了全书的各章节的文字叙述与例题以及习题的配置，做了必要的修改和部分章节的重新编写。第二版保留了原教材的特色：将微积分的基本理论和方法作为教材的核心内容，概念叙述清晰，表达问题准确，例题选择典型；教材内容组织由浅入深，难易得当，富有系统性。在此基础上，新的特色体现在如下三个方面：

首先，我们重新编写了原书中的第 5 章（不定积分）、第 6 章（定积分）、第 7 章（定积分的应用）、第 11 章（重积分），以使得新版教材在知识点关联上更加协调，在体系上更加完整。

其次，我们在一些章节中增加了生物科学、环境科学和药学等方面的应用例题，这些应用例题在数学上没有难度，而是相关知识点的直接应用。这样就为高等数学教学与相关专业需求更好地结合提供了实例，而且还可以提高本科生学习高等数学的兴趣。

再次，我们重新编排了各章的习题，将每章的习题分为 A 类和 B 类。A 类习题主要是满足教学内容的要求（带有“*”号的习题除外）。这类习题适当增加了基本题目，全章习题都是按照每一节的教学内容顺序进行分类给出，这方便了读者的选用。B 类习题主要是历年全国硕士研究生入学统一考试的典型题，这不仅为学生深入学习提供了扩展空间，也为教师进行系统化与个性化相结合的教学方式提供了方便。所有习题都给出了参考答案，稍有难度的习题均提供详细的提示，通过这些提示可以了解相关的知识点与解题方法，这有助于教与学的深化。

按照通常作法，把原教材的定积分和定积分的应用两章归并为一章；把向量代数和空间解析几何两章归并为一章。

全书分为上、下册，每册包括六章，主要内容包括极限与函数的连续性、一元函数微分学与积分学、多元函数微分学与积分学、无穷级数、常微分方程以及向量代数与空间解析几何。建议使用本教材的总教学时数为 120 学时。如果略去

书中带有“＊”号的内容，讲授全书约需90学时，而且不影响教学内容的系统性。

本书可作为综合性大学和高等师范院校的化学、生物科学、环境工程与环境科学、地理科学、医学、药学、心理学等专业本科生的高等数学教材，也可以作为工科院校相关专业的本科生的高等数学教材。

南开大学数学科学学院的胡龙桥教授与多位教师长期从事生化类的教学工作，积累了大量教学经验，为本书的编写提供了大力的帮助，在此向他们表示真诚的谢意。

本书的编写得到了南开大学数学科学学院的大力支持，高等数学教学办主任薛锋副研究员对编写工作给予大力帮助，在此我们一并表示衷心的感谢。

在本书编写过程中，我们参考了一些同类书刊，借鉴了同行们的经验，在此深表谢意。限于编者的水平，书中不免会有错误和不妥之处，恳切希望广大读者提出批评和指正。

作　者

2014年3月于天津

前　言

近年来，随着我国科学技术与高等教育事业的迅速发展，对化学、生物学、地理学等学科领域的本科生培养的质量有了相应的提高，也对其数学能力与素质提出了新的要求。因此，我们根据南开大学化学学院、生命科学学院、环境科学与工程学院、医学院等学科的实际情况和需求，通过长期的教学实践，对高等数学的教学体系和教学内容进行了反复的论证，作为新世纪南开大学教学改革的一项成果而编写了这本教材。

本书以微积分学的基本理论和方法为核心，概念清楚，表达准确，例题典型，由浅入深，难易适当，富有系统性。在注重介绍基本概念、基本理论、基本方法和基本运算的同时，注意强调数学在化学、生物学、物理学等领域中的应用。为了便于学生理解和掌握所学内容，每章都精选一定数量的习题，习题类型广泛，紧扣教材，并附有参考答案和较为详细的提示。

全书分为上、下册，主要内容包括极限与函数的连续性，一元函数微分学与积分学，多元函数微分学与积分学，无穷级数，常微分方程以及空间解析几何（含向量代数）。建议使用本教材的总教学时数为120学时。如果略去书中带有“*”号的内容，讲授全书约需90学时，而且不影响教学内容的系统性。

本书可作为综合性大学和高等师范院校的化学、生物科学、环境工程与环境科学、地理科学、医学、心理学等专业本科生的高等数学教材，也可以作为工科院校相关专业的高等数学教材。

南开大学数学学院的胡龙桥教授审校了初稿与初版稿，作为本书稿的主审，发挥了重要作用，在此表示真诚的谢意。

本书的前身是教材《高等数学（生化类）》（上、下册，姜作廉主编，天津大学出版社出版），借此机会向该教材的全体作者表示诚挚的谢意。

本书的编写得到了南开大学数学科学学院的大力支持。南开大学数学学院的张效成教授和薛锋副研究员对编写工作给予大力帮助。高等教育出版社的马丽同志对编写本书提出了有益的建议，从而增加了本书的适用性。在这里我们一并表示衷心的感谢。

在本书编写过程中，我们参考了一些同类书刊，借鉴了同行们的经验，在此深表谢意。限于编者的水平，书中不免会有错误和不妥之处，恳切希望广大读者提出批评和指正。

编　者

2007 年 2 月于南开大学数学科学学院

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站,请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/39545
2. 输入数字课程账号(见封底明码)、密码、验证码
3. 点击"进入课程"
4. 开始课程学习

账号自登录之日起一年内有效,过期作废。

使用本账号如有任何问题,请发邮件至:jiacp@hep.com.cn

目　　录

第1章

函　数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分学研究的重要对象. 本章主要介绍实数和函数的概念以及函数的基本特征.

1.1　实数

1. 实数与区间

集合是数学中的一个基本概念，我们通过例子来说明这个概念. 比如，一个书柜中的书构成一个集合；所有能产生氧气的植物也可以构成一个集合. 一般地说，集合（简称为集）是指具有某种特定性质的事物的全体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 我们采用记号

$$M=\{x\,|\,x\text{ 所具有的特征}\}.$$

如果事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a\in M$；事物 a 不是 M 的元素，记作 $a\notin M$.

在生产实践中，人类最早认识的是正整数：1，2，3，…. 由于加减法运算的需要，增添了 0 与负整数，于是将正整数集扩充为整数集 $\mathbf{Z}$. 对整数做除法运算，便产生了有理数集 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbf{Z},q\neq0\right\},$$

有理数的另一种表示是无限循环小数. 古希腊人发现了边长为 1 的正方形的对角线的长度不能用$\frac{p}{q}(p,q\in\mathbf{Z})$表示，从而证明了$\sqrt{2}$不是有理数（可以用反证法证明：设$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$，则存在 $p,q\in\mathbf{Z}$，而且 p,q 互素，$\frac{p}{q}=\sqrt{2}$. 于是 $p^2/q^2=2$，$p^2=2q^2$. 可知 p 为偶数，设 $p=2n$，则 $4n^2=2q^2$，$q^2=2n^2$，因而 q 也为偶数. 这样，p,q 有公因子 2，与其互素相矛盾.）. 这样人们便发现了无理数的存在. 无理数集是由无限不循环小数的全体所构成. 有理数集与无理数集的并集称为实数集，通常用 $\mathbf{R}$ 表示.

给定两个实数 a 与 $b(a<b)$，将满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体 x 组成的数集称为闭区

间,记为$[a,b]$,即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$. $[a,b]$在数轴上表示从a到b的有限线段(包含两个端点). 满足$a<x<b$的全体x的数集称为开区间,记作(a,b). 满足$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的全体x的数集称为半开或半闭区间,依次记作$(a,b]$和$[a,b)$. 满足$x>a$的全体x的数集称为无穷区间,记作$(a,+\infty)$. 此外,无穷区间还有$(-\infty,b)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,+\infty)$等,其含义类似. 需要注意,"$+\infty$"与"$-\infty$"都是符号,不能当作数来看待.

2. 绝对值与邻域

实数a的绝对值记作$|a|$,它可以表示为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,a的绝对值$|a|$就是点a到原点的距离. 因此,给定一个正数δ,满足$|x|\leqslant\delta$的全体x的数集恰好是闭区间$[-\delta,\delta]$. 由此可知

$$|x|\leqslant\delta \Leftrightarrow -\delta\leqslant x\leqslant\delta,\delta>0.$$

以后经常要用到形如$|x-x_0|<\delta$的绝对值不等式,其中x_0,δ是给定的数,$\delta>0$. 根据上面的等价条件有

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta.$$

这表示,满足$|x-x_0|<\delta$的全部x组成的数集是一个以x_0为中心,长度为2δ的开区间(见图1.1). 将这个开区间称为点x_0的δ邻域,记作$U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}.$$

将点集$\cup(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为点$x_0$的空心$\delta$邻域.

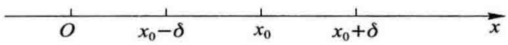

图1.1

1.2 变量与函数

1. 常量与变量

在生产实践和科学实验中,人们常常遇到各种各样的量,如长度、面积、体积、时间、重量、温度、压力等. 在某个过程中,有的量保持固定的值,称为常量;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,称为变量. 例如,将一个密封容器内的气体加热时,气体的体积和气体的分子数目是常量,而气体的温度和压力是变量. 值得注意的是,一个量是常量还是变量,这是相对的,有时候要根据具体情况作出分析. 例如,重力加速度在小范围地区内视为常量,但是在广大地域内就是变量.

2. 函数

在同一过程中所遇到的各种变量,它们通常不是相互独立变化,而是一个变量依赖于另外一个(或几个)变量进行对应变化.下面先考察几个具体例子.

例 1 在初速度为 0 的自由落体运动中,落体的下降距离 s 与时间 t 是两个变量,且有规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2(0\leqslant t\leqslant t_L),$$

其中 g 是重力加速度,t_L 是着地时间.根据上面的公式,可以求出在每一时刻 $t=t_1(0\leqslant t_1\leqslant t_L)$ 落体的下降距离.

例 2 一个地区一天中的气温 T 是随着时间 t 而变化的.某地区的气象台用自动记录器记录了某一天 24 小时的气温的变化情况.自动记录器记录下来的是一条曲线.虽然我们不可能找到像例 1 中那样的解析表达式,但是根据这个图形可以知道这个地区在这一天的每一时刻 t_0 的气温 T_0(见图 1.2).事实上,这种图示的方法在实际问题中经常使用,因为在实际问题中能找出像例 1 中由公式给出的函数关系毕竟是少数.

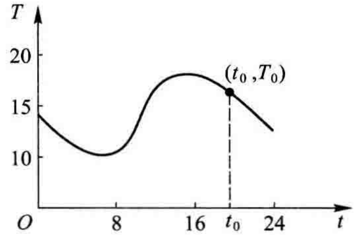

图 1.2

例 3 由实验可知,硝酸钾的溶解度随温度而变化,变化情况如表 1.1:

表 1.1

温度/℃	0	10	20	30	40	50	100
溶解度	13.9	21.2	31.6	45.6	61.3	83.5	245

根据表 1.1,可以看出硝酸钾的溶解度和温度的依赖关系是,温度每取不同的值,其对应的溶解度也不同.

这种变量间的相互关系,在自然现象中是非常普遍的,因此有必要从上述例子概括为一般概念来进行研究.

我们抛开每一个例子所包含的具体意义以及表达变量之间关系的不同形式,抓住它们的共同本质,就可以概括出函数概念.

定义 设在同一过程中有两个变量 x 与 y,f 为某一对应规则,又设 x 的变化范围是非空实数集 X.如果对于变量 x 在 X 中所取的每一个值,按照对应规则 f,变量 y 都有唯一确定的一个实数值与之对应,那么我们就称变量 y 是变量 x 的函数,这时 x 称为**自变量**,y 称为**函数**或**因变量**,记作

$$y=f(x)\ \ (x\in X),$$

其中 X 是函数的**定义域**,$f(X)=\{y\,|\,y=f(x),x\in X\}$ 称为函数的**值域**.

注意,除非特别说明,我们这里讨论的函数都是指单值函数,即对同一个自变量 x,不允许有两个不同的函数值 y 与之对应. 再来看前面的三个例子. 它们分别由解析表达式、曲线和表格给出函数关系. 一般来说,函数关系的表示方法大致就是这样三种. 在微积分学中我们主要研究由公式给出的函数,亦即具有解析表达式的函数.

通常情况下,一个由表达式给出的函数的定义域是使得该表达式有意义的自变量的一切取值,如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1\}$. 在实际问题中提出的函数的定义域由其实际意义来确定,如例 1 中的 $0\leqslant t\leqslant t_L$.

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的图形如图 1.3.

例 5 取整函数 $y=[x]$,$x\in(-\infty,+\infty)$,表示不超过 x 的最大整数,即 $[x]=\max\{z\,|\,z\leqslant x,z\in\mathbf{Z}\}$. 如 $[4.6]=4$,$[-4.6]=-5$. 其图形如图 1.4 所示.

例 6 已知函数

$$y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0\end{cases}$$

的图形如图 1.5.

像例 6 中的这种函数关系,其自变量在不同的范围内由不同的公式给出,我们把具有这种特征的函数称为**分段函数**. 实际上,例 4 和例 5 中的函数也是分段函数.

借助函数的图形可以方便地看出函数的某些特性. 因为函数图形具有直观性,所以常常借助函数的图形来研究函数.

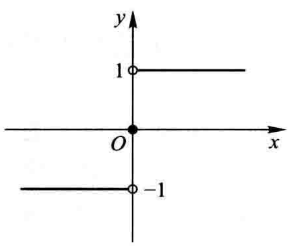

图 1.3

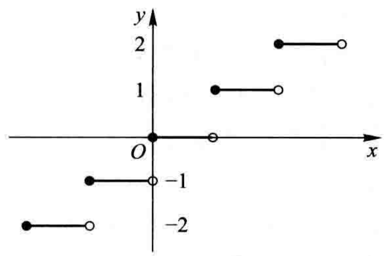

图 1.4

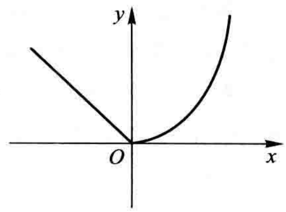

图 1.5

3. 函数的几种特性

（1）偶函数和奇函数

设函数 $f(x)$ 定义在对称区间 D 上，且满足 $f(-x)=f(x)$，$x\in D$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 例如 x^2，$\cos x$ 为偶函数，x^3，$\sin x$ 为奇函数，而 $x^2+\sin x$ 则既不是奇函数也不是偶函数. 从几何上看，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 此外偶函数和奇函数（在共同的对称区间 D 上）还有如下性质：

1）两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数；

2）偶函数与奇函数的乘积是奇函数；

3）一个函数总可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

性质 1）与 2）的证明是显然的，留给读者. 对于性质 3），我们有

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

不难看出上式等号右端第一项为偶函数，第二项为奇函数.

（2）周期函数

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，若存在不为零的常数 l，使得对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，并称 l 为 $f(x)$ 的一个周期.

通常我们说的周期是指最小正周期. 如函数 $y=\cos x$ 有周期 2π，而 $y=|\cos x|$ 有周期 π.

值得注意的是，并不是所有的周期函数都具有最小正周期. 例如狄利克雷（Dirichlet）函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, x \text{ 为有理数},\\ 0, x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

容易看出，任何有理数 r 都是它的周期，但它显然没有最小正周期（假如该函数有最小正周期 r，则 $\frac{r}{2}<r$，$\frac{r}{2}>0$，$\frac{r}{2}\in\mathbf{Q}$. 于是 $\frac{r}{2}$ 也是该函数的一个正周期，矛盾.）.

（3）单调函数

设函数 $y=f(x)\ (x\in X)$，如果对于 X 内任意两点 x_1，x_2，$x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上是**单调增加（或单调减少）的**，也称 $y=f(x)$ 为**单增函数（或单减函数）**. 在上面的定义中，如果去掉等号，即 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 X 上是严格单调增加（或

减少)的.单增函数和单减函数统称为**单调函数**.严格单增函数和严格单减函数统称为**严格单调函数**.例如函数 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上是严格单增的,而在$(-\infty,0]$上是严格单减的.由此可见函数 $y=f(x)$ 的单调性与所考虑的区间是有关的.

(4)有界函数

设函数 $y=f(x)$,$x\in X$.若存在一个实数 M,使得对一切 $x\in X$,都有

$$f(x)\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界的,并称 M 为 $f(x)$ 的一个上界.如函数 $y=\sin x+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$是有上界的,函数 $y=\frac{1}{x}$ 在$[1,2]$上也是有上界的,而函数 $y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$是无上界的.

不难看出,$\sqrt{2}$ 是 $\sin x+\cos x$ 的一个上界($\sin x+\cos x=\sqrt{2}(\sin x\cos 45°+\cos x\sin 45°)=\sqrt{2}\sin(x+45°)$.),且任何大于$\sqrt{2}$的实数也都是 $\sin x+\cos x$ 的上界.由此可见,具有上界的函数,它的上界不是唯一的.此外函数 $y=\frac{1}{x}$ 在$(0,1]$上显然没有上界(对任给 $M>0$,取 $x_0=\frac{1}{M+1}\in(0,1)$,则$\frac{1}{x_0}=M+1>M$.根据上面关于函数有上界的定义可知,$y=\frac{1}{x}$ 在$(0,1)$上无界.).通过上述分析可知一个函数是否有上界,与所讨论的区间有关.

类似地,若存在一个实数 N,使得对一切 $x\in X$,都有

$$f(x)\geqslant N,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有下界的,并称 N 是 $f(x)$ 的一个下界.如函数 $y=\sin x+\cos x$ 与 $y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上都是有下界的,但函数 $y=-e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上就是没有下界的.

既有上界又有下界的函数称为**有界函数**.这个定义的直接描述是这样,若存在两个实数 M 与 N,对一切 $x\in X$ 都有

$$N\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有界函数.例如,$y=\sin x+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界函数,而 $y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是无界函数.

关于上面有界函数的定义,还可以给出一个等价的定义:若存在实数$K>0$,对一切 $x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant K,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的.

1.3 反函数与复合函数

1. 反函数

在研究两个变量的函数关系时,可以根据问题的需要选定其中一个为自变量,而另一个就是因变量或函数. 比如在1.2节的例1中,我们选定时间 t 为自变量,则落体的下降距离 s 是时间 t 的函数,s 与 t 的对应关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定,这个函数记作 $s=f(t)$. 如果问题是求由落体的下降距离来确定所需要的时间,那么可以把距离 s 取作自变量而时间 t 取作函数或因变量. 于是,时间 t 是距离 s 的函数,该函数记作 $t=f^{-1}(s)$,其中 t 与 s 的对应规则 f^{-1} 是由 s 与 t 的对应规则 f 确定的,即由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2(0\leqslant t\leqslant t_L)$ 确定为 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}\left(0\leqslant s\leqslant\frac{1}{2}gt_L^2\right)$. 在这种情形下,我们称函数 $t=f^{-1}(s)$ 是函数 $s=f(t)$ 的反函数.

通过上面问题的分析,可以给出反函数的定义:

已知 y 是 x 的函数

$$y=f(x)\ (x\in X),\tag{1}$$

若将 y 作为自变量,x 作为函数,则由关系(1)所确定的函数

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(X)\tag{2}$$

称为函数 $f(x)$ 的**反函数**.

由于习惯上通常用字母 x 表示自变量而字母 y 表示函数,为了与习惯记法一致,将式(2)中的自变量 y 改写为 x,函数 x 改写为 y,这样,函数(1)的反函数为

$$y=f^{-1}(x).\tag{3}$$

例 1 已知函数 $y=2x+1\ (-\infty<x<+\infty)$,求其反函数.

解 由原来的函数有

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2},\ -\infty<y<+\infty.$$

将 x,y 互换,得到反函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ -\infty<x<+\infty.$$

例 2 已知函数 $y=x^2\ (-\infty<x<+\infty)$,求其反函数.

解 对于已给函数的值域 $[0,+\infty)$ 内的每一个值 y_0,都有定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的值 $x_0=\pm\sqrt{y_0}$ 满足原来函数 $y=x^2$. 当 $y_0>0$ 时有两个值对应于 x_0,