古算今论

第二版

李兆华 著

天津科技翻译出版公司

古算今论

第二版

李兆华　著

天津科技翻译出版公司

图书在版编目（CIP）数据

古算今论/ 李兆华著．—天津：天津科技翻译出版公司，2011.12
ISBN 978-7-5433-2956-0

Ⅰ．①古…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①古典数学－研究－中国－明清时代
Ⅳ．①O112

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 240696 号

出　　版：天津科技翻译出版公司
出 版 人：刘 庆
地　　址：天津市南开区白堤路 244 号
邮政编码：300192
电　　话：022-87894896
传　　真：022-87895650
网　　址：www.tsttpc.com
印　　刷：天津市津通印刷有限公司
发　　行：全国新华书店
版本记录：787×1092　16 开本　19.25 印张　480 千字
2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷
定价：56.00 元

古算今论

第二版

自　序

自1982年以来,笔者先后发表有关中国数学史的文章七十余篇。兹选择其中的三十二篇以发表时间为序结为本书。这三十二篇文章大致可以分为以下几类。一,算法的理解与分析,如汪莱开方术、李善兰尖锥术。二,算法的发展演变过程的考察,如百鸡术、招差术。三,数学著作的内容与流传的考察,如《算法统宗》。四,史料的考证与校勘,如《四元玉鉴》。此外,还涉及数学观念与数学发展之关系的讨论,如"中体西用"说与晚清算学课艺。总之,以上的工作反映了笔者对于中国数学史的考察、理解、分析和判断的状况。

数学史是数学的历史,是数学和历史的交叉学科。其研究目的在于求真、求新、求用。三者不可偏废,而以求真为之根本。数学内容与数学方法的准确理解是中国数学史研究的关键,对此有所忽略和误解势必导致所得结论可能的失误。笔者一直努力避免这种失误以求不失根本。然而,毕竟是一己之见,失误容或有之,读者教正是幸。

"《九章算术》开立方术的代数意义"是念研究生时的一篇习作,也是发表的第一篇数学史文章。钱宝琮主编《中国数学史》就《九章算术》开平方术、开立方术的演算过程给出准确的表述,而术文包含的迭代思想尚未讨论。笔者将此想法写成一篇习作。李迪先生推荐编入《〈九章算术〉与刘徽》一书。该书主编吴文俊先生作了删减使这篇习作的重点方显突出。谨记于此以识前辈的提携兼以自励。

《古算今论》初版(2000年)收录文章十九篇。现增入十三篇,个别文字作了修改,是为第二版。高红成博士为书稿的录入付出辛勤的劳动,谨此致谢。本书由天津师范大学重点学科(科学技术史)资助出版。

李兆华

2011年2月17日

目　录

《九章算术》开立方术的代数意义*

《九章算术》[1]开立方术文简意赅。由于其中明确指出“复除，折而下”、“复除，折下如前”，可见这是一个具有一般性的法则。也就是说，如果立方根是多位数，那么反复运用这一法则都可求出来。今将开立方术的术文以及用近代符号表示的算草对比胪列如下，然后对它的代数意义和历史价值加以说明。

“置积为实，借一算。”

实	N
借算	1

图 1

如图 1，表示方程 $X^3 = N$（N 是正整数）。

“步之超二等，议所得。”

商	α_1
实	N
借算	$(10^3)^{n-1}$

图 2

设共步过 $(n-1)$ 次 $(n \geqslant 2)$，表示方根有 $(n-1)+1=n$ 位。每步一次，借算需乘以 10^3，步 $(n-1)$ 次后，借算表示 $(10^3)^{n-1}$。如图 2 表示方程

$$(10^3)^{n-1} \cdot x_1^3 = N \tag{1}$$

亦即

$$(10^{n-1}x_1)^3 = N$$

其中，$10^{n-1}x_1 = X$。议得 $x_1 \approx \alpha_1$ 为方根的第一位数，即初商。

“以再乘所借一算为法而除之。”

商	α_1
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$
法	$(10^3)^{n-1}\alpha_1^2$
中行	$(10^3)^{n-1}\alpha_1$
借算	$(10^3)^{n-1}$

图 3

* 原载吴文俊主编《〈九章算术〉与刘徽》，北京师范大学出版社，1982。

“除已,三之为定法,复除折而下,以三乘所得数置中行,复借一算置下行,步之,中超一、下超二等,复置议。”

商	$\alpha_1\alpha_2$
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$
定法	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}$
中行	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}$
借算	$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}$

图4

如图4,表示方程

$$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}x_2^3+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}x_2^2+3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}x_2=N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$$

亦即

$$(10^{n-2}x_2)^3+3(10^{n-1}\alpha_1)\cdot(10^{n-2}x_2)^2+3(10^{n-1}\alpha_1)^2\cdot(10^{n-2}x_2)=N-(10^{n-1}\alpha_1)^3 \quad (2)$$

其中,$10^{n-2}x_2=X-10^{n-1}\alpha_1$。以定法除实决定次商 α_2:

$$x_2\approx\frac{N-(10^{n-1}\alpha_1)^3}{3(10^{n-1}\alpha_1)^2\cdot 10^{n-2}}\approx\alpha_2$$

“以一乘中,再乘下,皆副,以加定法,以定法除。”

商		$\alpha_1\alpha_2$
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3-[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}10^{-3}\alpha_2^2]\alpha_2$	
定法	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}10^{-3}\alpha_2^2$	
中行	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}$	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2$
借算	$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}$	$(10^3)^{n-1}10^{-3}\alpha_2^2$

图5

“皆副”的意义是以 α_2 乘中行的数,以 α_2^2 乘下行的数都另外放置,即图5右下角的数。

“除已,倍下,并中从定法,复除,折下如前。”(以三乘所得数置中行,复借一算置下行,步之,中超一、下超二等,复置议。)①

商		$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3-[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2]\alpha_2$	
定法	$3[(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+2(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}10^{-3}\alpha_2^2]\cdot 10^{-1}$	
中行	$[3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}+3(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2]\cdot 10^{-2}$	
借算	$(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}$	$3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2$ $2(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2$

图6

① 括号内文字是本文所加,意在说明省文的内容。

"倍下"的意义是将下行另置的数二倍。"并中"的意义是将下行另置的数二倍后与中行另置的数相加。"从定法"是将以上两数相加的结果加入定法。"复除，折下如前"是决定三商时，定法一退，其他运算重复前面的步骤。如图6，表示方程

$$
\begin{aligned}
&(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}x_3^3+\left[3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}+3(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2\right]\cdot 10^{-2}x_3^2\\
&+3\left[(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+2(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2\right]\cdot 10^{-1}x_3\\
={}&N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3-\left[3(10^3)^{n-1}\alpha_1^2\cdot 10^{-1}+3(10^3)^{n-1}\alpha_1\cdot 10^{-2}\alpha_2+(10^3)^{n-1}\cdot 10^{-3}\alpha_2^2\right]\alpha_2
\end{aligned}
$$

亦即

$$
\begin{aligned}
&(10^{n-3}x_3)^3+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)\cdot(10^{n-3}x_3)^2+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^2\cdot(10^{n-3}x_3)\\
={}&N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^3
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中，$10^{n-3}x_3=X-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)$。同样地，以定法除实，决定三商 α_3：

$$x_3\approx\frac{N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^3}{3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2)^2\cdot 10^{n-3}}\approx\alpha_3$$

……

按照开立方术，进行 $(k-1)$ 次 $(2\leqslant k\leqslant n-1)$ 减根变换，有

$$
\begin{aligned}
&(10^{n-k}x_k)^3+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})\cdot(10^{n-k}x_k)^2\\
&\quad+3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^2\cdot(10^{n-k}x_k)\\
={}&N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^3
\end{aligned}
\tag{k}
$$

其中，$10^{n-k}x_k=X-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})$。以定法除实，决定 k 商 α_k：

$$x_k\approx\frac{N-(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^3}{3(10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1})^2\cdot 10^{n-k}}\approx\alpha_k$$

注意到方根有 n 位数，且方根的各次近似值分别是

$$
\begin{aligned}
X_1&=10^{n-1}\alpha_1\\
X_2&=10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2\\
X_3&=10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+10^{n-3}\alpha_3\\
&\cdots\cdots\\
X_k&=10^{n-1}\alpha_1+10^{n-2}\alpha_2+\cdots+10^{n-(k-1)}\alpha_{k-1}+10^{n-k}\alpha_k
\end{aligned}
$$

则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的表达式，有

$$
\begin{aligned}
X_k&=X_{k-1}+10^{n-k}\alpha_k\\
&=X_{k-1}+10^{n-k}\cdot\frac{N-X_{k-1}^3}{3X_{k-1}^2\cdot 10^{n-k}}\\
&=X_{k-1}+\frac{N-X_{k-1}^3}{3X_{k-1}^2}
\end{aligned}
$$

记 $f(X)=X^3-N=0$，则

$$X_k=X_{k-1}-\frac{f(X_{k-1})}{f'(X_{k-1})}$$

综上所述，开立方术可归结为下列几步：

(i) 首先进行倍根变换，由观察求得初商，从而求得立方根的第一次近似值 $10^{n-1}\alpha_1$；

(ii) 每求得立方根的一次近似值之后，就利用 $(a+b)^3$ 展开式的系数进行减根变换，求出一个新的方程；

(iii) 在新方程中，以定法除实即用方程中的一次项系数除常数项，求出立方根的下一位数。

若方程为 $f(x)=x^3+px^2+qx+r=0$，其中，p,q 是正整数，r 是负整数。

由(ii)，令 $y=x-a$，$a>0$ 是立方根中已求出的部分，则以 $x=y+a$ 代入原方程，有

$$f(y)=(y+a)^3+p(y+a)^2+q(y+a)+r=0$$

即

$$f(y)=y^3+(3a+p)y^2+(3a^2+2pa+q)y+(a^3+pa^2+qa+r)=0$$

由(iii)，略去 y^3，y^2 项，求得

$$y\approx-\frac{a^3+pa^2+qa+r}{3a^2+2pa+q}=-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

故

$$x=y+a=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

而这一原理，恰好是三次方程的 Newton-Raphson 解法的根据。

《九章算术》的开立方术和 Newton-Raphson 法的基本原理是相同的。区别在于，开立方术处理的是最简三次方程，而后者则是首项系数为 1 的整系数三次方程；开立方术中包含有方程的倍根变换，后者则没有。从时间上看，开立方术比 Newton-Raphson 法要早 1600 年以上。

到十一世纪，宋代的贾宪又给出了“增乘开平方法”、“增乘开立方法”。[2] 由于这种方法形式整齐、程序简便，所以到十三世纪中叶被秦九韶等人发展为求解一般高次方程正根的方法即“正负开方术”。而“正负开方术”的基本原理仍是上面指出的(i)、(ii)、(iii)。其中，(iii)在《数书九章》中称为“以方约实”。因此，“正负开方术”与《九章算术》的开立方术是一脉相承的。[3] 而“正负开方术”比 Horner 法早 500 余年。[4]

Newton-Raphson 法（经后人改进，成为现今解高次方程的 Newton 法）和 Horner 法，在方程论以及数学史上均受重视。[5]-[6] 从理论上看，这两种方法与开立方术基本上是一致的。从时间上看，中国却遥遥领先于西方。因此可以说，开立方术不仅奠定了中国古代方程论的基础，而且在世界数学史上也占有重要的地位。

参 考 文 献

[1] 钱宝琮校点. 算经十书. 中华书局，1963.

[2] 杨辉.《详解九章算法》纂类. 宜稼堂丛书本.

[3] 钱宝琮主编. 中国数学史. 科学出版社，1981：162.

[4] 钱宝琮. 增乘开方法的历史发展. 宋元数学史论文集. 科学出版社，1966：36.

[5] D. E. Smith. *History of Mathematics*, Vol. II, 1950：472－473.

[6] F. Cajori. *A History of Mathematics*, 1919：203.

关于《数理精蕴》的若干问题*

《数理精蕴》五十三卷，总结了明末清初输入中国的西方数学的主要内容以及当时数学研究的主要成果。其编写得到康熙皇帝的支持，有“御制”之名，流传广泛，对清代数学的发展影响很大。《数理精蕴》是《律历渊源》一百卷之中的第三部。其第一部为《历象考成》四十二卷，第二部为《律吕正义》五卷，内容分别是历法和音律。全书一百卷从康熙五十二年(1713)六月开始编写，[1]五十三年十一月，《律吕正义》修成([1]，卷六)，六十一年(1722)六月，《历象考成》与《数理精蕴》修成。[2]雍正元年(1723)十月，全书一百卷刊成([2]，雍正三)，先后历时十一年之久。

本文仅就与《数理精蕴》有关的若干问题加以论述。所据版本为雍正二年武英殿刊本。

一、《数理精蕴》成书背景及其编者

明末，西方的数学开始传入中国。这些知识，如初等几何、三角、对数等等，引起数学工作者极大的兴趣，产生很大的影响。另一方面，这些知识还很不系统。所译的书，由于“译书者识有偏全，笔有工拙”，亦有欠通之处。以利玛窦(Matteo Ricci，1552—1610)、徐光启(1562—1633)合译的《几何原本》前六卷为例，这一点就很明显。《几何原本》译出后，明末清初的数学家几乎都学习过，并且还出现了一些删削本，如《几何要法》(1631)、《几何约》(1661)、《几何易简集》(1679)、《几何论约》(1700)以及《几何通解》等等都属于这一类作品。但《几何原本》前六卷自1607年译出后至《数理精蕴》出版这一百余年里，没有后九卷的译本。“然历书中往往有杂引之处，读者或未之详也。”[3]这样必然提出翻译后九卷的要求。再就前六卷的译文而言，梅文鼎说：“行文古奥而峭险，学者多畏之”。[4]梅瑴成曾说：“徐光启所译之书，语多晦涩，讹舛难读”。[5]还有评论说：“西人著书专务精详不厌烦渎，反复驳诘展转推寻，初学读之难免目眩神昏”。[6]这些议论是否平允姑且不谈，但它反映了一个问题，即译文有欠通及难以领会之处。诸如此类问题的提出，要求对已经传入的数学知识做进一步的整理与提高。

此外，改历工作要求比较精密的数学计算也是编辑《数理精蕴》的推动力。康熙初年，围绕着历法问题产生了一场激烈的斗争。斗争的一方是杨光先(1597—1669)、吴明烜，另一方是汤若望(A. S. Von Bell，1591—1666)、南怀仁(F. Verbiest，1623—1688)。清初，汤若望主持钦天监的工作，以新法推历。康熙三年(1664)，杨光先上书力攻汤若望在历法推算上有错误，以及在时宪历书封面上题“依西洋新法”五字“非所宜用”等等。康熙四年(1665)，谴汤若望，其属官李祖白等五人处死，遂罢新法([1]，卷二七二，杨光先传)。代之以杨光先主持钦天监工作，而他“但知推步之理，不知推步之数”，[7]不能胜任，于是清廷又起用南怀仁治历。康熙七年(1668)，“南怀仁劾奏钦天监监副吴明烜所造康熙八年七政民历内，闰十二月应是九年正

---

* 原载《内蒙古师大学报》(自然科学版)，1983年第2期。

月，又一年两春分两秋分，种种误差”。[8]康熙八年，“命大臣二十员赴观象台测验，南怀仁逐款皆符，吴明烜逐款皆错”（[8]，卷九）。结果导致杨光先被罢官，遣回原籍死于途中，吴明烜被笞四十（[1]，卷二七二，杨光先传）。梅瑴成记述这场斗争说：“康熙初年，畴人与西人争讼互讦，致成大狱。圣祖仁皇帝遍询朝臣，莫有知其是非者。”（[5]，历象考成论）这场斗争说明当时历法上存在着严重的混乱，亟待改进。康熙曾说：“古历规模甚好，但其数目岁久不合。今修历书，规模宜存古，数目宜准今”（[1]，卷二二〇，允祉传）。历法的改进，已对数学提出了严格的要求。这场斗争触动了康熙皇帝，使他认识到有必要提倡数学和天文。他曾问大臣：“光先前劾汤若望，议政大臣会议，以光先何者为是？汤若望何者为非？及新法当时议停，今日议复，其故安在？”（[1]，卷二七二，杨光先传）《清史稿》说，“圣祖尝言，历法争议未已，己所未学，不能定是非。乃发愤研讨，卒能深造密微，穷极其阃”（[1]，卷二七二，杨光先传）。康熙一生留意数学和天文，以致后来支持编写《数理精蕴》等书，和他早年这场失败有很大关系。

再有，当时来华的某些传教士，在客观上也为《数理精蕴》一书的编写提供了一些有利条件。自明末以后，入华的传教士为开辟传教的门径，往往带来一些数学和天文的书籍、仪器及地图之类的东西，并且“他们在谈话之中，每每要转转弯弯，使中华人士觉得他们也有新颖有趣的学术，可以教给他们”。[9]甚至认为“只好用数学来笼络中国的人心”。[10]汤若望、南怀仁都企图以传授天文学为手段，使顺治和康熙皈依天主教。他们曾想：“既然古代的一颗异星，曾经引导东方的三位哲王去朝拜真天主，那么这位远东皇帝，也许要因着认识了星辰被引到认识和钦崇那众星之主”（同[9]）。因此，不难理解为什么传教士要传播西方数学。由于南怀仁的周旋，路易十四派遣的法国耶稣会传教士于1688年2月7日得入北京（同[9]）。1689年，康熙召白晋（J. Bouvet，1656—1730）、张诚（J. F. Gerbillon，1654—1707）等人入宫讲授西学。[11]《数理精蕴》一书中的“几何原本”、“算法原本”就是他们编译的。

由于上述的必然性与可能性，因此对当时的数学知识进行一次全面的总结已属势在必行。嗣后，康熙接受了陈厚耀（1648—1722）“请定步算诸书以惠天下”的建议（[7]，卷四十一，陈厚耀传），开馆于蒙养斋着手修书。

《律历渊源》汇编官是何国琮（？—1766）和梅瑴成（1681—1763），以下还有分校三人，考测十人，校算十五人，校录十五人。何国琮出身于一个“世业天文”的家庭，他本人“素谙测量”。梅瑴成，字玉汝，号循斋，又号柳下居士，安徽宣城人。他的祖父梅文鼎（1633—1720）是清代最著名的数学家。其父、其弟、其子多兼通数学。他曾说，《数理精蕴》是“翰林梅瑴成等汇编”，[12]“昔待罪蒙养斋汇编《数理精蕴》”（[12]，卷九），“昔在蒙养斋汇编《数理精蕴》”。[13]可见《数理精蕴》一书的主编是梅瑴成。

二、《数理精蕴》中几项重要的内容

《数理精蕴》五十三卷，分为上编五卷，题为“立纲明体”；下编四十卷，题为“分条致用”；附录八卷。上编包括“数理本源”、“几何原本”、“算法原本”；下编包括首部、线部、面部、体部及末部共五个部分，其内容分别是算术（首部、线部）、平面几何与平面三角（线部）、立体几何（体部）及代数（末部）；附录包括八线表（三角函数表）、对数阐微（1至10万的素因数表）、对数表及三角函数对数表共四种数学用表。所有这些材料大致来自三个方面：第一，采用西方数

学的内容;第二,继承中国古代数学的成果;第三,将上述两项内容加以推进。例如,"几何原本"、"算法原本"、割圆八线、借根方比例、对数等等都属于上述第一种情形;一次方程组、盈朒、开平方、开立方、开带纵较数立方、勾股算术等等均属于上述第二种情形;正十四边形与正十八边形边长计算、开带纵和数立方、八线表的改进等等均属于上述第三种情形。其中最重要的内容与成果有以下几点。

1. 开带纵较数立方与开带纵和数立方(下编卷二十四)

所谓开带纵较数立方是指求解形如

$$f(x) = x(x+a)(x+b) - V = 0$$

亦即

$$f(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx - V = 0 \tag{1}$$

的三次方程的一个正根。其中 $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $V > 0$。若 $a > 0$, $b = 0$, 称为带一纵较数立方;$a = b \neq 0$ 称为带两纵相同较数立方;$a \neq b \neq 0$ 则称为带两纵不同较数立方。

兹以下编卷二十四的一个例题说明其解法原理。为明确,将原题及其解法译成现在通用的符号,列如表1。

表1 带两纵不同较数立方解法

	原题及解法	译成代数符号
	设如带两纵不同立方积一十三丈二百四十九尺四十五寸,其阔比高多一尺,长比高多三尺二寸。问长阔高各几何	设高为 x, 阔比高多 a, 长比高多 b, 长方体体积为 V, 则 $f(x) = x(x+a)(x+b) - V = 0$ 即 $f(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx - V = 0$
1.	如开立方法得初商高二丈	x_1
2.	以初商高、初商高加阔比高多为初商阔、以初商高加长比高多为初商长,三数相乘,得九丈七百四十四尺。以减原积余三丈五百零五尺五百四十四寸,为次商廉隅共积	$V - x_1(x_1+a)(x_1+b)$ $= -f(x_1)$
	以初商高与初商阔、初商高与初商长、初商阔与初商长相乘,三数相加得一千三百七十一尺二十寸为次商三方廉面积	$x_1(x_1+a) + x_1(x_1+b) + (x_1+a)(x_1+b)$ $= 3x_1^2 + 2(a+b)x_1 + ab$ $= f'(x_1)$
	以次商三方廉面积除次商廉隅共积得次商二尺	$x_2 = -\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

续表

	以初商高、初商阔、初商长相加,以次商乘之为次商三长廉面积。又以次商自乘为次商一小隅面积。合三方廉、三长廉、一小隅面积为次商廉隅共法,以次商乘之。以减余积,得四百九十八尺三百四十五寸,为三商廉隅共积	$-f(x_1)-\{[x_1+(x_1+a)+(x_1+b)]x_2+x_2^2+f'(x_1)\}x_2$ $=V-[(x_1+x_2)^3+(a+b)(x_1+x_2)^2+ab(x_1+x_2)]$ $=-f(x_1+x_2)$
3.	以初商加次商为初次商高,加阔比高多为初次商阔,加长比高多为初次商长。以初次商高与初次商阔、初次商高与初次商长、初次商阔与初次商长相乘,三数相加得一十六万四千寸,为三商三方廉面积	$(x_1+x_2)[(x_1+x_2)+a]+(x_1+x_2)[(x_1+x_2)+b]+[(x_1+x_2)+a][(x_1+x_2)+b]$ $=3(x_1+x_2)^2+2(a+b)(x_1+x_2)+ab$ $=f'(x_1+x_2)$
	以三商三方廉面积除三商廉隅共积得三商为三寸	$x_3=-\dfrac{f(x_1+x_2)}{f'(x_1+x_2)}$
4.	以初次商高、初次商阔、初次商长相加,以三商乘之为三商三长廉面积。又以三商自乘为三商一小隅面积。合三方廉、三长廉、一小隅面积为三商廉隅共法,以三商乘之得四十九万八千三百四十五寸。与余积相减恰尽。开得高二丈二尺三寸,阔二丈三尺二寸,长二丈五尺五寸	$-f(x_1+x_2)-\{[(x_1+x_2)+(x_1+x_2+a)+(x_1+x_2+b)]x_3+x_3^2+f'(x_1+x_2)\}x_3$ $=-f(x_1+x_2+x_3)$
	……	……

原题的解法,如表 1 左半所述,具有明确的几何意义。如图 1,一个长方体的三度为 x, $x+a$, $x+b$, 被剖成一个小长方体和一个磬折体。磬折体由七个部分组成,其中体积 A 、B 和 C 叫作方廉, D 、E 和 F 叫作长廉,后下角还有一个小正方体(在图 1 中不可见)叫作隅。上面的解法相当于

$$\text{长方体的高}=\text{小长方体的高}+\frac{\text{磬折体体积}}{\text{面积}(A+B+C)}$$

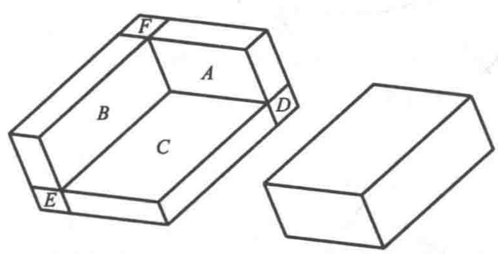

图 1

表 1 的右半给出了这种解法的代数意义。若方程

$$f(x)=x^3+(a+b)x^2+abx-V=0$$

的根的第一次近似值为 α, 则第二次近似值

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

由上述的几何意义与代数意义，不难解释该解法的原理。事实上，因方程根的第一次近似值为 α，令 $x = \alpha + y$，代入原方程，整理得

$$y^3 + [3\alpha + (a+b)]y^2 + [3\alpha^2 + 2(a+b)\alpha + ab]y + [\alpha^3 + (a+b)\alpha^2 + ab\alpha - V] = 0$$

亦即

$$y^3 + \frac{1}{2}f''(\alpha)y^2 + f'(\alpha)y + f(\alpha) = 0$$

略去 y^3 、y^2 项，由 $f'(\alpha)y + f(\alpha) = 0$，得 $y = -\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$，故 $x = \alpha + y = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$。其中，$\dfrac{1}{2}f''(\alpha)$ 是三个方廉相连的三条棱长之和，$f'(\alpha)$ 是三个方廉相连的三个侧面积之和，即面积 $(A + B + C)$，$-f(\alpha)$ 是“余积”或“廉隅共积”，即图 1 中磬折体体积。

上述原理，概括起来有两点：

(i)求得方程 $f(x) = 0$ 根的第一次近似值 α 之后，令 $x = \alpha + y$ 代入原方程，即对原方程进行减根变换；

(ii)在减根变换后的方程中，略去高次项，由一次方程解出 y，从而求得根的第二次近似值 x。

在中国古代数学中，上述原理(i)、(ii)发明甚早，且贯穿于中国古代方程论的始终。上述原理始见于《九章算术》。其中的“开立方术”就是运用这一原理给出方程 $f(x) = x^3 - V = 0$ $(V > 0)$ 的解是 $x = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$。虽然对于方程(1)的解法经无明训，但“开立方术”中，既得初商以后的步骤就是求解形如(1)的方程，[14]从而奠定了后世开带纵立方的基础。263 年，刘徽注《九章算术》，他又把“开立方术”的原理推广到开立方根的小数部分。他在“开方术”注文中说：“加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细”。又在“开立方术”注文中说：“术亦有以定法命分者，不如故幂开方，以微数为分也。”此后，7 世纪的王孝通解过形如(1)的方程。所用的方法，据推测，也是《九章算术》开立方术所指示的那样。到 11 世纪，在《九章算术》开立方术的基础上，又发明一种“增乘开方法”，用以求解高次方程。这种新方法使方程的减根变换的计算大为简化，而基本原理仍未改变。但这种新方法到明代失传。此后的数学家，如吴敬、程大位、方中通等求解方程(1)时，仍用《九章算术》指示的方法。梅文鼎鉴于当时西方传入的数学“未有带纵之术”，以及程大位的著作“非立术本意”，因而将开带纵较数立方问题做了系统的总结。[15]在编写《数理精蕴》一书时，将梅氏的这一工作悉行采入。由以上讨论可见，《数理精蕴》一书中开带纵立方法，其源盖出于《九章算术》。

在西方数学史上，1685 年，Newton 发表了三次方程的一种解法。1690 年，J. Raphson (1648—1715)将 Newton 的方法加以改进并发表在《一般方程分析》里。这就是数学史上所说的 Newton-Raphson 法。按照这种方法，首先观察到方程

$$f(x) = y^3 - 2y - 5 = 0$$

的一个正根在 2 和 3 之间，令 $y = 2 + p$，代入原方程，有

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

略去高次项，由 $10p - 1 = 0$ 得 $p = 0.1$，于是 $y = 2 + 0.1 = 2.1$。

再令 $y = 2.1 + q$，代入原方程，以同样的方法求得 $q = -0.0054$，于是 $y = 2.1 - 0.0054 = 2.0946$。

重复使用这种方法可得 $y = 2.09455147$。数学史家认为，这种方法相当于给出公式 $y = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$，其中 α 为方程的第一次近似根，y 为第二次近似根。[16]-[17] 不难看出，Newton-Raphson 法的原理与《九章算术》开立方术所给出的原理(i)、(ii)完全相同，但其时代相去远矣。

所谓开带纵和数立方是指求解形如

$$f(x) = x(a - x)(b - x) - V = 0$$

亦即

$$f(x) = x^3 - (a + b)x^2 + abx - V = 0 \qquad (2)$$

的三次方程的一个正根。其中，$a > x > 0$，$b > x > 0$，$V > 0$。若 $a = 2x$ 则称为带一纵和数立方；$a = b$ 则称为带两纵相同和数立方；$a \neq b$ 则称为带两纵不同和数立方。

带纵和数立方与带纵较数立方相对而言。《数理精蕴》一书说："此法与较数带纵立方有加减之异，彼以所商之数与较数相加，此则以所商之数与和数相减。"除此之外，解法没有区别。

这种解法有明确的几何意义。如图 2，设整个长方体的体积为 $(A + E)$，则

$$\text{长方体的高} = \text{长方体}\,A\,\text{的高} + \frac{\text{体积}\,E - \text{体积}(B + C + D)}{\text{面积}(A + B + C + D)}$$

其中，体积 E 称为长方廉，体积 B 和 D 称为长廉，体积 C 称为方廉。面积 $(A + B + C + D)$ 称为长方廉面积，即指图 2 右边的长方体上底面积。

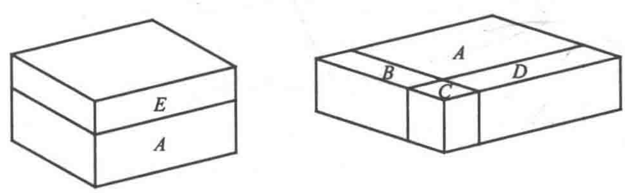

图 2

上述解法的代数意义与带纵较数立方的完全相同，只要把它译成代数符号就可看到，方程(2)与方程(1)有相近的求根公式

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{(a - \alpha)(b - \alpha)}$$

《数理精蕴》一书说："带纵较数立方其法已难，而带纵和数立方，其法尤难，故古无传。而以理推之，则法有与较数相对待者。"可见，这种方法是在带纵较数的基础上"以理推之"的结果。这是在增乘开方法失传之后，在三次方程研究方面的一个成果。